CONTRÔLE CONTINU

Fonctions de plusieurs variables.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 1. *Une étude préliminaire*

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = x^2 + \ln(x)$. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

2. Soit f la fonction de variables (x, y) définie par

$$f(x, y) = xe^y + y\ln(x)$$

(a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

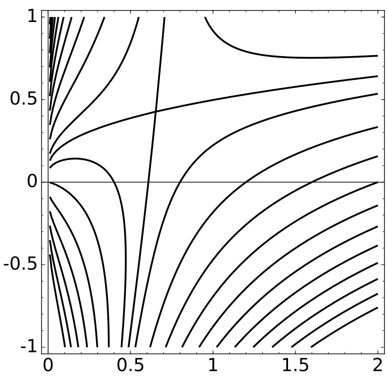
(b) Calculer les dérivées partielles de f.

(c) Montrer que f admet pour unique point critique le point $P_0 = (\alpha, \ln(\alpha))$ où α est la constante déterminée à la question 1.

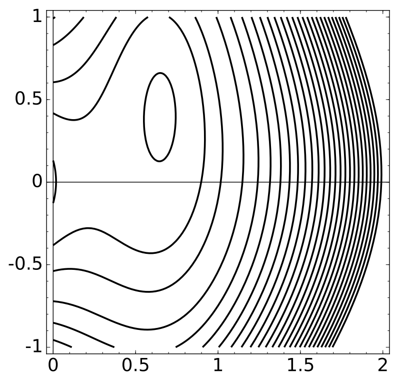
(d) Montrer que P_0 est un point selle.

(e) Parmi les cartes topographiques ci-dessous, laquelle représente la fonction f ? (Justifier).

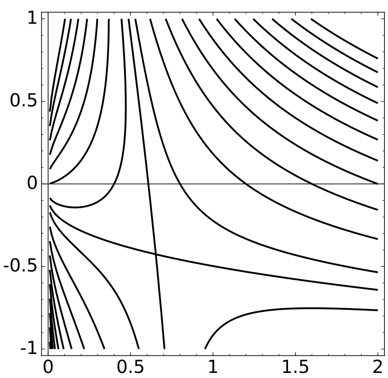
I



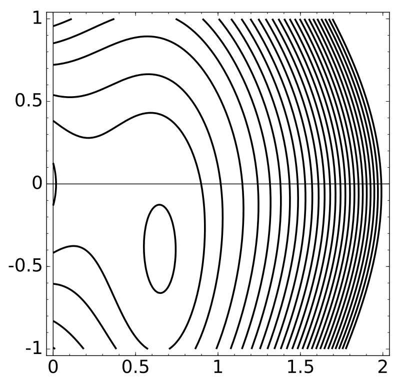
II



III



IV



$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 2 Soit
$$f\ :\ (x,y,z) \longmapsto x\ln(y) + z\ln(x) - y$$

1. Déterminer le domaine de défintion de f.
2. Calculer les dérivées partielles de f.
3. Montrer que f admet pour unique point critique le point $P_0 = (1,1,0)$.
4. À l'aide du changement de variable
$$\begin{cases} x &= 1+h \\ y &= 1+k \\ z &= \ell \end{cases}$$
déterminer le développement limité de f à l'ordre 2 en P_0. On rappelle qu'au voisinage de 0, on a
$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$
5. En déduire la matrice hessienne H_0 de f en P_0.
6. Un opérateur de calcul numérique permet d'obtenir des valeurs propres approchées :
$$\lambda_1 \approx -1.80, \qquad \lambda_2 \approx -0.45, \qquad \lambda_3 \approx 1.25$$
En déduire la nature du point critique P_0.

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 3 On souhaite déterminer l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et solutions de l'équation aux dérivées partielles ci-dessous :
$$(E)\ :\ x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2y^2$$
Pour cela, on considère le changement de variables en coordonnées polaires $(x,y) \rightsquigarrow (r,\theta)$ défini par
$$\begin{cases} x(r,\theta) &= r\cos(\theta) \\ y(r,\theta) &= r\sin(\theta) \end{cases}, \qquad r>0,\ \ \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

1. Soient f une fonction de variables (x,y) définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $\tilde{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par
$$\tilde{f}(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$
   (a) Calculer $\dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial r}$ en fonction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
   (b) Montrer que si f est une solution de (E), alors $\tilde{f}$ est solution de l'équation
$$(\tilde{E})\ :\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} = 2r$$
2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $(\tilde{E})$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

$\star\ \star$
$\star$

CORRECTION

Exercice 1 :

1. La fonction g vérifie $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx -0.44 < 0$ et $g(1) = 1 > 0$. Puisque g est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction g passe (au moins une fois) en 0 entre $\frac{1}{2}$ et 1. De plus, g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$$

La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est donc bijective et ne prend qu'une seule fois la valeur 0. L'équation $g(x) = 0$ admet donc une unique solution $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

2. (a) La quantité $f(x, y)$ est définie pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x > 0$. Le domaine de définition de f est donc $D_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

   (b) Les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^y + \frac{y}{x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^y + \ln(x)$$

   (c) Le point $P = (x, y) \in D_f$ est un point critique de f si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = & 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} e^y + \dfrac{y}{x} & = & 0 \\ \\ xe^y + \ln(x) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} e^y & = & -\dfrac{y}{x} \\ \\ y & = & \ln(x) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\dfrac{\ln(x)}{x} \\ \\ y & = & \ln(x) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lcl} g(x) & = & 0 \\ y & = & \ln(x) \end{array}\right.$$

   D'après la question 1, le point $P = (x, y) \in D_f$ est un point critique de f si et seulement

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \alpha \\ y & = & \ln(\alpha) \end{array}\right.$$

   (d) Les dérivées partielles secondes de f sont

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & = & -\dfrac{y}{x^2} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & = & e^y + \dfrac{1}{x} \\ \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) & = & xe^y \end{array}\right.$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{lllll} r & = & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\alpha, \ln(\alpha)) & = & -\dfrac{\ln(\alpha)}{\alpha^2} \\ s & = & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\alpha, \ln(\alpha)) & = & \alpha + \dfrac{1}{\alpha} \\ t & = & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\alpha, \ln(\alpha)) & = & \alpha^2 \end{array}\right.$$

Et

$$\Delta = rt - s^2 = -\ln(\alpha) - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 = \underbrace{-\ln(\alpha) - \alpha^2}_{=-g(\alpha)=0} -2 - \frac{1}{\alpha^2}$$

Donc $\Delta = -2 - \frac{1}{\alpha^2} < 0$ et $P = (\alpha, \ln(\alpha))$ est bien un point selle.

(e) Les seules cartes représentant des points selles sont les cartes I et III. Par ailleurs, si $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, alors l'ordonnée $\ln(\alpha)$ de P est négative. Donc la bonne carte est la carte III.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. La fonction f est définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x > 0$ et $y > 0$. Donc $D_f = (\mathbb{R}_+^*)^2 \times \mathbb{R}$.
2. Les dérivées partielles de f sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \ln(y) + \frac{z}{x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{x}{y} - 1$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \ln(x)$$

3. Les points critiques de f sont les solutions du système

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} \ln(y) + \dfrac{z}{x} & = & 0 \\ \dfrac{x}{y} - 1 & = & 0 \\ \ln(x) & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lllll} z & = & 0 & & \\ y & = & x & = & 1 \\ x & = & 1 & & \end{array}\right.$$

On obtient bien le point $P_0 = (1, 1, 0)$ comme unique point fixe de f.

4. À l'aide du changement de variables donné, on a

$$\begin{aligned} f(1+h, 1+k, \ell) &= (1+h)\ln(1+k) + \ell \ln(1+h) - (1+k) \\ &= (1+h)\left(k - \frac{k^2}{2} + o(k^2)\right) + \ell\left(h - \frac{h^2}{2} + o(h^2)\right) - 1 - k \\ &= \cancel{k} - \frac{k^2}{2} + hk + \ell h - 1 - \cancel{k} + o(h^2 + k^2 + \ell^2) \\ &= -1 + \frac{1}{2}\left(2hk + 2h\ell - k^2\right) + o(h^2 + k^2 + \ell^2) \end{aligned}$$

5. D'après le calcul ci-dessus, on a

$$H_0 = H_f(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. D'après les résultats obtenus numériquement, la matrice H_0 possède deux valeurs propres négatives et une valeur propre positive. La signature de la forme quadratique associée à H_0 est donc $\sigma(H_0) = (2, 1)$ et le point P_0 est un point selle.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. (a) D'après les formules de dérivation des fonctions composées, puisque

$$\begin{cases} x(r,\theta) & = & r\cos(\theta) \\ y(r,\theta) & = & r\sin(\theta) \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ &= \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\end{aligned}$$

(b) En multipliant l'expression ci-dessus par r, on obtient

$$\begin{aligned} r\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) &= r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \\ &= x(r,\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + y(r,\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\end{aligned}$$

Ainsi, si f est une solution de (E), alors

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2 + 2y^2$$

donc pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, si $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, on a

$$r\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = 2(r\cos(\theta))^2 + 2(r\sin(\theta))^2 = 2r^2 \iff \boxed{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = 2r}$$

2. Pour résoudre l'équation $(\tilde{E})$, on intègre par rapport à la variable r :

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r}(r,\theta) = 2r \iff \tilde{f}(r,\theta) = r^2 + k(\theta)$$

pour tout fonction dérivable k d'une variable réelle.

3. Pour obtenir les solutions de l'équation (E), il faut inverser le changement de variables $(x,y) \rightsquigarrow (r,\theta)$. Or

$$\begin{cases} x & = & r\cos(\theta) \\ y & = & r\sin(\theta) \end{cases} \iff \begin{cases} r & = & \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta & = & \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

Les solutions de (E) sont donc toutes les fonctions de la forme

$$f : (x,y) \longmapsto x^2 + y^2 + k\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) = x^2 + y^2 + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

pour toute fonction dérivable φ d'une variable réelle.

⋆ ⋆
⋆