CONTRÔLE CONTINU

Séries numériques.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on note

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

1. Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
2. Déterminer la valeur de la somme $S = \sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. On pourra travailler sur le terme général u_n pour faire apparaître une série télescopique.
3. Pour tout $n \geqslant 2$, on note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

   (a) Montrer que $R_n \sim_{+\infty} -\frac{1}{n}$.

   (b) Que dire de la vitesse de convergence de la série $\sum u_n$? (justifier rapidement).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 1. *Une étude préliminaire*

Soit $f\,:\,x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

   (a) Donner le domaine de définition D_f de f.

   (b) Montrer que

$$\forall x \in D_f, \qquad \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}$$

2. *Étude d'une série entière*

   Soit
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$$

   (a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière S.

   (b) Déterminer le comportement de S en $x = R$ et $x = -R$ et en déduire le domaine de définition D_S de S.

   (c) En admettant que S est dérivable sur $]-R, R[$, donner $S'(x)$ sous la forme d'une somme puis sous forme explicite.

   (d) En admettant que les primitives de la fonction f définie à la question 1 sont
$$F_C \,:\, x \longmapsto x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2) + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$
   donner $S(x)$ sous forme explicite.

   (e) Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit
$$E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n . n!}$$

1. Déterminer le rayon de convergence de E.
2. Montrer que E vérifie le problème différentiel suivant :
$$(P) \,:\, \begin{cases} y' = -xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$
3. En déduire $E(x)$ sous forme explicite.
4. Retrouver le résultat de la question précédente en travaillant directement sur le terme général $\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n . n!}$ (on pourra s'appuyer sur le développement en série entière de la fonction exponentielle).

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. u_n étant de signe constant, on peut appliquer le critère de comparaison. Ainsi, puisque $\ln(1-u) \sim_0 -u$, on a
$$\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \sim_\infty -\frac{1}{n^2}$$
Or $-\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente ($\alpha = 2 > 1$). Par équivalence, la série $\sum u_n$ converge également.

2. Pour tout $n \geqslant 2$, on a
$$\begin{aligned}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)\\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\\ &= v_{n+1} - v_n\end{aligned}$$
avec $v_n = \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$ Ainsi,
$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \sum_{n=2}^{+\infty} v_{n+1} - v_n = \lim_\infty v_n - v_2$$
Or puisque $\frac{n}{n-1} \to 1$, $\lim\limits_\infty v_n = 0$ et $v_2 = \ln(2)$. Donc
$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\ln 2$$

3. (a) D'après les calculs précédents, on a, pour tout $n \geqslant 2$,
$$\begin{aligned}R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_{k+1} - v_k = -v_{n+1}\\ &= -\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim_\infty -\frac{1}{n}\end{aligned}$$
   (b) La vitesse de convergence de la série $\sum u_n$ correspondant à la vitesse à laquelle son reste R_n tend vers 0, cette convergence se fait à la vitesse de $\frac{1}{n}$. C'est une convergence lente.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. (a) La fonction f est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1+x}{1-x} > 0$. Or

x	$-\infty$			-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$		0	$+$	$\mid$	$+$	
$1-x$		$+$		$\mid$	$+$	0	$-$	
$\frac{1+x}{1-x}$		$-$		0	$+$	$\Vert$	$-$	

Ainsi, $D_f =]-1, 1[$.

(b) On rappelle que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad \text{et} \qquad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$$

D'où, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\begin{aligned} f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1+x) - \ln(1-x) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}+1}{n} x^n \end{aligned}$$

Or dans la somme précédente, les termes d'indice pair sont nuls. En effet, si $n = 2p$, alors $(-1)^{n-1} + 1 = (-1)^{2p-1} + 1 = -1 + 1 = 0$. Il ne reste donc que les termes d'indice impairs. Or si $n = 2p+1$, on a

$$\frac{(-1)^{n-1}+1}{n} x^n = \frac{(-1)^{2p}+1}{2p+1} x^{2p+1} = 2\frac{x^{2p+1}}{2p+1}$$

Enfin, l'ensemble des entiers impairs strictement positifs est

$$2\mathbb{N} + 1 = \{2p+1,\ p \in \mathbb{N}\}$$

Ainsi,

$$f(x) = 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}$$

2. (a) Pour déterminer le rayon de convergence de S, on applique le critère de d'Alembert au terme $u_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{n(2n-1)} \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} &= \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)} \times \frac{n(2n-1)}{x^{2n}} \\ &= \frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} x^2 \end{aligned}$$

$$\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \longrightarrow_{\infty} x^2$$

Ainsi, la série $\sum u_n(x)$ converge pour tout x tel que $x^2 < 1$ et diverge pour tout x tel que $x^2 > 1$. Donc $R = 1$.

(b) Pour $x = \pm 1$, on a

$$u_n(\pm 1) = \frac{1}{n(2n-1)} \sim_\infty \frac{1}{2n^2}$$

On reconnaît ici le terme général d'une série de Riemann convergente. Les séries $\sum u_n(\pm 1)$ convergent donc et $D_S = [-1, 1]$.

(c) Onn calcule $S'(x)$ en dérivant la somme terme à terme :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2n \frac{x^{2n-1}}{n(2n-1)} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

À l'aide du décalage d'indice $p = n - 1$, on obtient

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad S'(x) = 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}$$

On reconnaît le DSE de la fonction f obtenu à la question 1, donc

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad S'(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

(d) D'après les calculs précédents, S est une primitive de la fonction f de la question 1. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$S(x) = x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2) + C$$

D'autre part, on a $S(0) = 0 = 0 \ln\left(\frac{1+0}{1-0}\right) + \ln(1 - 0^2) + C = C$. Donc

$$S(x) = x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2)$$

(e) La fonction S étant définie sur $[-1, 1]$, l'égalité précédente est vraie pour tout $x \in [-1, 1]$. On a en particulier

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} = S(1)$$

Or

$$\begin{aligned} S(x) &= x \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2) \\ &= x\ln(1+x) - x\ln(1-x) + \ln(1-x) + \ln(1+x) \\ &= (1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x) \\ &\to_{x\to 1} 2\ln 2 \quad \text{par croissances comparées} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)} = 2\ln 2$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. On calcule le rayon de convergence de E en appliquant le critère de d'Alembert au terme général $|u_n(x)| = \left|\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}\right| = \frac{x^{2n}}{2^n n!}$:

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{x^{2n+2}}{2^{n+1}(n+1)!} \times \frac{2^n n!}{x^{2n}} = \frac{x^2}{2(n+1)} \to 0$$

   pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, la série $\sum |u_n(x)|$ converge quelque soit $x \in \mathbb{R}$ et il en va de même pour la série $\sum u_n(x)$.
   Le rayon de convergence de E est donc $R = +\infty$ et E est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Il est clair tout d'abord que $E(0) = 1$. De plus, si l'on calcule la dérivée $E'(x)$ en dérivant terme à terme, on obtient

$$\begin{aligned} E'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} 2n \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2^n . n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{2^n . n!} = -x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n . n!} = -xE(x) \end{aligned}$$

3. Le problème différentiel ci-dessus admettant une unique solution, c'est nécessairement la fonction E. On peut alors obtenir une forme explicite de cette unique solution en résolvant le problème à l'aide des méthodes classiques de résolution.
   Or ici, il s'agit d'une équation différentielle de la forme $y' = a(x)y$ dont les solutions sont

$$y \,:\, x \mapsto \lambda e^{A(x)}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

   où A est une primitive de $a(x) = -x$. Ainsi, E est de la forme

$$E \,:\, x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$$

   Par ailleurs, puisque $E(0) = 1$, on a $\lambda = 1$ et $E(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

4. On sait que $e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. On peut alors retrouver directement ce résultat en notant que

$$E(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n . n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\frac{x^2}{2})^n}{n!} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

⋆ ⋆
⋆