CONTRÔLE CONTINU

Fonctions de plusieurs variables.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

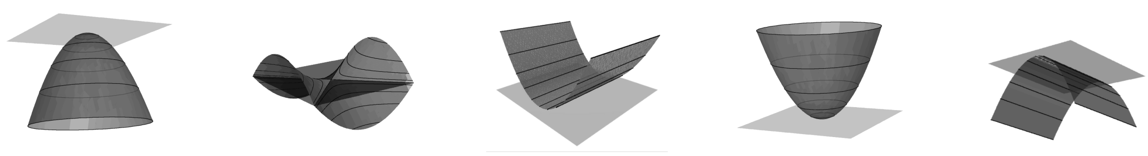
Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ et

$$f \,:\, (x, y) \longmapsto ax^2 + bxy + cy^2$$

1. Montrer que le point $P_0 = (0, 0)$ est un point critique de f.
2. À quelle condition sur a, b et c le point P_0 est-il <u>l'unique</u> point critique de f ? Justifier.
3. On suppose ici que $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$.
   Déterminer, en fonction de a, b et c la nature du point P_0.
4. On suppose ici que $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.
   (a) Montrer que l'ensemble des points critiques est une droite du plan (xOy) dont on donnera une équation.
   (b) Montrer qu'en chaque point de cette droite, la fonction f est nulle.
   (c) Montrer que tous les points critiques sont des extrema dont on précisera la nature. On pourra s'appuyer sur la forme canonique du polynôme $f(x, y)$.
5. Associer chacune des esquisses ci-dessous à l'un des cas mis en évidence au cours des questions précédentes.

I II III IV V



⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit

$$\begin{array}{rccc} f \;:\; & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \longmapsto & x^4 + 2y^2 + 3z^2 - yz - 23y + 4x - 5 \end{array}$$

1. Montrer que la fonction f admet le point $P = (-1, 6, 1)$ comme unique point critique et donner la valeur de f en ce point.
2. À l'aide du changement de variables

$$\begin{cases} x = -1 + u \\ y = 6 + v \\ z = 1 + w \end{cases}$$

   déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f en P ainsi que la matrice hessienne $H_f(P)$.
3. Déterminer le signe des valeurs propres de $H_f(P)$ et en déduire la nature du point P.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (x, y) & \longmapsto & \dfrac{x}{y} \end{array}$$

et sa surface $\mathcal{S}_f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathcal{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer le gradient de f en chaque point $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ de son domaine.
3. Tracer dans le repère ci-joint les gradients de f aux points suivants :

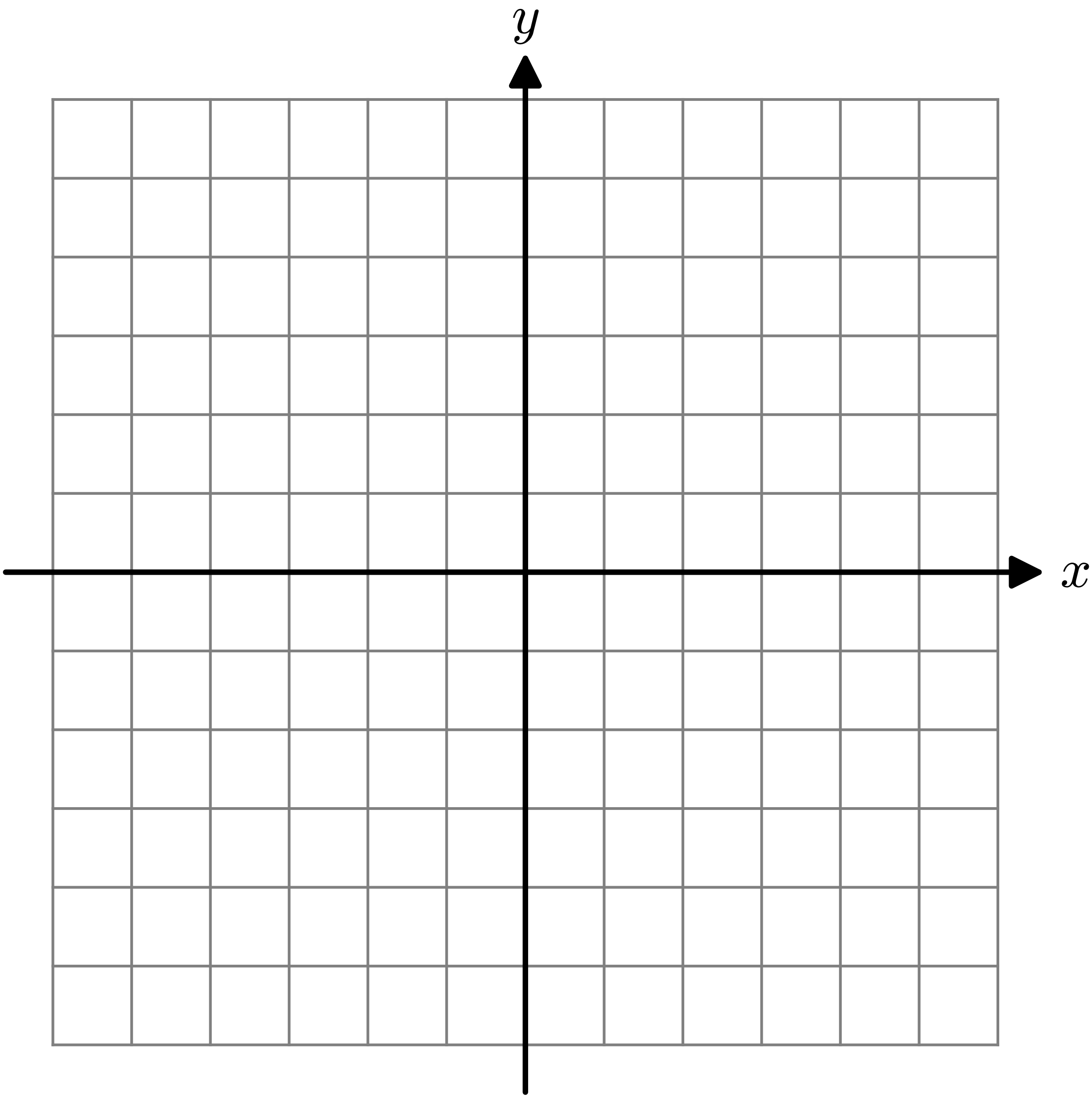
$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad P_5 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad P_6 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4. Montrer qu'en chaque point M du domaine, le vecteur $\nabla f(M)$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathcal{O}M}$. En déduire la nature des lignes de niveaux de f.
5. Déterminer et tracer dans le repère ci-joint les lignes de niveaux de f passant par les points donnés à la question 3. (On indiquera le niveau de chaque ligne).
6. Donner une équation de la ligne de niveau h de f pour $h \in \mathbb{R}$ quelconque.
7. Décrire succinctement l'allure de $\mathcal{S}_f$.

⋆ ⋆
⋆

Nom : .... Prénom : ....



CORRECTION

Exercice 1 :

1. Par définition, les points critiques sont les solutions du système

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0\\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0\end{array}\right.$$

Or

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\ =\ 2ax+by \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\ =\ bx+2cy$$

Donc

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{lcl}2ax+by & = & 0\\[2ex] bx+2cy & = & 0\end{array}\right.$$

On constate ici que le couple $(0,0)$ est bien une solution de (S). Le point P_0 est donc un point critique de f.

2. Le point P_0 est l'unique point critique de f si et seulement si le couple $(0,0)$ est l'unique solution du système (S). Or (S) est un système linéaire (homogène). Il admet donc $(0,0)$ comme unique solution si et seulement s'il est inversible. On peut donc étudier la matrice du système :

$$A=\begin{pmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{pmatrix}$$

Le système (S) est inversible si A est inversible, i.e. si $\det(A)=4ac-b^2$ est non nul.

3. Les dérivées partielles secondes de f sont

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=2a \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=b \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2c$$

donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=2a \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=b \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)=2c$$

et la matrice hessienne de f en P_0 est

$$H_f(P_0)=\begin{pmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{pmatrix}=A$$

<u>OU</u>

La fonction f est un polynôme de degré 2. Elle est donc égale à son développement limité à l'ordre 2 en 0. La matrice hessienne de f est P_0 est donc la matrice de la forme quadratique

$$q(x,y) = 2f(x,y) = 2ax^2 + 2bxy + 2cy^2$$

Et l'on retrouve la matrice A.

Dans tous les cas, la nature du point P_0 dépend donc du signe de $\det(H_f(P_0)) = 4ac - b^2 = -\Delta$. Précisément,

- Si $\Delta < 0$, les deux valeurs propres de $H_f(P_0)$ sont de même signe et P_0 est un extremum. Alors

  — si $a > 0$, P_0 est un minimum.
  — si $a < 0$, P_0 est un maximum.

- Si $\Delta > 0$, les deux valeurs propres de $H_f(P_0)$ sont de signes contraires et P_0 est un point selle.

4. (a) Si $\Delta = 0$, le système (S) est alors de rang 1. Il admet donc une droite de solution : la droite D d'équation

$$2ax + by = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{y = -\frac{2a}{b}y}$$

(b) En tout point $\left(x, -\frac{2a}{b}x\right) \in D$, on a

$$\begin{aligned}
f\left(x, -\frac{2a}{b}x\right) &= ax^2 + \cancel{b}x\left(-\frac{2a}{\cancel{b}}x\right) + c\left(-\frac{2a}{b}x\right)^2 \\
&= ax^2 - 2ax^2 + \frac{\cancel{4ac}}{\cancel{b^2}}.ax^2 && \text{car } b^2 = 4ac \\
&= -ax^2 + ax^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

(c) La mise sous forme canonique du polynôme $f(x,y)$ donne

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{c}{a}y^2\right) \\
&= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}y^2 + \frac{c}{a}y^2\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + \cancel{\frac{b^2 - 4ac}{4a}}y^2 && \text{car } b^2 - 4ac = 0 \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, $f(x,y)$ est toujours du signe de a. Les points de la droite D sont donc des maxima si $a<0$ et des minima si $a>0$.

5. • Les surfaces I, II et IV correspondent au cas $\Delta \neq 0$, la surface I correspondant au cas $(\Delta < 0,\ a < 0)$, la surface IV correspondant au cas $(\Delta < 0,\ a > 0)$ et la surface II correspondant au cas $\Delta > 0$.

   • Les surfaces III, et V correspondent au cas $\Delta = 0$, la surface III correspondant au cas $a > 0$ et la surface V correspondant au cas $a < 0$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. Les dérivées partielles de f sont

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 4x^3+4 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 4y-z-23 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y) & = & 6z-y \end{array}\right.$$

Les points critiques de f sont donc les solutions du système

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} 4x^3+4 & = & 0 \\ 4y-z & = & 23 \\ -y+6z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1 \\ 23z & = & 23 \\ y & = & 6z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1 \\ y & = & 6 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

f admet donc comme unique point critique le point $P=(-1,6,1)$. De plus,

$$\begin{aligned} f(P) = f(-1,6,1) &= (-1)^4 + 2.6^2 + 3.1^2 - 6.1 - 23.6 + 4.(-1) - 5 \\ &= 1 + 72 + 3 - 6 - 138 - 4 - 5 \\ &= -77 \end{aligned}$$

2. On obtient le développement limité de f à l'ordre 2 en P en conservant uniquement les termes de degrés $\leqslant 2$ dans l'expression développée de $f(-1+u, 6+v, 1+w)$:

$$\begin{aligned}
f(-1+u,6+v,1+w) &= (-1+u)^4 + 2(6+v)^2 + 3(1+w)^2 \\
&\quad - (6+v)(1+w) - 23(6+v) + 4(-1+u) - 5 \\
&= (1 - \cancel{4u} + 6u^2) + (72 + \cancel{24v} + v^2) + (3 + \cancel{6w} + 3w^2) \\
&\quad - (6 + \cancel{v} + \cancel{6w} + vw) - (138 + \cancel{23v}) + (\cancel{4u} - 4) - 5 + o(u^2+v^2+w^2) \\
&= -77 + 6u^2 + v^2 + 3w^2 - vw + o(u^2+v^2+w^2) \\
&= -77 + \frac{1}{2}\big(12u^2 + 2v^2 + 6w^2 - 2vw\big) + o(u^2+v^2+w^2)
\end{aligned}$$

La matrice hessienne de f en P est donc la matrice de la forme quadratique

$$q(u,v,w) = 12u^2 + 2v^2 + 6w^2 - 2vw$$

soit

$$H_f(P) = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

3. Les valeurs propres de $H_f(P)$ sont les racines du polynôme $\det(H_f(P) - \lambda I_3)$. Or

$$\det(H_f(P) - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 12-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (12-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -1 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (12-\lambda)\left((4-\lambda)(6-\lambda) - 1\right) \\
&= (12-\lambda)(\lambda^2 - 10\lambda + 23)
\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $\lambda^2 - 10\lambda + 23$ est

$$\Delta = 100 - 4 \times 23 = 8$$

et ses racines sont

$$\lambda_1 = \frac{10+\sqrt{8}}{2} > 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = \frac{10-\sqrt{8}}{2} > 0$$

Les valeurs propres de $H_f(P)$ sont donc λ_1, λ_2 et 12. Elles sont donc toutes trois positives et P est un minimum local.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. $f(x, y)$ existe pour tout (x, y) tel que $y \neq 0$. Le domaine D_f de f est donc le plan privé de l'axe (Ox).
2.

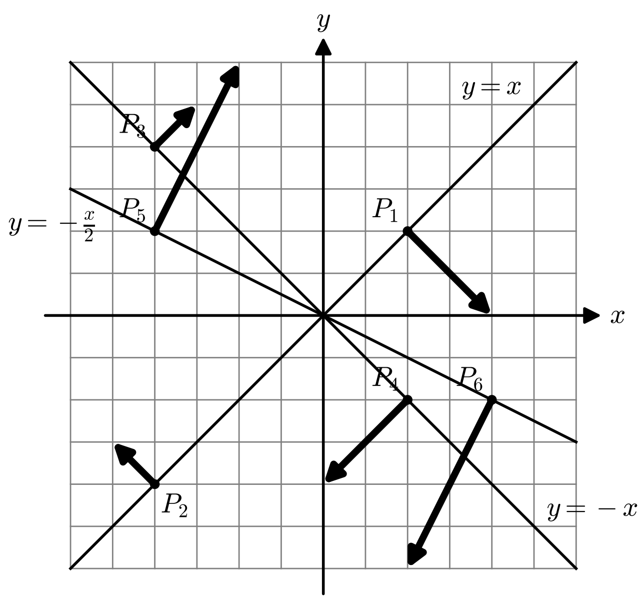
$$\forall (x, y) \in D_f, \quad \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2} \right)$$

3. c.f. plus bas.
4.

$$\nabla(f).\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} \\ -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{y}{x} - \frac{y}{x} = 0.$$

Le gradient de f est donc, en chaque point M du plan (xOy), orthogonal à $\overrightarrow{OM}$. Les lignes de niveaux de f sont donc des droites. Précisément, en chaque point $M \in D_f$, la ligne de niveau de f est la droite (OM).

5.
- On a $f(P_1) = f(P_2) = 1$. Les points P_1 et P_2 appartiennent donc à la ligne de niveau 1 : la droite d'équation $y = x$.
- On a $f(P_3) = f(P_4) = -1$. Les points P_3 et P_4 appartiennent donc à la ligne de niveau -1 : la droite d'équation $y = -x$.
- On a $f(P_5) = f(P_6) = -2$. Les points P_5 et P_6 appartiennent donc à la ligne de niveau -2 : la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x$.



6. De façon générale, l'isocline de niveau $h \in \mathbb{R}$ de f est la courbe d'équation

$$f(x,y) = h \Leftrightarrow \frac{x}{y} = h \Leftrightarrow y = \frac{1}{h}x$$

   Il s'agit donc bien d'une droite, passant par $\mathcal{O}$ et de pente $\frac{1}{h}$.

7. S_f est engendrée par une droite horizontale passant par l'axe (Oz) et tournant autour de celui-ci en montant. Entre $h = 0$ et $h = +\infty$, la droite fait un quart de tour entre en partant de l'axe (Oy) vers l'axe (Ox).

$\star\ \star$
$\star$