CONTRÔLE CONTINU

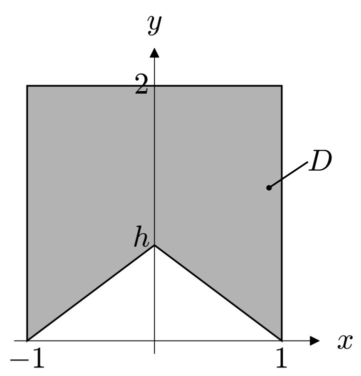
Compléments d'intégration

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1

On fixe une constante $0 \leqslant h \leqslant 2$ et, dans le plan muni d'un repère orthonormé, on considère le domaine D représenté ci-contre.



1. Donner par un argument géométrique l'aire du domaine D.
2. Déterminer en fonction de h les coordonnées du centre d'inertie G de D. On pourra avancer des arguments géométriques pour s'affranchir de certains calculs.
3. Pour quelle(s) valeurs de h le point G est-il à l'extérieur de D ?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$ dans lequel on note (x, y, z) les coordonnées cartésiennes. On note $\mathcal{E}$ le demi-ellipsoïde (plein) de l'espace dont une équation dans $\mathcal{R}$ est

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \leqslant 1, \qquad z \geqslant 0$$

Par ailleurs, on considère le changement de variables $(x, y, z) \rightsquigarrow (r, \theta, \varphi)$ défini par le champ de vecteur

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (r, t, s) & \longmapsto & (r\cos(t)\sin(s), r\sin(t)\sin(s), 2r\cos(s)) \end{array}$$

1. Déterminer le jacobien $\mathrm{Jac}(\Phi)(r, t, s)$ du champ de vecteurs Φ et en déduire l'élément de volume dV en fonction des variables (r, t, s).
2. Décrire le domaine $\mathcal{E}$ à l'aide des coordonnées (r, t, s) et en déduire la mesure du volume de $\mathcal{E}$.
3. On note maintenant (ρ, θ, z) les coordonnées cylindriques dans le repère $\mathcal{R}$.

(a) Donner une description de $\mathcal{E}$ à l'aide des coordonnées (ρ, θ, z).

(b) Déterminer le moment d'inertie de $\mathcal{E}$ par rapport à l'axe (Oz).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 On considère un phare de hauteur 50m et de rayon 2m.

Il peut être modélisé par la partie du cylindre d'équation

$$x^2 + y^2 = 4$$

située entre les altitudes $z = 0$ et $z = 50$.

L'objectif est ici de déterminer la longueur de l'escalier permettant de rallier le sommet du phare. Cet escalier est assimilé à une spirale dont une paramétrisation est

$$\begin{array}{cccc} G & : & [0,50] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & & t & \longmapsto & (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

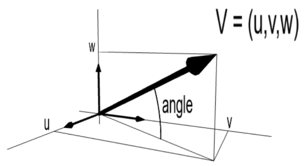
où

$$x(t) = 2\cos\left(\frac{t}{2a}\right), \quad y(t) = 2\sin\left(\frac{t}{2a}\right), \quad z(t) = t$$

le paramètre $a > 0$ permettant de régler la pente de cette spirale.

1. Déterminer un vecteur tangent à la spirale au point de coordonnées $(x(t), y(t), z(t))$.

2. Montrer que le paramètre a correspond exactement à la pente de l'escalier. On pourra s'appuyer sur le schéma ci-contre.



3. À l'aide d'une intégrale curviligne, calculer la longueur de l'escalier en fonction de a.

4. Déterminer le travail de la force gravitationnelle appliquée à un point montant jusqu'en haut du phare. On modélise la force gravitationnelle par un champ de vecteur de la forme

$$\begin{array}{cccc} \Phi & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & (0,0,-g) \end{array}$$

où $g = 10\ m.s^{-2}$.

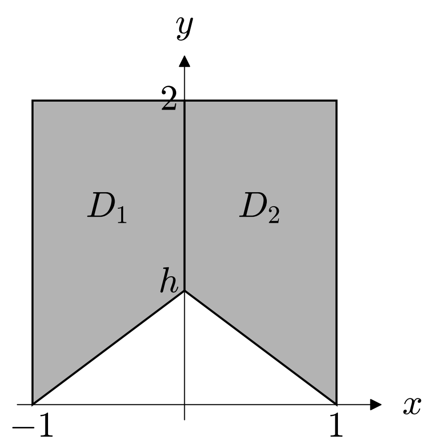
⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. Le domaine D correspond à un carré de coté 2 dans lequel on a retiré deux triangles rectangles de petits côtés 1 et h. Donc
$$\mathcal{A}(D) = 4 - 2.\frac{1 \times h}{2} = 4 - h$$

2. Le domaine D est symétrique par rapport à l'axe (Oy). Son centre d'inertie G est donc sur cet axe et $x_G = 0$. Par ailleurs,
$$y_G = \frac{1}{\mathcal{A}(D)} \iint_D y dS$$
Étant donnée la forme du domaine D, on note D_1 et D_2 les partie ci-dessous :



On alors
$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ -1 \leqslant x \leqslant 0,\ h(x+1) \leqslant y \leqslant 2\}$$
$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ h(1-x) \leqslant y \leqslant 2\}$$
et
$$I = \iint_D y dS = \underbrace{\iint_{D_1} y dS}_{I_1} + \underbrace{\iint_{D_2} y dS}_{I_2}$$
Enfin,
$$\begin{aligned} I_1 = \int_{x=-1}^{0} \left(\int_{y=h(1+x)}^{2} y\, dy \right) dx \quad &= \quad \int_{-1}^{0} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{h(1+x)}^{2} dx \\ = \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} 4 - h^2(1+x)^2 dx \quad &= \quad \frac{1}{2} \left[4x - \frac{h^2}{3}(1+x)^3 \right]_{-1}^{0} \\ = \frac{1}{2} \left(-\frac{h^2}{3} + 4 \right) \quad &= \quad \frac{12 - h^2}{6} \end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
I_2 = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=h(1-x)}^{2} y\, dy \right) dx \quad &= \quad \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{h(1-x)}^{2} dx \\
= \frac{1}{2} \int_0^1 4 - h^2(1-x)^2 dx \quad &= \quad \frac{1}{2} \left[4x + \frac{h^2}{3}(1-x)^3 \right]_0^1 \\
= \frac{1}{2} \left(4 - \frac{h^2}{3} \right) \quad &= \quad \frac{12-h^2}{6}
\end{aligned}
$$

D'où

$$I = I_1 + I_2 = \frac{12-h^2}{3}$$

et

$$y_G = \frac{12-h^2}{12-3h}$$

3. Le point G est donc à l'extérieur de D si $y_G > h$. Or

$$
\begin{aligned}
y_G = h \iff & \frac{12-h^2}{12-3h} = h \\
\iff & 12 - h^2 = 12h - 3h^2 \\
\iff & 2h^2 - 12h + 12 = 0 \\
\iff & h^2 - 6h + 6 = 0
\end{aligned}
$$

On a ici $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 6 = 12$ et $h = \dfrac{6 \pm \sqrt{12}}{2} = 3 \pm \sqrt{3}$. Puisque $h \leqslant 2$, on a donc $h = 3 - \sqrt{3}$ et le centre d'inertie G de D est hors de D pour tout h tel que $3 - \sqrt{3} \leqslant h \leqslant 2$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. D'après les formules définissant le changement de variable, la matrice jacobienne de Φ est

$$\nabla\Phi(r,t,s) = \begin{pmatrix} \cos(t)\sin(s) & -r\sin(t)\sin(s) & r\cos(t)\cos(s) \\ \sin(t)\sin(s) & r\cos(t)\sin(s) & r\sin(t)\cos(s) \\ 2\cos(s) & 0 & -2r\sin(s) \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Jac}(\Phi)(r,t,s) =& \begin{vmatrix} \cos(t)\sin(s) & -r\sin(t)\sin(s) & r\cos(t)\cos(s) \\ \sin(t)\sin(s) & r\cos(t)\sin(s) & r\sin(t)\cos(s) \\ 2\cos(s) & 0 & -2r\sin(s) \end{vmatrix} \\
=& 2r^2\sin(s) \begin{vmatrix} \cos(t)\sin(s) & -\sin(t) & \cos(t)\cos(s) \\ \sin(t)\sin(s) & \cos(t) & \sin(t)\cos(s) \\ \cos(s) & 0 & -\sin(s) \end{vmatrix} \\
=& 2r^2\sin(s) \Bigg(\sin(t) \begin{vmatrix} \sin(t)\sin(s) & \sin(t)\cos(s) \\ \cos(s) & -\sin(s) \end{vmatrix} \\
& + \cos(t) \begin{vmatrix} \cos(t)\sin(s) & \cos(t)\cos(s) \\ \cos(s) & -\sin(s) \end{vmatrix} \Bigg) \\
=& 2r^2\sin(s) \big(\sin(t)(-\sin(t)\sin^2(s) - \sin(t)\cos^2(s)) \\
& + \cos(t)(-\cos(t)\sin^2(s) - \cos(t)\cos^2(s))\big) \\
=& 2r^2\sin(s) \big(-\sin^2(t) - \cos^2(t)\big) \\
=& -2r^2\sin(s)
\end{aligned}$$

L'élément de volume dV est alors

$$dV = |\mathrm{Jac}(\Phi)(r,t,s)| dr dt ds = 2r^2\sin(s) dr dt ds$$

2. En injectant les coordonnées (r,t,s) dans l'équation de $\mathcal{E}$ on obtient

$$\begin{aligned}
& (r\cos(t)\sin(s))^2 + (r\sin(t)\sin(s))^2 + \frac{(2r\cos(s))^2}{4} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 2r\cos(s) \geqslant 0 \\
\iff & r^2 \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \cos(s) \geqslant 0 \\
\iff & 0 \leqslant r \leqslant 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{E} = \left\{(r,t,s) \in \mathbb{R}^3 \;/\; 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(\mathcal{E}) &= \iiint_{\mathcal{E}} dV \\
&= \int_{r=0}^{1} \left(\int_{t=0}^{2\pi} \left(\int_{s=0}^{\frac{\pi}{2}} 2r^2\sin(s) ds \right) dt \right) dr \\
&= 2 \left(\int_0^1 r^2 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} dt \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(s) ds \right) \\
&= 2 \times \frac{1}{3} \times 2\pi \times [-\cos(s)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

3. (a) On commence par exprimer les coordonnées cartésiennes (x, y, z) en fonction des coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

On a alors

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \leqslant 1 \iff r^2 + \frac{z^2}{4} \leqslant 1 \iff 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{1 - \frac{z^2}{4}}$$

D'où

$$\mathcal{E} = \left\{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{1 - \frac{z^2}{4}},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant z \leqslant 2 \right\}$$

Par ailleurs, la distance entre un point M de l'espace de coordonnées cylindriques (r, θ, z) à l'axe (Oz) est par définition la coordonnée radiale r et l'élément de volume dV vérifie $dV = rdrd\theta dz$. D'où

$$\begin{aligned}
I_{(Oz)} &= \iiint_{\mathcal{E}} d(M, (Oz))^2 dV \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{z=0}^{2} \left(\int_{r=0}^{\sqrt{1-\frac{z^2}{4}}} r^3 dr \right) dz \right) d\theta \\
&= 2\pi \int_0^2 \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{1-\frac{z^2}{4}}} dz \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^2 \left(1 - \frac{z^2}{4} \right)^2 dz \\
&= \frac{\pi}{2} \int_0^2 \left(1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{16} \right) dz \\
&= \frac{\pi}{2} \left[z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{80} \right]_0^2 \\
&= \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} \right) \\
&= \frac{\pi}{30}
\end{aligned}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Un vecteur tangent à la spirale en un point $(x(t), y(t), z(t))$ est

$$\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = \left(-\frac{1}{a} \sin\left(\frac{t}{2a}\right), \frac{1}{a} \cos\left(\frac{t}{2a}\right), 1 \right)$$

2. La pente de ce vecteur est

$$p = \frac{z'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}\sin^2\left(\frac{t}{2a}\right) + \frac{1}{a^2}\cos^2\left(\frac{t}{2a}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}}} = a$$

3. La longueur de l'escalier est

$$L(\text{esc}) = \int_{\text{esc}} ||\overrightarrow{d\ell}||$$

où

$$\overrightarrow{d\ell} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{a}\sin\left(\frac{t}{2a}\right) \\ \\ \frac{1}{a}\cos\left(\frac{t}{2a}\right) \\ \\ 1 \end{pmatrix}$$

D'où

$$||\overrightarrow{d\ell}|| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{\frac{1}{a^2} + 1} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$$

et

$$L(\text{esc}) = \int_0^{50} \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} dt = 50\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}$$

4. Le travail de la force gravitationnelle correspond à la circulation du champ de vecteurs Φ le long de l'escalier :

$$\begin{aligned} W &= \int_{\text{esc}} \Phi(M) \cdot \overrightarrow{d\ell} \\ &= \int_0^{50} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{50} -g dt \\ &= -50g \end{aligned}$$

⋆ ⋆
⋆