CONTRÔLE CONTINU

Séries numériques.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soit $a > 0$. On note

$$u_n = \ln(n) - a\ln(n+1) + (a-1)\ln(n+2).$$

1. On suppose ici que $\underline{a = 2}$.
   (a) Montrer que u_n est le terme général d'une série télescopique.
   (b) En déduire la nature de la série $\sum u_n$ et la valeur de la somme

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

2. On suppose maintenant que $\underline{a \neq 2}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) tend vers 0 (on pourra commencer par mettre n en facteur dans chacun des logarithmes puis appliquer les formules du logarithme).
   (b) Montrer que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{a-2}{n}$ (on rappelle que $\ln(1+x) = x + o(x)$).
   (c) En déduire le comportement de la série $\sum u_n$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2 Pour tout $n \geqslant 1$, on note

$$u_n = ne^{-n^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge. On note

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n^2} \quad \text{et} \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} ke^{-k^2}.$$

2. Montrer que la fonction $[x \mapsto xe^{-x^2}]$ est positive et décroissante sur $[1, +\infty[$.

3. En déduire que

$$\forall k \geqslant 2, \qquad \frac{1}{2}\left(e^{-k^2} - e^{-(k+1)^2}\right) \leqslant u_k \leqslant \frac{1}{2}\left(e^{-(k-1)^2} - e^{-k^2}\right)$$

4. Donner un encadrement du reste R_n.
5. Déterminer un entier n_0 tel que la somme partielle $S_{n_0} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k$ soit une valeur approchée de S à 10^{-20} près.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 1. (a) Soit $u \in]-1,1[$. Écrire $\dfrac{1}{1-u}$ sous la forme d'une somme infinie.

(b) En déduire l'écriture de $\dfrac{1}{1+x^2}$ sous la forme d'une somme infinie ($x \in]-1,1[$).

(c) En déduire le développement en série entière de la fonction arctan.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, on note

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{4n^2-1} x^{2n+1}$$

(a) Montrer que la série $\sum f_n(x)$ converge si et seulement si $|x| \leqslant 1$ (on pourra distinguer les cas $|x| \neq 1$ et $|x| = 1$). On note

$$\forall x \in [-1,1], \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

(b) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, la fonction f_n est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer $f_n'(x)$.

(c) Montrer que

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = -x \arctan(x).$$

(d) En intégrant l'égalité précédente, donner $f(x)$ sous forme explicite (on pourra envisager une intégration par parties).

⋆ ⋆
⋆

<u>CORRECTION</u>

Exercice 1 :

1. (a) Si $a = 2$, on a

$$u_n = \ln(n) - 2\ln(n+1) + \ln(n+2) = (\ln(n+2) - \ln(n+1)) - (\ln(n+1) - \ln n) = v_{n+1} - v_n$$

avec $v_n = \ln(n+1) - \ln n$.
Il s'agit donc bien du terme général d'une série télescopique.

(b) On a

$$v_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0$$

Donc la série $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{+\infty} v_n - v_1 = \ln 2.$$

2. (a)

$$\begin{aligned} u_n &= \ln n - a\ln(n+1) + (a-1)\ln(n+2) \\ &= \ln n - a\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) + (a-1)\ln\left(n\left(1+\frac{2}{n}\right)\right) \\ &= \ln n - a\ln n - a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + (a-1)\ln n + (a-1)\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \\ &= -a\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + (a-1)\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) \qquad (*) \end{aligned}$$

On obtient la limite cherchée en passant à la limite $n \to +\infty$ dans l'expression $(*)$.

(b) En appliquant le D.L. donné par l'énoncé à l'expression $(*)$ avec $x = \frac{1}{n}$ et $x = \frac{2}{n}$, on obtient

$$u_n = -a\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + (a-1)\left(\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{a-2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi,

$$\frac{u_n}{\frac{a-2}{n}} = 1 + \frac{n}{a-2}.o\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + o(1) \longrightarrow 1$$

et l'équivalence cherchée est démontrée.

(c) D'après l'équivalence précédente, u_n est équivalente au terme général d'une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1$. C'est donc le terme général d'une série divergente.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. Différents critères de convergence permettent d'établir la convergence de la série $\sum u_n$. On peut par exemple comparer u_n avec la série géométrique de raison $q = e^{-1}$, soit la série $\sum e^{-n}$:
$$\frac{u_n}{e^{-n}} = ne^{-n^2+n} \longrightarrow 0 \qquad \text{par croissance comparée}$$
Ainsi, u_n est dominé par e^{-n} qui est le terme général d'une série convergente. La série $\sum u_n$ est donc également convergente.
2. Soit $\phi(x) = xe^{-x^2}$. La fonction ϕ positive sur $[1, +\infty[$ (car $x \geqslant 1 > 0$ et exp toujours > 0). De plus, elle est dérivable sur $[1, +\infty[$ et
$$\phi'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = (1-2x^2)e^{-x^2} \ < \ 0 \quad \forall x \geqslant 1$$
Donc ϕ est décroissante sur $[1, +\infty[$.

3. En notant que $u_k = ((k+1)-k)\phi(k)$, on peut représenter u_k comme l'aire d'un rectangle. Par comparaison des aires, on peut alors montrer que
$$\int_k^{k+1} \phi(x)dx \ \leqslant \ u_k \ \leqslant \ \int_{k-1}^{k} \phi(x)dx$$
Or une primitive de $\phi(x)$ étant $\Phi(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$, le calcul des intégrales donne l'encadrement voulu.

4. Par définition, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. En sommant les inégalités obtenues à la question précédente, on trouve
$$\frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-k^2} - e^{-(k+1)^2} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-(k-1)^2} - e^{-k^2}$$
On reconnaît ici une série télescopique en posant $v_k = -e^{-k^2}$. Les sommes se simplifient donc pour donner
$$\frac{1}{2}e^{-(n+1)^2} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{2}e^{-n^2}$$
5. D'après l'encadrement ci dessus, le reste R_n décroit au moins aussi vite de $\frac{1}{2}e^{-n^2}$. Les entiers cherchés font donc partie de l'ensemble des entiers tels que
$$\frac{1}{2}e^{-n^2} \leqslant 10^{-20} \iff n \geqslant \left(2.10^{20}\right)^{\frac{1}{2}}$$
Note : sur la plupart des calculatrices, 10^{20} dépasse les capacités de mémoire. Cependant, les formules du log permettent de transformer l'expression ci-dessus en
$$\left(2\ln(10^{20})\right)^{\frac{1}{2}} = (40\ln(10))^{\frac{1}{2}} \approx 9.6$$
On peut donc prendre $n_0 = 10$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. (a) On reconnaît la somme de la série géométrique de raison u. Ainsi :

$$\forall u \in]-1,1[, \qquad \frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n.$$

(b) Pour tout $x \in]-1,1[$, on a $-x^2 \in]-1,1[$. Ainsi

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$$

(c) La fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est la dérivée de la fonction arctan. D'autre part, puisque $\arctan(0) = 0$, on a

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n}dt$$

D'où

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \qquad \forall x \in]-1,1[.$$

2. (a) On peut ici utiliser le critère de d'Alembert, appliqué à $|f_n(x)| = \frac{|x|^{2n+1}}{4n^2-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} &= \frac{|x|^{2n+3}}{4(n+1)^2-1}.\frac{4n^2-1}{|x|^{2n+1}} \\ &= \frac{4n^2-1}{4(n+1)^2-1}x^2 \quad \longrightarrow \quad x^2 \end{aligned}$$

Ainsi,
- si $|x| < 1$, on a $0 \leqslant x^2 < 1$ et la série $\sum f_n(x)$ est convergente,
- si $|x| > 1$, on a $x^2 > 1$ et la série $\sum f_n(x)$ est divergente.

Si $x^2 = 1$, la méthode ne donne rien. Cependant, on a

$$|f_n(\pm 1)| = \frac{1}{4n^2-1} \sim \frac{1}{4n^2}$$

On reconnaît ici le terme général d'une série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 < 1$. Par équivalence, les termes $f_n(1)$ et $f_n(-1)$ sont les termes généraux de séries convergentes.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x)$ est une expression polynomiale. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $]-1,1[$) et

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^n(2n+1)}{4n^2-1}x^{2n} = \frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n}$$

(c)

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n} \\ &= x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} x^{2n-1} \\ &= x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} x^{2n+1} && \text{(en effectuant le décalage } n \rightsquigarrow n-1) \\ &= -x\arctan(x) && \text{(cf question 1.c)}\end{aligned}$$

(d) Puisque $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ et puisque $f(x) = 0$, on a

$$f(x) = \int_1^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(t)dt = -\int_0^x t\arctan(t)dt$$

En posant

$$\begin{cases} u(t) = \arctan(t) & \to & u'(t) = \frac{1}{1+t^2} \\ v'(t) = t & \to & v(t) = \frac{1}{2}t^2 \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= -\left[\frac{1}{2}t^2\arctan(t)\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt \\ &= -\frac{1}{2}x^2\arctan(x) + \frac{1}{2}\int_0^x 1 - \frac{1}{1+t^2}dt \\ f(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}x^2\arctan(x)\end{aligned}$$

⋆ ⋆
⋆