CONTRÔLE CONTINU

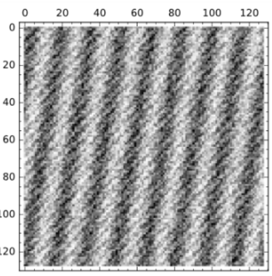
Fourier - Laplace

Durée : 1h30 *Calculatrices autorisées.*

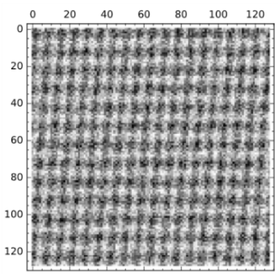
Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.

Exercice 1 Associer à chaque signal S_i sa transformée de Fourier T_i. On justifiera les associations.

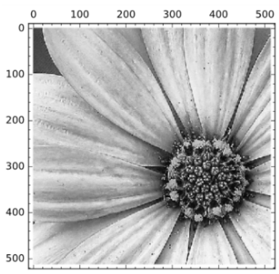
S_1



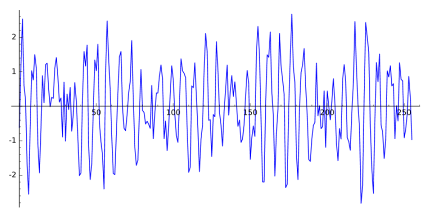
S_2



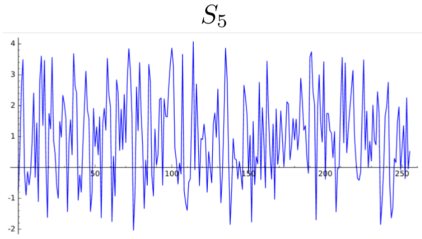
S_3



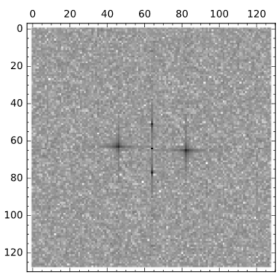
S_4



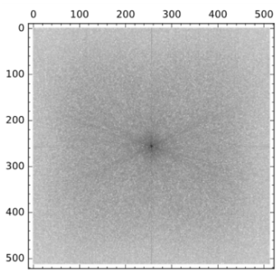
S_5



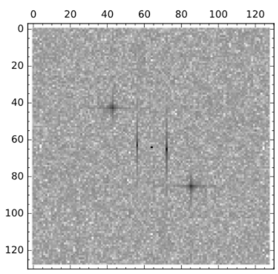
T_1



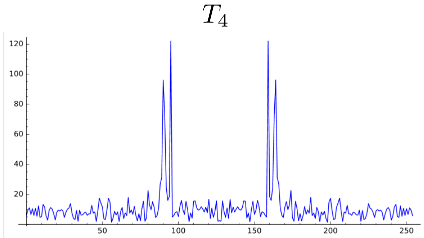
T_2



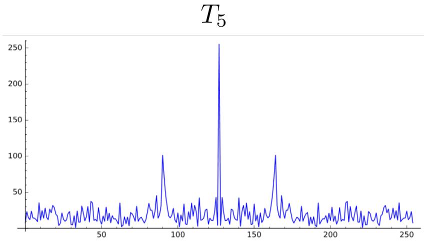
T_3



T_4



T_5



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit f la fonction 2π-périodique vérifiant

$$\forall t \in [-\pi, \pi], \qquad f(t) = \pi^2 - t^2$$

1. Tracer le graphe de f sur $[-4\pi, 4\pi]$ et donner sa parité (sans justifier).
2. Déterminer les coefficients de Fourier réels puis la série de Fourier de f.
3. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$$

4. Déterminer les sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \qquad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 1. Donner la définition de la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ d'une fonction f.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$f_n \,:\, t \longmapsto t^n.H(t)$$

où H est la fonction échelon définie par $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et l'on note $F_n(p)$ la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f_n)(p)$.

(a) À l'aide de la définition, calculer $F_0(p)$ en fonction de p.
(b) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $F_{n+1}(p)$ en fonction de $F_n(p)$.
(c) En déduire $F_n(p)$ en fonction de n et p.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 1. On considère la fonction f définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = H(t) - 2H(t-1) + H(t-2)$$

où H est la fonction échelon définie par $H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(a) Tracer le graphe de la fonction f sur $[-1, 4]$.
(b) Calculer la transformée de Laplace $F(p)$ de f.

2. On note (P) le problème différentiel défini par

$$(P) \,:\, \begin{cases} y' + y = f(t) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

où f est la fonction définie à la question 1. On admet que ce problème admet une unique solution (encore notée y) et l'on note $Y(p)$ sa transformée de Laplace.

(a) Montrer que y est solution de (P) si et seulement si

$$Y(p) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)e^{-p} + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)e^{-2p}$$

(b) En déduire $y(t)$ sous forme explicite. On donnera d'abord y en fonction de la fonction H puis on pourra distinguer les cas

$$t < 0, \qquad 0 \leqslant t < 1, \qquad 1 \leqslant t < 2, \qquad t \geqslant 2$$

(c) Superposer à la courbe de f la courbe de y.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

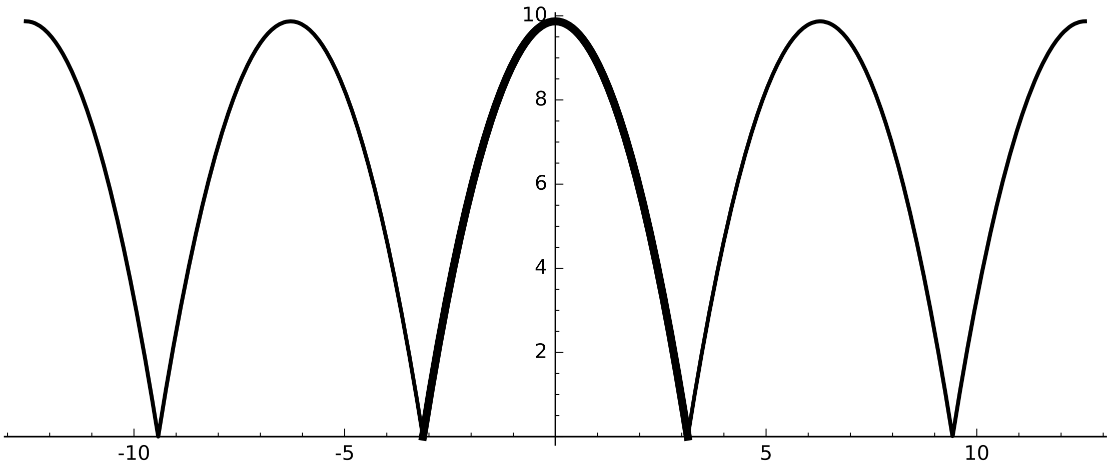
Exercice 1 :

$$S_1 \leftrightarrow T_3 \qquad S_2 \leftrightarrow T_1 \qquad S_3 \leftrightarrow T_2 \qquad S_4 \leftrightarrow T_4 \qquad S_5 \leftrightarrow T_5$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1.



2. Puisque f est périodique de période $T = 2\pi$, on a $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$. Ainsi, pour tout $n > 0$, on a

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{T}\int_{[T]} f(t)\cos(n\omega t)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - t^2)\cos(nt)dt \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi^2 - t^2)\cos(nt)dt \qquad \text{car } f \text{ est paire} \end{aligned}$$

En posant

$$\left\{ \begin{array}{lcllcl} u(t) & = & \pi^2 - t^2 & \Rightarrow & u'(t) & = & -2t \\ v'(t) & = & \cos(nt) & \Rightarrow & v(t) & = & \frac{1}{n}\sin(nt) \end{array} \right.$$

on a

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{2}{\pi}\left(\cancel{\left[\frac{\pi^2 - t^2}{n}\sin(nt)\right]_0^{\pi}} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt\right) \\ &= \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi} t\sin(nt)dt \end{aligned}$$

En posant alors

$$\left\{ \begin{array}{lcllcl} u_2(t) & = & t & \Rightarrow & u_2'(t) & = & 1 \\ v_2'(t) & = & \sin(nt) & \Rightarrow & v_2(t) & = & -\frac{1}{n}\cos(nt) \end{array} \right.$$

on a

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{4}{n\pi}\left(\left[-\frac{t}{n}\cos(nt)\right]_0^{\pi} + \cancel{\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos(nt)dt}\right) \\ &= -\frac{4(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (\pi^2 - t^2)dt = \frac{2}{\pi}\left[\pi^2 t - \frac{t^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{4\pi^2}{3}$$

Enfin, puisque f est paire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $b_n(f) = 0$.

La série de Fourier de f est donc

$$S_f(t) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)$$

3. Puisque $f(-\pi) = f(\pi) = 0$, f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est donc partout égale à sa série de Fourier et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = S_f(t)$$

4.

S_1 : on pose $t = 0$. On a alors

$$\pi^2 = f(0) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3} + 4S_1$$

d'où

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{4}\left(\pi^2 - \frac{2\pi^2}{3}\right) = \frac{\pi^2}{12}$$

S_2 : on pose $t = \pi$. Puisque $\cos(n\pi) = (-1)^n$, on a alors

$$0 = f(\pi) = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{((-1)^n)^2}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3} - 4S_2$$

d'où

$$S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}.\frac{2\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}$$

S_3 : d'après l'égalité de Parseval, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt &= \frac{a_0(f)^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(f)^2 + b_n(f)^2}{2} \\ &= \frac{4\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{16}{n^4} = \frac{4\pi^4}{9} + 8S_3\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left(\pi^2 - t^2\right)^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi^4 - 2\pi^2 t^2 + t^4)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\pi^4 t - \frac{2\pi^2 t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right]_0^\pi = \pi^4\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{8\pi^4}{15}\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{8\pi^4}{15} = \frac{4\pi^4}{9} + 8S_3 \iff S_3 = \frac{\pi^4}{8}\left(\frac{8}{15} - \frac{4}{9}\right) = \frac{\pi^4}{90}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Par définition, on a

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

2. Par définition,

$$\begin{aligned} F_0(p) &= \int_0^{+\infty} f_0(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{pt}dt \\ &= \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$F_{n+1}(p) = \int_0^{+\infty} f_n(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} t^{n+1}e^{-pt}dt$$

En posant alors

$$\left\{ \begin{array}{rclcrcl} u(t) & = & t^{n+1} & \Rightarrow & u'(t) & = & (n+1)t^n \\ v'(t) & = & e^{-pt} & \Rightarrow & v(t) & = & -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{array} \right.$$

on a

$$\begin{aligned} F_{n+1}(p) &= \cancel{\left[-\frac{t^{n+1}}{p}e^{-pt}\right]_0^{+\infty}} + \frac{n+1}{p}\int_0^{+\infty} t^n e^{-pt}dt \\ &= \frac{n+1}{p}F_n(p) \end{aligned}$$

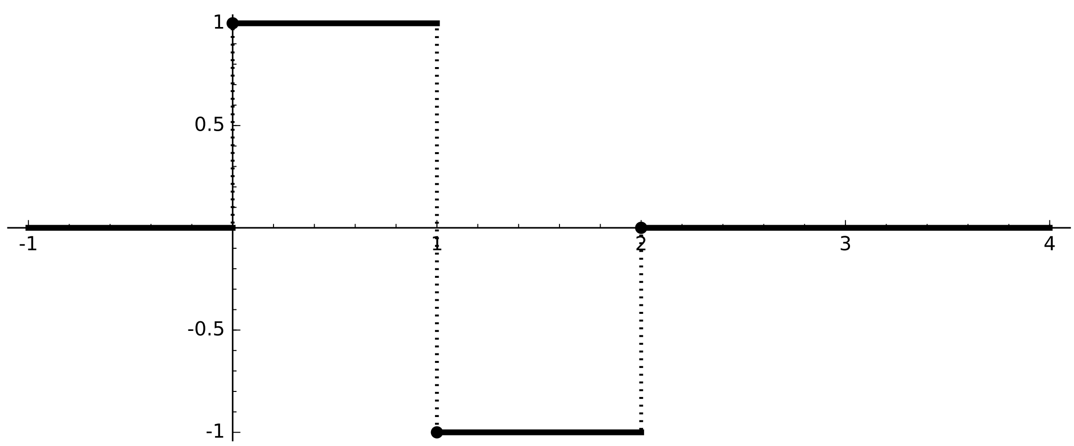
4. Par récurrence, on montre alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 :

1. (a) La courbe de f est constituée de quatre parties :
— si $t < 0$, $f(t) = 0$,
— si $0 \leqslant t < 1$, $f(t) = 1$,
— si $1 \leqslant t < 2$, $f(t) = 1 - 2 = -1$,
— si $t \geqslant 2$, $f(t) = 1 - 2 + 1 = 0$.
d'où



(b) À l'aide de la table des transformées de Laplace, on obtient

$$F(p) = \frac{1}{p} - 2\frac{e^{-p}}{p} + \frac{e^{-2p}}{p} = \frac{1}{p}\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right)$$

2. (a) En passant le problème (P) au filtre de Laplace, on obtient :

$$\begin{aligned}(P) \iff \mathcal{L}(y'+y) = \mathcal{L}(f)(p) \iff \mathcal{L}(y') + \mathcal{L}(y) = F(p) \iff pY + Y = F(p) \\ \iff Y(p) = \frac{1}{p+1}F(p) = \frac{1}{p(p+1)}\left(1 - 2e^{-p} + e^{-2p}\right)\end{aligned}$$

Or pour tout $p \notin \{0, -1\}$, on a $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$. En développant et recombinant les termes de la somme obtenue, on obtient l'égalité cherchée.

(b) D'après la table des transformées de Laplace, la transformée inverse de la fonction $p \mapsto \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$ est donnée par

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightsquigarrow} H(t) - e^{-t}.H(t) = (1 - e^{-t}).H(t)$$

D'après la formule du retard, on a alors

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)e^{-p} \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightsquigarrow} (1 - e^{-t+1}).H(t-1)$$

et

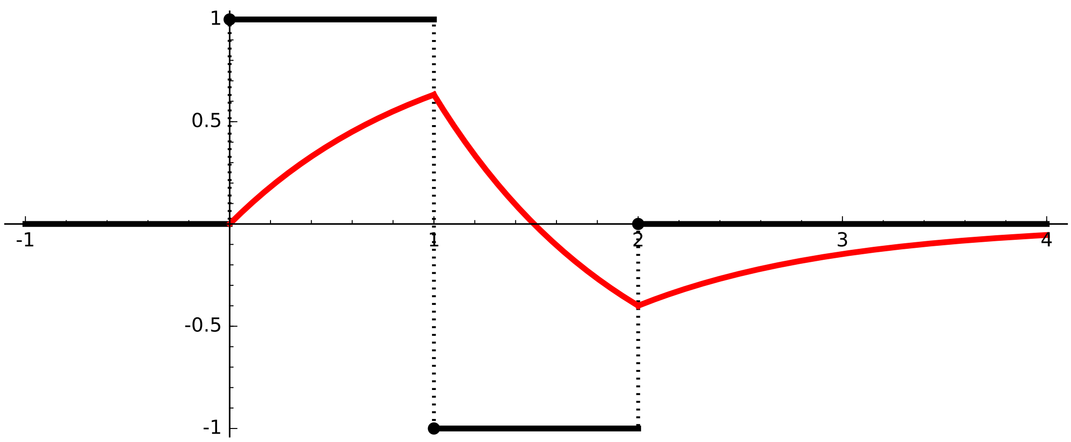
$$\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right)e^{-2p} \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightsquigarrow} (1 - e^{-t+2}).H(t-2)$$

Ainsi,

$$y(t) = (1 - e^{-t}).H(t) - 2(1 - e^{-t+1}).H(t-1) + (1 - e^{-t+2}).H(t-2)$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 - e^{-t} & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ e^{-t}(2e - 1) - 1 & \text{si} \quad 1 \leqslant t < 2 \\ -e^{-t}(e-1)^2 & \text{si} \quad t \geqslant 2 \end{cases}$$

(c) On obtient



⋆ ⋆
⋆