CONTRÔLE CONTINU

Coniques, quadriques, formes quadratiques.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soient

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

et $q(x, y)$ la forme quadratique associée à A.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O\,; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et l'on note $\mathcal{C}$ la conique d'équation

$$q(x, y) + 16x - 8y - 16 = 0$$

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une conique à centre dont on précisera la nature.
2. Montrer que le point $\Omega = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ est le centre de symétrie de $\mathcal{C}$. On pourra commencer par déterminer l'équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\mathcal{R}_\Omega = (\Omega\,; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
3. Déterminer un repère $\mathcal{R}'_\Omega$ du plan dans lequel l'équation de $\mathcal{C}$ est réduite. On précisera l'équation réduite obtenue ainsi que la matrice de passage de $\mathcal{R}_\Omega$ à $\mathcal{R}'_\Omega$.
4. Tracer dans le repère ci-joint le centre Ω et les deux axes de symétrie de $\mathcal{C}$.
5. Déterminer la position des sommets de $\mathcal{C}$ et les ajouter au dessin.
6. Déterminer la position des foyers de $\mathcal{C}$ et les ajouter au dessin.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathcal{O} : \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}_a$ la conique du plan dont l'équation dans $\mathcal{R}$ est

$$x^2 + 2axy + y^2 + 4x - 2a^2 = 0$$

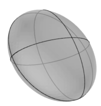
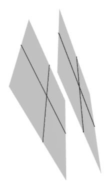
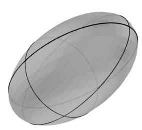
1. Isoler la partie quadratique $q(x, y)$ et donner la matrice A_q associée.
2. Déterminer les valeurs propres de A_q.
3. En déduire, en fonction de a, la nature de la conique $\mathcal{C}_a$.

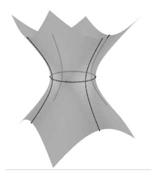
4. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, les droites d'équations $\Delta_1 : y = x$ et $\Delta_2 : y = -x$ sont des droites de vecteurs propres de A.
5. Montrer qu'il existe un repère orthonormé $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}\,;\, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ dans lequel l'équation de $\mathcal{C}_a$ est
$$(1+a)X^2 + (1-a)Y^2 + 2\sqrt{2}X + 2\sqrt{2}Y - 2a^2 = 0$$
6. On suppose <u>ici</u> que $|a| = 1$.
   (a) Déterminer une équation réduite de $\mathcal{C}_a$.
   (b) En déduire les coordonnées de l'unique sommet de $\mathcal{C}_a$ ainsi qu'une équation de son axe focal.
7. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a la conique $\mathcal{C}_a$ est un cercle. On précisera son centre et son rayon.
8. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de a la conique $\mathcal{C}_a$ est une réunion de deux droites. On précisera les équations de ces droites dans le repère $\mathcal{R}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, on note $q_\alpha(x, y, z)$ la forme quadratique associée à la matrice
$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$
et l'on note $\mathcal{Q}_\alpha$ la quadrique de l'espace dont l'équation dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$ est
$$q_\alpha(x, y, z) = 1$$
1. Donner explicitement $q_\alpha(x, y, z)$ en fonction de x, y, z, α.
2. Montrer que le centre $\mathcal{O}$ de $\mathcal{R}$ est le centre de symétrie de $\mathcal{Q}_\alpha$.
3. Montrer $\mathrm{Spec}(M_\alpha) = \{\alpha + 2, \alpha - 1\}$. On précisera l'ordre de multiplicité de chacune des valeurs propres.
4. Associer à chacun des cas ci-dessous une représentation graphique de la surface $\mathcal{Q}_\alpha$. On justifiera les associations.

$$i)\quad \alpha > 1 \qquad ii)\quad \alpha = 1 \qquad iii)\quad -2 < \alpha < 1 \qquad iv)\quad \alpha \leqslant -2$$

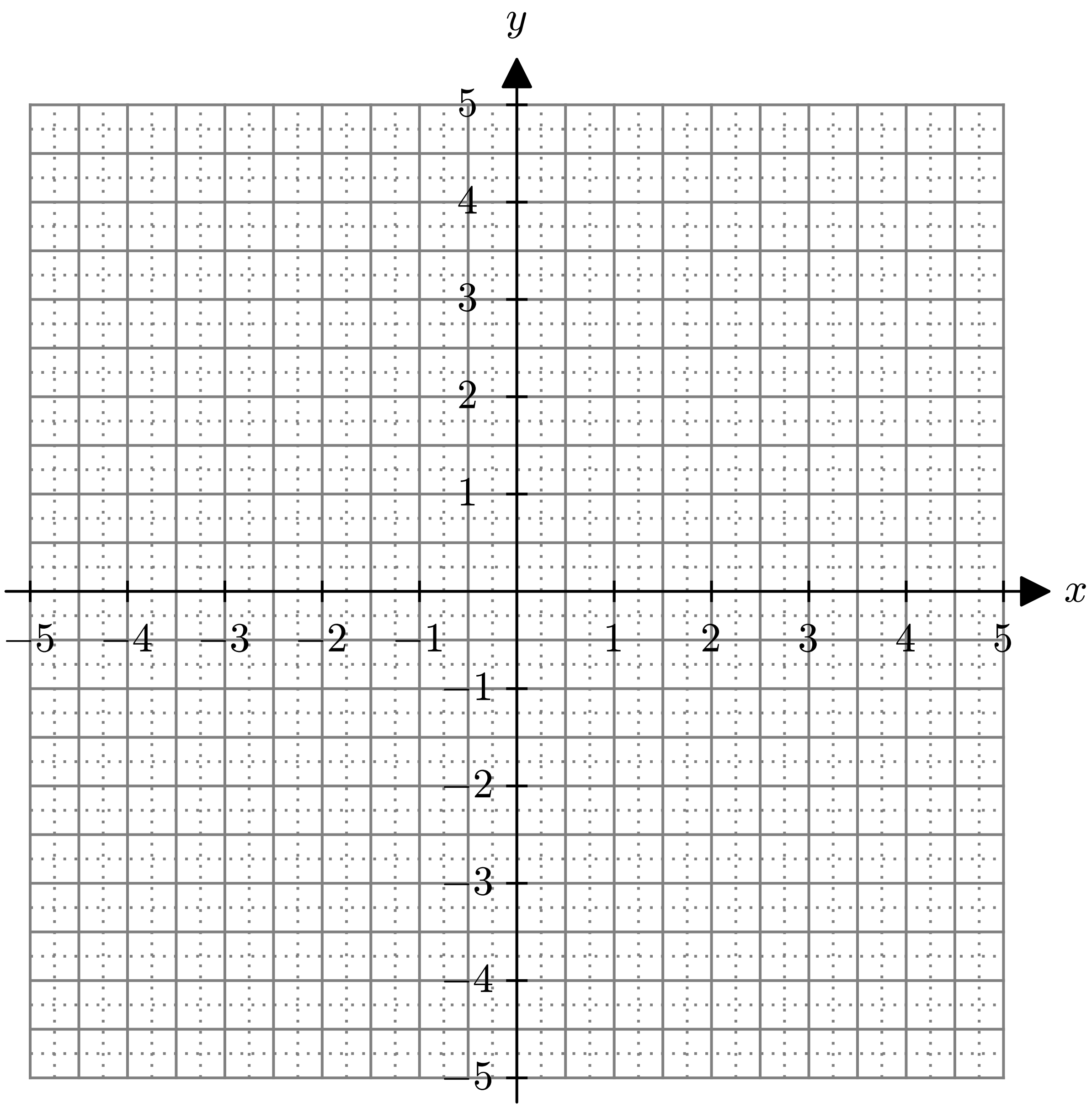





Ensemble vide

A B C D E F

⋆ ⋆
⋆

NOM : .... Prénom : ....



CORRECTION

Exercice 1 :

1. La nature de la conique $\mathcal{C}$ dépend du signe des valeurs propres de A et donc du signe de son déterminant. Or
$$\det(A) = 5 \times 8 - 2^2 = 36 > 0$$
Les deux valeurs propres de A sont donc de même signe et $\mathcal{C}$ est une ellipse.

2. Étant donnée la matrice A, l'équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}$ est $p(x, y) = 0$ où
$$p(x, y) = 5x^2 + 4xy + 8y^2 + 16x - 8y - 16$$
Pour déterminer l'équation de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}_\Omega$, on doit effectuer le changement de variables
$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & X - x_\Omega = X + 2 \\ y & = & Y - y_\Omega = Y - 1 \end{array}\right.$$
Ainsi
$$\begin{aligned} p(x, y) = 0 \Leftrightarrow & p(X - 2, Y + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & 5(X - 2)^2 + 4(X - 2)(Y + 1) + 8(Y + 1)^2 + 16(X - 2) - 8(Y + 1) - 16 = 0 \\ \Leftrightarrow & 5X^2 - \cancel{20X} + 20 + 4XY + \cancel{4X} - \cancel{8Y} - 8 \\ & + 8Y^2 + \cancel{16Y} + 8 + \cancel{16X} - 32 - \cancel{8Y} - 8 - 16 = 0 \\ \Leftrightarrow & 5X^2 + 4XY + 8Y^2 = 36 \end{aligned}$$
On constate que cette nouvelle équation ne contient plus de terme linéaire. Elle est donc stable par la transformation $(X, Y) \rightsquigarrow (-X, -Y)$. Cela montre que le centre Ω de ce nouveau repère est bien le centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

3. Après avoir éliminé les termes linéaires de l'équation de $\mathcal{C}$, il reste, pour obtenir une équation réduite de $\mathcal{C}$, à déterminer une BON $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ du plan faite de vecteurs propres de A. Ainsi,

   - *Recherche de valeurs propres*
   Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme
   $$\begin{aligned} \chi_a(\lambda) = \det(A - \lambda.I_3) = & \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 8 - \lambda \end{vmatrix} \\ = & (5 - \lambda)(8 - \lambda) - 4 \\ = & 40 - 13\lambda + \lambda^2 - 4 \\ = & \lambda^2 - 13\lambda + 36 \end{aligned}$$
   D'où
   $$\Delta = (-13)^2 - 4.36 = 25$$
   Les valeurs propres de A sont donc
   $$\lambda_1 = \frac{13 - \sqrt{25}}{2} = 4 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{13 + \sqrt{25}}{2} = 9$$

- *Sous espaces propres*

— $\underline{E_4}$: en notant, par abus, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_\Omega$, on a

$$\begin{aligned} AX = 4X &\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} 5x & + & 2y & = & 4x \\ 2x & + & 8y & = & 4y \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 2y & = & 0 \\ 2x & + & 4y & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff y = -\frac{1}{2}x \end{aligned}$$

Le sous espace propre E_4 est donc la droite du plan engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_1} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_\Omega}$.

— $\underline{E_9}$:

$$\begin{aligned} AX = 9X &\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} 5x & + & 2y & = & 9x \\ 2x & + & 8y & = & 9y \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{ccccc} -4x & + & 2y & = & 0 \\ 2x & - & y & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff y = 2x \end{aligned}$$

Le sous espace propre E_9 est donc la droite du plan engendrée par le vecteur $\overrightarrow{e_2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_\Omega}$.

Dans le repère $\mathcal{R}'_\Omega = (\Omega, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, l'équation de $\mathcal{C}$ est alors

$$4\tilde{x}^2 + 9\tilde{y}^2 = 36$$

ou encore

$$\frac{1}{9}\tilde{x}^2 + \frac{1}{4}\tilde{y}^2 = 1$$

La matrice de passage du repère $\mathcal{R}_\Omega$ à $\mathcal{R}'_\Omega$ est par ailleurs

$$P = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. c.f. repère ci-dessous.

5. Les sommets de $\mathcal{C}$ sont les points d'intersection de celle-ci avec les axes du repère $\mathcal{R}'_\Omega$. Ce sont donc les points de coordonnées

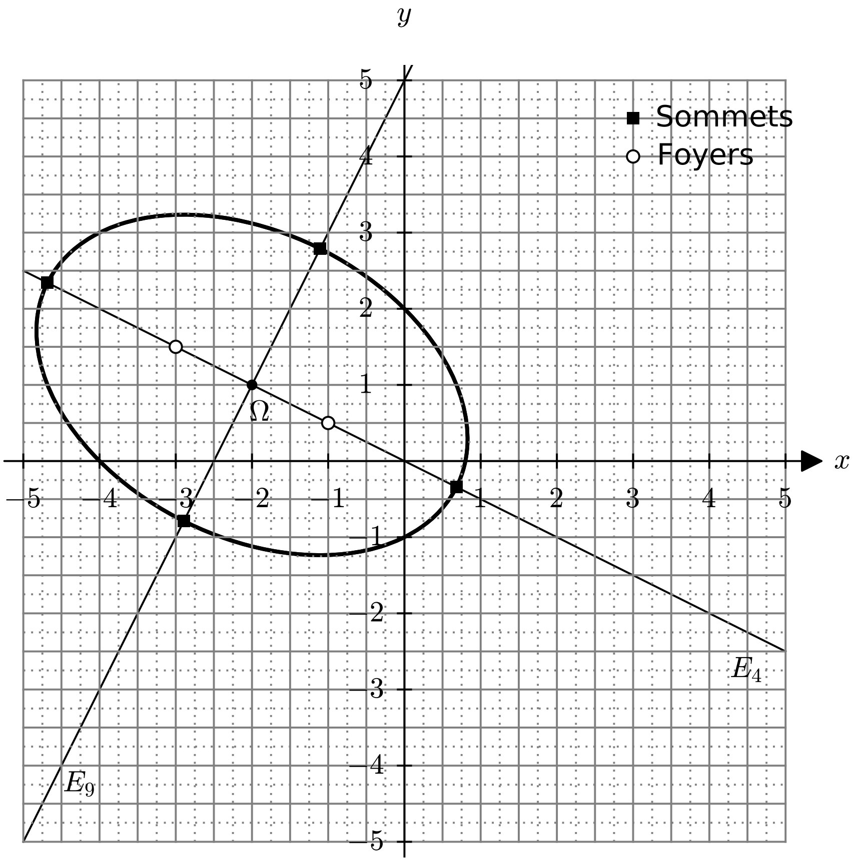
$$S_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'_\Omega}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'_\Omega}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'_\Omega}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'_\Omega}$$

On peut ainsi les placer sur le dessin à partir du point Ω.

6. Les distances caractéristiques de l'ellipse $\mathcal{C}$ sont $a = 3$ et $b = 2$. Ses foyers sont donc les points de l'axe focal situés à une distance

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5} \approx 2.25$$

On peut là encore les placer dans le repère à partir du point Ω.



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. La partie quadratique de l'équation est $q(x, y) = x^2 + 2axy + y^2$. Sa matrice est $A_q = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$.
2. Les valeurs propres de A_q sont les racines du polynôme

$$\begin{aligned} \chi_{A_q}(\lambda) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ a & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 - a^2 \\ &= (1-a-\lambda)(1+a-\lambda) \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Spec}(A_q) = \{1-a, 1+a\}$.

3. La nature de $\mathcal{C}_a$ dépend du signe des valeurs propres de A_q. Ainsi,
   - si $|a| < 1$, alors $1-a$ et $1+a$ sont de même signe et $\mathcal{C}_a$ est une ellipse,
   - si $|a| = 1$, alors $1-a$ ou $1+a$ est nulle et $\mathcal{C}_a$ est une parabole,
   - si $|a| > 1$, alors $1-a$ et $1+a$ sont de signes différents et $\mathcal{C}_a$ est une hyperbole.

4. Pour répondre à cette question, on peut déterminer les sous espaces propres de A_q. Pour cela, il faut distinguer les cas $a = 0$ et $a \neq 0$.

   Cependant, on peut également se contenter de tester les vecteurs des droites Δ_1 et Δ_2 :

$$\begin{aligned}\forall \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \in \Delta_1, \quad A_q \times \overrightarrow{u} &= A_q \times \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x+ax \\ ax+x \end{pmatrix} = (1+a) \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \\ A_q \times \overrightarrow{u} &= (1+a)\overrightarrow{u}\end{aligned}$$

   Donc les vecteurs (non nuls) de Δ_1 sont des vecteurs propres de A_q associés à la valeur propre $1+a$.
   De même,

$$\begin{aligned}\forall \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \in \Delta_2, \quad A_q \times \overrightarrow{v} &= A_q \times \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x-ax \\ ax-x \end{pmatrix} = (1-a) \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} \\ A_q \times \overrightarrow{v} &= (1-a)\overrightarrow{v}\end{aligned}$$

   Donc les vecteurs (non nuls) de Δ_2 sont des vecteurs propres de A_q associés à la valeur propre $1-a$.

5. Notons

$$\overrightarrow{e_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \in \Delta_1 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \in \Delta_2$$

   L'ensemble $\mathcal{R}' = (\mathcal{O}\,;\, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est un repère orthonormé du plan. La matrice de passage de $\mathcal{R}$ à $\mathcal{R}'$ étant

$$P = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   pour tout point $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \times \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \\ \\ y &=& \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y) \end{array} \right.$$

L'équation de $\mathcal{C}_a$ dans $\mathcal{R}'$ est alors

$$\begin{aligned} x^2+2axy+y^2+4x-2a^2=0 &\iff (1+a)X^2+(1-a)Y^2+4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y)\right)-2a^2=0 \\ &\iff (1+a)X^2+(1-a)Y^2+2\sqrt{2}X+2\sqrt{2}Y-2a^2=0 \end{aligned}$$

6. Si $|a|=1$, la conique $\mathcal{C}_a$ est une parabole. Une équation réduite est donc une équation de la forme $\tilde{y}^2=2p\tilde{x}$.
   (a) • si $a=1$, alors l'équation de $\mathcal{C}_1$ dans $\mathcal{R}'$ est

$$\begin{aligned} 2X^2+2\sqrt{2}X+2\sqrt{2}Y-2=0 &\iff 2\left(X^2+\sqrt{2}X\right)=-2\sqrt{2}Y+2 \\ &\iff 2\left[\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right]=-2\sqrt{2}Y+2 \\ &\iff 2\left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=-2\sqrt{2}Y+3 \\ &\iff \left(X+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=-\sqrt{2}Y+\frac{3}{2}=\sqrt{2}\left(-Y+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

   En posant

$$\begin{cases} \tilde{x} &= -Y+\frac{3\sqrt{2}}{4} \\ \tilde{y} &= X+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

   on obtient une équation réduite de $\mathcal{C}_a$.

   • De même, si $a=-1$, on a

$$\begin{aligned} 2Y^2+2\sqrt{2}X+2\sqrt{2}Y-2=0 &\iff \left(Y+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\sqrt{2}\left(-X+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) \\ &\iff \tilde{y}^2=2p\tilde{x} \end{aligned}$$

   avec

$$\begin{cases} \tilde{x} &= -X+\frac{3\sqrt{2}}{4} \\ \tilde{y} &= Y+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

   (b) L'axe focal d'une parabole est dirigé par n'importe quel vecteur propre non nul associé à la valeur propre nulle. Ainsi, si $a=1$, l'axe focal de $\mathcal{C}_a$ est paralèle à la droite Δ_1. Par ailleurs, l'unique sommet de $\mathcal{C}_1$ est le centre du repère dans lequel l'équation est réduite. D'après les calculs précédents, il s'agit du point

$$S=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$$

L'axe focal de $\mathcal{C}_1$ est la droite paralèle à Δ_1 passant par S, soit la droite d'équation

$$y = \left(x + \frac{1}{4}\right) - \frac{5}{4} \;\Leftrightarrow\; y = x - 1$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. $q(x,y,z) = \alpha x^2 + \alpha y^2 + \alpha z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$
2. L'équation de $\mathcal{Q}_\alpha$ ne contient que des termes de degré 2 et une constante. Elle est donc invariante par le changement $(x,y) \rightsquigarrow (-x,-y)$ correspondant à la symétrie centrale de centre $\mathcal{O}$. $\mathcal{Q}_\alpha$ est donc symétrique par rapport à $\mathcal{O}$.
3.

$$\begin{aligned}
\det(M_\alpha - \lambda.I_3) &= \begin{vmatrix} \alpha-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & \alpha-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 2+\alpha-\lambda & 1 & 1 \\ 2+\alpha-\lambda & \alpha-\lambda & 1 \\ 2+\alpha-\lambda & 1 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2+\alpha-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & \alpha-\lambda \end{vmatrix} \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} (2+\alpha-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha-1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2+\alpha-\lambda)(\alpha-1-\lambda)^2
\end{aligned}$$

   Les valeurs propres de M_α sont donc

$$\lambda_1 = \alpha + 2 \text{ d'ordre } 1 \quad \text{ et } \lambda_2 = \alpha - 1 \text{ d'ordre } 2$$

4.
   - Si $\alpha > 1$, les deux valeurs propres de M_α sont strictement positives. Il s'agit donc d'un ellipsoïde (A ou D). Par ailleurs, la plus petite valeur propre λ_2 est d'ordre 2. L'ellipsoïde est donc de section circulaire lorsqu'on le coupe par le plan $E_{\alpha-1}$ correspondant à son "grand axe". C'est donc l'ellipsoïde A.
   - Si $\alpha = 1$, l'équation de $\mathcal{Q}_1$ dans un repère adapté est $X^2 = 1$. Il s'agit donc de la réunion des deux plans $X = 1$ et $X = -1$. C'est donc le dessin B.
   - Si $-2 < \alpha < 1$, M_α admet deux valeurs propres négatives et une valeur propre positive. Donc $\sigma(\mathcal{Q}_\alpha) = (1,2)$. Il s'agit dans ce cas d'un hyperboloïde à deux nappes, soit le dessin D.

- Si $\alpha \leqslant -2$, toutes les valeurs propres de M_α sont négatives ou nulles. La forme quadratique $q(x, y, z)$ est donc toujours négative ou nulle. Elle ne peut jamais être égale à 1 et $\mathcal{Q}_\alpha$ est l'ensemble vide (choix F).

$\star\ \star$
$\star$