CONTRÔLE CONTINU

Séries numériques.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Soient a et b deux réels positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n = \frac{2^n + a^n}{2^n + b^n}$$

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ en fonction des valeurs de a et b. On représentera les différents résultats obtenus sous la forme d'un découpage du plan (aOb).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 L'objectif de cet exercice est d'étudier en détails le comportement de la série $\sum \frac{1}{n}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n = \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

1. Justifier rapidement de la divergence de la série $\sum u_n$. En déduire la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.
2. *Un équivalent simple*
   (a) Montrer par un argument graphique ou analytique que

   $$\forall n \geqslant 2, \qquad \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant u_n \leqslant \ln(n) - \ln(n-1)$$

   (b) En déduire un encadrement de la somme partielle S_n.

   (c) Montrer que $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \longrightarrow 1$ en $+\infty$ et en déduire un équivalent simple de la somme partielle S_n en $+\infty$.

3. *La constante d'Euler*
   Pour tout $n \geqslant 2$, on note

   $$v_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right), \qquad T_n = \sum_{k=2}^{n} v_k \qquad \text{et} \qquad \gamma_n = S_n - \ln(n)$$

(a) Montrer que la série $\sum v_n$ est convergente. On rappelle pour cela que

$$\ln(1-u) = -u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

(b) Exprimer T_n en fonction de S_n et $\ln(n)$.

(c) En déduire la nature de la suite (γ_n).

Note : la limite $\gamma \approx 0.577$ de la suite (γ_n) est appelée *la constante d'Euler*. Elle fait partie des constantes universelles.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soient (a_n) la suite définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et

$$\forall n \geqslant 2, \qquad a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$$

et f la série entière définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

1. Calculer les termes a_2, a_3 et a_4.
2. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leqslant a_n \leqslant 2^n$$

3. En déduire que pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, la série $\sum a_n x^n$ converge. Que peut-on en déduire quant au rayon de convergence R de la série entière f ?
4. Pour tout $x \in]-R, R[$, on note

$$g(x) = f(x)(1 - x - 2x^2) \qquad (*)$$

(a) Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$, on a $g(x) = x$ (on pourra remplacer, dans l'expression $(*)$, $f(x)$ par la somme, développer puis tout rassembler en une seule série de la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, les coefficients b_i dépendant des coefficients a_i).

(b) En déduire $f(x)$ sous la forme d'une fraction rationnelle.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :
La nature de la série $\sum u_n$ dépend de la position de a et b par rapport à 2. Ainsi,

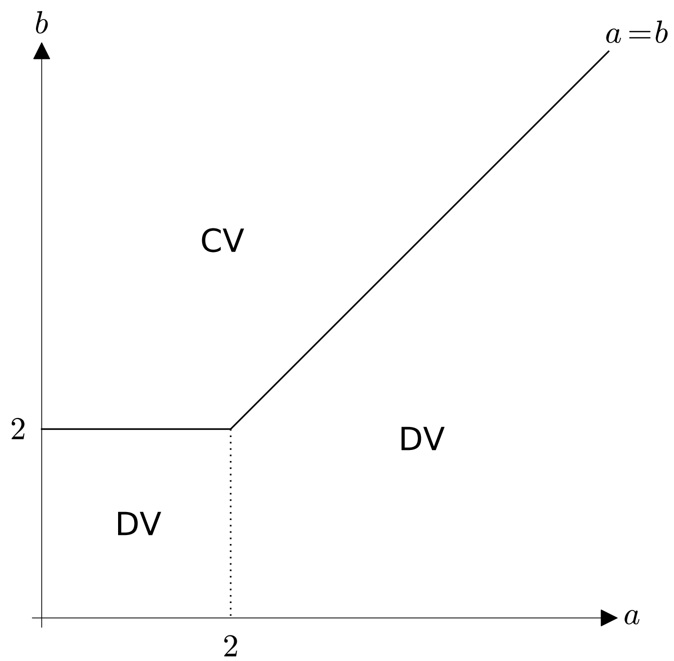
- Si $a < 2$ et $b < 2$, alors $u_n \sim \dfrac{2^n}{2^n} = 1$. Le terme général u_n ne tend donc pas vers 0 et la série associée diverge grossièrement.
  Note : en cas d'égalité, on a $u_n \sim 2$ ou $u_n \sim \frac{1}{2}$ ou $u_n \sim 1$. Dans tous les cas, il y a encore divergence grossière de la série.

- Si $a > 2$ et $b < 2$, alors $u_n \sim \dfrac{a^n}{2^n} = \left(\dfrac{a}{2}\right)^n$. Le terme général u_n est donc équivalent au terme général d'une série géométrique de raison $q = \frac{a}{2} > 1$. La série $\sum u_n$ est donc divergente.
  Note : le résultat est encore valable si $a = 2$ et $b < 2$ ou si $a > 2$ et $b = 2$.

- Si $a < 2$ et $b > 2$, alors $u_n \sim \dfrac{2^n}{b^n} = \left(\dfrac{2}{b}\right)^n$. Le terme général u_n est donc équivalent au terme général d'une série géométrique de raison $q = \frac{2}{b} < 1$. La série $\sum u_n$ est donc convergente.
  Note : si $a = 2$ et $b > 2$, le résultat est similaire. Cependant, si $a < 2$ et $b = 2$, alors $u_n \sim \frac{1}{2}$ et la série associée diverge.

- Si $a > 2$ et $b > 2$, alors $u_n \sim \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$. Il faut alors distinguer les cas $a < b$ et $a \geqslant b$:
  - Si $a < b$, la série $\sum u_n$ converge à la vitesse d'une série géométrique convergente.
  - Si $a \geqslant b$ la série $\sum u_n$ diverge à la vitesse d'une série géométrique divergente.

On peut résumer l'étude ci-dessus par le dessin suivant :



$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 2 :

1. La série $\sum \frac{1}{n}$ est une série de Riemann de paramètre $\alpha = 1$. Il s'agit donc d'une série divergente car $\alpha \not> 1$. La série étant à termes positifs, la suite (S_n) de ses sommes partielles est croissante. Étant divergente, on a $S_n \to +\infty$.
2. (a) Soit $n \geqslant 2$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ étant décroissante, on a
$$\forall t \in [n, n+1], \quad u_n \geqslant \frac{1}{t}$$
Ainsi,
$$u_n = \int_n^{n+1} u_n dt \geqslant \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_n^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(n)$$
De même,
$$\forall t \in [n-1, n], \quad u_n \leqslant \frac{1}{t}$$
Ainsi,
$$u_n = \int_{n-1}^{n} u_n dt \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_{n-1}^{n} = \ln(n) - \ln(n-1)$$
(b) En sommant les inégalités ci dessus pour k allant de 2 à n, on a
$$\ln(n+1) - \ln 2 = \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \sum_{k=2}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1) = \ln(n)$$
On obtient alors un encadrement de $S_n = \sum_{k=\mathbf{1}}^{n} u_k$ en ajoutant $u_1 = 1$ à chaque membre de cette inégalité. D'où :
$$\ln(n+1) - \ln 2 + 1 \leqslant S_n \leqslant \ln(n) + 1$$
(c)
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \to 1$$
Ainsi, en divisant la chaîne d'inégalités ci dessus, on obtient :
$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{\ln 2 - 1}{\ln(n)} \leqslant \frac{S_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$
Chacune des bornes tendant vers 1 en $+\infty$, le théorème des gendarmes assure que le quotient $\frac{S_n}{\ln(n)} \to 1$. Autrement dit,
$$S_n \sim \ln(n)$$
3. (a) D'après le D.L. de $\ln(1-u)$ donné, on a
$$\ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
D'où
$$v_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$$
La série $\sum v_n$ est donc de même nature que la série $\sum \frac{1}{2n^2}$ qui est une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$). Donc la série $\sum v_n$ converge.

(b) Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} v_k = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(k-1)$$
$$= S_n - 1 - \ln(n)$$

(c) D'après le calcul précédente, on a, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\gamma_n = S_n - \ln(n) = T_n + 1$$

Or la série $\sum v_n$ étant convergente, la suite (T_n) converge. En notant T sa somme, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \gamma_n = T + 1$$

Ainsi, la suite (γ_n) converge.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1.

$$\begin{array}{rcccl} a_2 & = & a_1 + 2a_0 & = & 1 \\ a_3 & = & a_2 + 2a_1 & = & 3 \\ a_4 & = & a_3 + 2a_2 & = & 5 \end{array}$$

2. Soit $\mathcal{P}(n)$: $0 \leqslant a_n \leqslant 2^n$.

- <u>Initialisation</u> : on a $0 \leqslant a_0 = 0 \leqslant 2^0 = 1$ et $0 \leqslant a_1 = 1 \leqslant 2^1$. Donc la propriété est vraie aux rang 0 et 1.

- <u>Hérédité</u> : supposons qu'il existe un rang $n \geqslant 1$ pour lequel $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ soit vrai. Puisque $a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1}$, a_{n+1} est la somme de deux termes positifs et il est également positif. De plus, puisque $a_{n-1} \leqslant 2^{n-1}$ et $a_n \leqslant 2^n$, on a

  $$a_{n+1} = a_n + 2a_{n-1} \leqslant 2^n + 2.2^{n-1} = 2.2^n = 2^{n+1}.$$

  Donc

  $$0 \leqslant a_{n+1} \leqslant 2^{n+1}$$

  et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- <u>Conclusion</u> : $\mathcal{P}(n)$ étant vraie aux rang $n = 0$ et $n = 1$ et étant héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$, on a

$$0 \leqslant |a_n x^n| \leqslant (2|x|)^n$$

Or $|x| < \frac{1}{2}$ assure que $2|x| < 1$. Le terme général $|a_n x^n|$ est donc majoré par le terme général d'une série géométrique convergente. Donc la série $\sum |a_n x^n|$ converge et la série $\sum a_n x^n$ converge également.
On peut donc en déduire que le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$.

4. Pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$
\begin{aligned}
g(x) = f(x)(1-x-2x^2) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)(1-x-2x^2) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} 2a_{n-2} x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} (a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2}) x^n + a_0 + a_1 x - a_0 x
\end{aligned}
$$

Or par définition de la suite (a_n), on a

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n - a_{n-1} - 2a_{n-2} = 0 \;\; \forall n \geqslant 2$$

D'où $g(x) = x$.

5. D'après la question précédente, on a

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f(x) = \frac{g(x)}{1-x-2x^2} = \frac{x}{1-x-2x^2}$$

⋆ ⋆
⋆