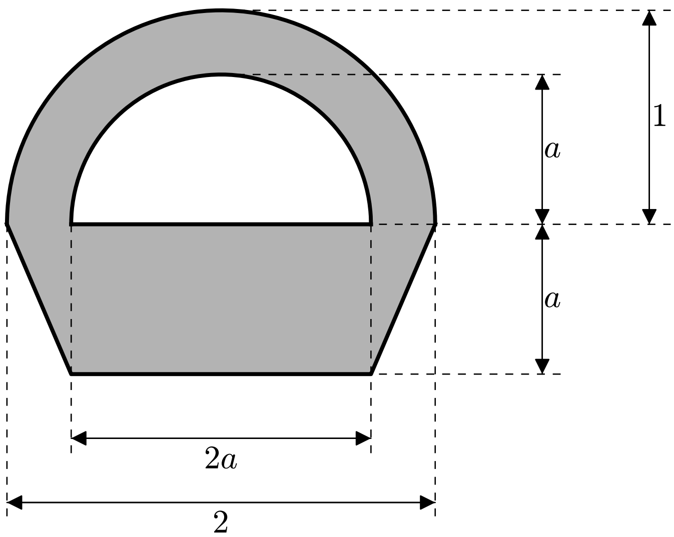
CONTRÔLE CONTINU

Compléments d'intégration

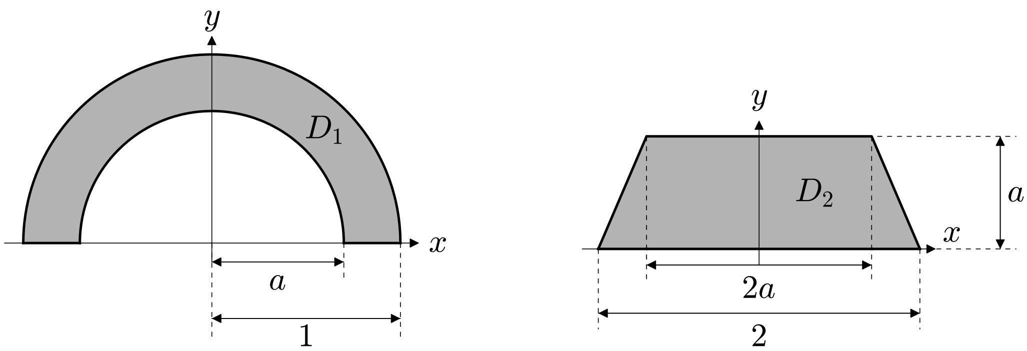
Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 On souhaite déterminer la position du centre de gravité de la pièce ci-dessous :



où $a \in [0,1[$ est un paramètre fixé. Pour cela, on étudie séparément les deux domaines D_1 et D_2 ci-dessous, placés chacun dans un repère adapté $\mathcal{R}_i$, $i = 1, 2$.



1. *Étude de D_1*
   (a) Donner par un calcul élémentaire l'aire du domaine de D_1.
   (b) Donner une description du domaine D_1 à l'aide des coordonnées polaires associées au repère $\mathcal{R}_1$.

(c) Déterminer les coordonnées cartésiennes dans $\mathcal{R}_1$ du centre de gravité G_1 de D_1 (on pourra éviter certains calculs d'intégrale par des arguments de symétrie).

2. *Étude de* D_2
   (a) Donner par un calcul élémentaire l'aire du domaine D_2.
   (b) Donner une description du domaine D_2 à l'aide des coordonnées cartésiennes associées au repère $\mathcal{R}_2$.
   (c) Déterminer les coordonnées cartésiennes dans $\mathcal{R}_2$ du centre de gravité G_2 de D_2.
3. Déduire des calculs ci-dessus la position du centre de gravité G de la pièce complète.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathcal{O}xyz)$. Pour $h > 0$ fixé, on note $\mathcal{C}_h$ le demi-cône renversé d'équation

$$x^2 + y^2 = \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2$$

et limité par les plans P_0 et P_h d'équations respectives $z = 0$ et $z = h$.

1. Décrire l'intersection de $\mathcal{C}_h$ avec les plans P_0 puis P_h.
2. Montrer que pour $z_0 \in [0, h]$ fixé, l'intersection de $\mathcal{C}_h$ avec le plan P_{z_0} d'équation $z = z_0$ est un cercle dont on précisera le rayon $R(z_0)$.
3. Tracer une esquisse de $\mathcal{C}_h$.
4. À l'aide des coordonnées cylindriques, donner une description de $\mathcal{C}_h$ sous la forme
$$\mathcal{C}_h = \{(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ \varphi_1(z) \leqslant r \leqslant \varphi_2(z),\ a \leqslant \theta \leqslant b,\ c \leqslant z \leqslant d\}$$
où $a,\ b,\ c,\ d$ sont des constantes à déterminer et φ_1 et φ_2 sont des fonctions de z à déterminer.
5. En déduire le volume du cône $\mathcal{C}_h$.
6. Déterminer le moment d'inertie de $\mathcal{C}_h$ par rapport à l'axe $(\mathcal{O}z)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 On considère une ellipse $\mathcal{E}$ de dimensions $a > b > 0$ placée dans un repère $\mathcal{R}$ orthonormé du plan tel que le centre de $\mathcal{R}$ correspond à l'un des foyers de $\mathcal{E}$ et l'axe des abscisses de $\mathcal{R}$ est aligné avec l'axe focal de $\mathcal{E}$.

On admet qu'une paramétrisation de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{R}$ est donnée par $\gamma\, :\, t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ où

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \sqrt{a^2 - b^2} + a\cos t \\ y(t) & = & b\sin t \end{array}\right. \quad , \qquad t \in [0, 2\pi]$$

1. À l'aide de la formule de Green-Riemann et du champ de vecteurs $\overrightarrow{F}(x, y) = (-y, 0)$, calculer l'aire de l'ellipse $\mathcal{E}$.
2. (a) Montrer que les sommets principaux de $\mathcal{E}$ sont $S_1 = M(0)$ et $S_2 = M(\pi)$ de $\mathcal{E}$.
   (b) Déterminer les coordonnées du centre Ω de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{R}$.
   (c) Montrer que les sommets secondaires de $\mathcal{E}$ sont $S_3 = M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $S_4 = M\left(\frac{3\pi}{2}\right)$.
   (d) Calculer l'aire balayée par le segment $[OM]$ lorsque M se déplace de S_1 à S_3 le long de $\mathcal{E}$.
   Indication : on pourra commencer par dessiner le domaine à mesurer puis on déterminera un ensemble de paramétrisations permettant de décrire le contour de ce domaine. On pourra ensuite appliquer une fois encore la formule de Green-Riemann.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. (a) D_1 est construit à partir de deux cercles concentriques de rayons respectifs 1 et a. Donc

$$\mathcal{A}_{D_1} = \pi.1^2 - \pi.a^2 = \pi(1-a^2)$$

(b) $D_1 = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \ / \ a \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\right\}$

(c) Le domaine D_1 étant symétrique par rapport à l'axe (Oy), son centre de gravité $G_1 = (x_{G_1}, y_{G_1})$ vérifie $\boxed{x_{G_1} = 0}$.

D'autre part, l'ordonnée y_{G_1} de G_1 est définie par $y_{G_1} = \dfrac{\displaystyle\iint_{D_1} ydS}{\displaystyle\iint_{D_1} dS} = \dfrac{2}{\pi(1-a^2)} \displaystyle\iint_{D_1} ydS.$

En coordonnées polaires, on a

$$y = r\sin(\theta) \qquad \text{et} \qquad dS = rdrd\theta$$

Ainsi, d'après la description de D_1 donnée ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}\iint_{D_1} ydS &= \int_0^\pi \int_a^1 r^2 \sin\theta dr d\theta = \left(\int_a^1 r^2 dr\right)\left(\int_0^\pi \sin\theta d\theta\right) \\ &= \left[\frac{r^3}{3}\right]_a^1 . [-\cos(\theta)]_0^\pi = \frac{2}{3}(1-a^3)\end{aligned}$$

et

$$y_{G_1} = \frac{2}{\pi(1-a^2)}.\frac{2}{3}(1-a^3) = \boxed{\frac{4}{3\pi}.\frac{1+a+a^2}{1+a}}$$

2. (a) D_2 est un trapèze de petite base $b = 2a$, de grande base $B = 2$ et de hauteur $h = a$. Donc

$$\mathcal{A}_{D_2} = \frac{(b+B).h}{2} = \frac{(2a+2).a}{2} = a(a+1)$$

(b) Pour éviter un découpage du domaine D_2, on propose une description dans laquelle la variable y est encadrée par des constantes : $0 \leqslant y \leqslant a$.
Pour encadrer x, il faut alors déterminer les équations des cotés non parallèles du trapèze. Or le segment de gauche passe par les points $(-1,0)$ et $(-a,a)$. Il est donc porté par la droite Δ_1 d'équation

$$\Delta_1 \ : \ y = \frac{a}{1-a}(x+1) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1-a}{a}y - 1$$

De même, le segment de gauche passe par les points $(1,0)$ et (a,a). Il est donc porté par la droite Δ_2 d'équation

$$\Delta_2 \ : \ y = \frac{a}{a-1}(x-1) \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{a-1}{a}y + 1$$

D'où

$$D_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leqslant y \leqslant a, \quad \frac{1-a}{a}y - 1 \leqslant x \leqslant \frac{a-1}{a}y + 1\right\}$$

(c) Par symétrie, on a encore $\boxed{x_{G_2} = 0}$.
D'autre part,

$$y_{G_2} = \frac{\displaystyle\iint_{D_2} ydS}{\displaystyle\iint_{D_2} dS} = \frac{1}{a(a+1)} \iint_{D_2} ydS$$

En coordonnées cartésiennes, on a $dS = dxdy$ d'où

$$\begin{aligned}\iint_{D_2} ydS &= \int_0^a \left(\int_{\frac{1-a}{a}y-1}^{\frac{a-1}{a}y+1} ydx \right) dy = \int_0^a y\left(2\frac{a-1}{a}y+2\right) dy \\ &= 2\int_0^a \left(\frac{a-1}{a}y^2+y\right) dy = 2\left[\frac{a-1}{a}.\frac{y^3}{3}+\frac{y^2}{2}\right]_0^a \\ &= 2\left(\frac{a-1}{3}+\frac{1}{2}\right)a^2 = \frac{(2a+1)a^2}{3}\end{aligned}$$

et

$$y_{G_2} = \frac{1}{a(a+1)}.\frac{(2a+1)a^2}{3} = \frac{(2a+1)a}{3(a+1)}$$

3. Par symétrie, le centre de gravité G de la pièce complète est situé sur l'axe des ordonnées. Ainsi, $x_G = 0$. Par ailleurs, l'ordonnée y_G de G est obtenu par une moyenne des ordonnées y_{G_1} et y_{G_2}, pondérée par les surfaces $\mathcal{A}_{D_1}$ et $\mathcal{A}_{D_2}$. Attention, dans la pièce complète, le domaine D_2 est situé dans le demi-plan $\{y \leqslant 0\}$. L'ordonnée du point G_2 est donc ici $-y_{G_2}$:

$$\begin{aligned}y_G &= \frac{\mathcal{A}_{D_1}y_{G_1} - \mathcal{A}_{D_2}y_{G_2}}{\mathcal{A}_{D_1}+\mathcal{A}_{D_2}} = \frac{\frac{2}{3}(1-a^3) - \frac{(2a+1)a^2}{3}}{\frac{\pi}{2}(1-a^2)+a(a+1)} \\ &= \frac{\frac{2}{3}-\frac{4}{3}a^3-\frac{1}{3}a^2}{\frac{\pi}{2}+(1-\frac{\pi}{2})a^2+a} = -\frac{2}{3}.\frac{4a^3+a^2-2}{(2-\pi)a^2+2a+\pi}\end{aligned}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1.
   - L'intersection du cône $\mathcal{C}_h$ avec le plan P_0 est la courbe du plan $(x\mathcal{O}y)$ d'équation $x^2+y^2=1$. On reconnaît ici le cercle unité.
   - L'intersection du cône $\mathcal{C}_h$ avec le plan P_h est décrit par l'équation $x^2+y^2=0$. Il s'agit donc du point de coordonnées $(0,0,h)$.
2. En fixant $z = z_0$, l'équation de $\mathcal{C}_h$ devient $x^2+y^2 = \left(1-\frac{z_0}{h}\right)^2$. On reconnaît ici un cercle de centre $(0,0,z_0)$ et de rayon $R(z_0) = 1-\frac{z_0}{h}$ contenu dans le plan P_{z_0}.
3.
4. D'après l'étude effectuée à la première question, on peut voir $\mathcal{C}_h$ comme un empilement de disques horizontaux centrés sur l'axe $(\mathcal{O}z)$ et dont le rayon dépend de la hauteur z. Pour obtenir un point (r,θ,z) de $\mathcal{C}_h$, on peut donc fixer arbitrairement $z \in [0,h]$ et $\theta \in [0,2\pi]$. Mais à z fixé, le rayon r doit vérifier

$$0 \leqslant r \leqslant R(z) = \left(1-\frac{z}{h}\right)$$

   D'où

$$\mathcal{C}_h = \left\{(r,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 0 \leqslant z \leqslant h,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant r \leqslant 1-\frac{z}{h}\right\}$$

5. Le volume du cône est

$$V_{\mathcal{C}_h} = \iiint_{\mathcal{C}_h} dV$$

   Or en coordonnées cylindriques, on a $dS = rdrd\theta dz$. D'où

$$\begin{aligned}V_{\mathcal{C}_h} &= \int_0^h \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-\frac{z}{h}} rdr \right) d\theta \right) dz \\ &= 2\pi \int_0^h \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1-\frac{z}{h}} dz = \pi \int_0^h \left(1-\frac{z}{h}\right)^2 dz \\ &= \pi\left[-\frac{h}{3}\left(1-\frac{z}{h}\right)^3\right]_0^h = \frac{\pi h}{3}\end{aligned}$$

6. Par définition du moment d'inertie, on a

$$I_{(\mathcal{O}z)} = \iiint_{\mathcal{C}_h} d(M,(\mathcal{O}z))^2 dV$$

Or pour tout point $M = (r,\theta,z) \in \mathcal{C}_h$, on a $d(M,(\mathcal{O}z)) = r$. Donc

$$\begin{aligned} I_{(\mathcal{O}z)} &= \iiint_{\mathcal{C}_h} r^2.rdrd\theta dz = \int_0^h \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{1-\frac{z}{h}} r^3 dr \right) d\theta \right) dz \\ &= 2\pi \int_0^h \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{1-\frac{z}{h}} dz = \frac{\pi}{2} \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^4 dz \\ &= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{h}{5} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^5 \right]_0^h = \frac{\pi h}{10} \end{aligned}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. L'aire de l'ellipse est par définition

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}} = \iint_{\mathcal{E}} dS$$

Donc d'après la formule de Green-Riemann, si $\overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (-y, 0)$, on a $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ et

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}} = \oint_{\mathcal{E}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\oint_{\mathcal{E}} ydx$$

Par ailleurs, étant donnée la paramétrisation ci-dessus, on a

$$x(t) = \sqrt{a^2 - b^2} + a\cos(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = -a\sin(t)$$

et $y(t) = b\sin(t)$. D'où

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}} = -\int_0^{2\pi} b\sin(t).(-a\sin(t))dt = ab\int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt = ab\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \pi ab$$

2. (a) Par définition, les sommets principaux de $\mathcal{E}$ sont les points de $\mathcal{E}$ situés sur son axe focal. Or cet axe est l'axe (Ox) et les points $M(0)$ et $M(\pi)$ ayant pour coordonnées respectives

$$M(0) = (\sqrt{a^2 - b^2} - a, 0) \qquad \text{et} \qquad M(\pi) = (\sqrt{a^2 - b^2} + a, 0)$$

sont bien situés sur cet axe focal.

(b) Le centre Ω de $\mathcal{C}_h$ est le milieu du segment $[S_1S_2]$. Il s'agit donc du point de coordonnées

$$\Omega = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$$

(c) Les sommets secondaires de $\mathcal{E}$ sont les points situés sur le second axe de symétrie de $\mathcal{E}$. Or d'après le calcul précédent, ce second axe est la droite verticale d'équation $x = \sqrt{a^2 - b^2}$. En calculant les coordonnées des points $M(\frac{\pi}{2})$ et $M(\frac{3\pi}{2})$, on vérifie aisément que ces deux points appartiennent bien à cet axe.

(d) On utilise une fois de plus la formule de Green-Riemann pour calculer l'aire du domaine considéré. Il faut pour cela une paramétrisation du contour de ce domaine. On peut découper ce contour en trois morceaux : le segment $[OS_1]$, l'arc $\widehat{S_1S_3}$ et le segment $[OS_3]$.
On détermine alors une paramétrisation pour chacun de ces morceaux :

- Le segment $[OS_1]$ est situé sur l'axe (Ox). Il est donc paramétré par

$$\begin{array}{rcccc} \gamma_1 & : & [0, a+\sqrt{a^2-b^2}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (t,0) \end{array}$$

- L'arc $\widehat{S_1S_3}$ est paramétré par une restriction de la paramétrisation γ à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{array}{rcccc} \gamma_2 & : & [0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (\sqrt{a^2-b^2}+a\cos(t), b\sin(t)) \end{array}$$

- Le segment $[OS_3]$ est porté par la droite passant par $O=(0,0)$ et $S_3=(\sqrt{a^2-b^2}, b)$ dont une équation est

$$y = \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}x}$$

  Une paramétrisation de ce segment est donc

$$\begin{array}{rcccc} \tilde{\gamma}_3 & : & [0, \sqrt{a^2-b^2}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (t, \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}t) \end{array}$$

  ou encore

$$\begin{array}{rcccc} \gamma_3 & : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (\sqrt{a^2-b^2}.t, b.t) \end{array}$$

  Note : les deux paramétrisations du segment $[OS_3]$ vont de O vers S_3 il faudra donc les <u>soustraire</u> dans la relation de Chasles.

On peut alors exprimer l'aire du domaine étudié à l'aide d'une somme d'intégrales curvilignes :

$$\mathcal{A}_D = \oint_{\partial dD} -ydx = \underbrace{\int_{[OS_1]} -ydx}_{I_1} + \underbrace{\int_{\widehat{S_1S_3}} -ydx}_{I_2} - \underbrace{\int_{[OS_3]} -ydx}_{I_3}$$

Or

- D'après γ_1, on a $y_1(t)=0$. Donc $I_1=0$.

- D'après γ_2, on a $x_2(t)=\sqrt{a^2-b^2}+a\cos(t)$ donc $x_2'(t)=-a\sin(t)$ et $y_2(t)=b\sin(t)$. Donc

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -b\sin(t).(-a\sin(t))dt = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)dt \\ &= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(2t)}{2}dt = \frac{\pi ab}{4} \end{aligned}$$

- D'après γ_3, on a $x_3(t)=\sqrt{a^2-b^2}t$ donc $x_3'(t)=\sqrt{a^2-b^2}$ et $y_3(t)=bt$. D'où

$$I_3 = \int_0^1 -bt.\sqrt{a^2-b^2}dt = -\frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{2}$$

Et finalement,

$$\mathcal{A}_D = \frac{\pi ab}{4} + \frac{b\sqrt{a^2-b^2}}{2}$$

⋆ ⋆
⋆