CONTRÔLE CONTINU

Séries numériques.

Durée : 1h30 *Les calculatrices sont autorisées.*

Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation.

Exercice 1 Pour tout $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$u_n(a) = \frac{a^n}{(1-a^n)(1-a^{n+1})}$$

1. Montrer que la série $\sum u_n(a)$ converge (on pourra distinguer les cas $a > 1$ et $a < 1$ et comparer, dans chaque cas, le terme général $u_n(a)$ au terme général d'une série géométrique bien choisie).
2. Pour tout $X \in \mathbb{R} \backslash \left\{1, \frac{1}{a}\right\}$, on note $P(X) = \dfrac{X}{(1-X)(1-aX)}$.
   (a) Montrer que
   $$\forall X \in \mathbb{R} \backslash \left\{1, \frac{1}{a}\right\}, \qquad P(X) = \frac{1}{a-1}\left(\frac{1}{1-aX} - \frac{1}{1-X}\right)$$
   (b) En déduire une suite $(v_n(a))$ telle que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n(a) = v_{n+1}(a) - v_n(a)$$
   (c) Donner en fonction de a la somme $S(a) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(a)$
   (on pourra encore là encore distinguer les cas $a > 1$ et $a < 1$).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 *Théorème spécial aux séries alternées*

Soit (a_n) une suite numérique positive décroissante qui converge vers 0. L'objectif est ici de démontrer que la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente et de donner une estimation de la vitesse de convergence de cette série.

Pour cela, on note (S_n) la suite des sommes partielles définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

et l'on note (I_n) et (P_n) les suites extraites de (S_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = S_{2n+1} \quad \text{et} \quad P_n = S_{2n}.$$

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.
2. Montrer que la suite (P_n) est décroissante.
3. Calculer la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n - P_n$.
4. En déduire la nature des suites (I_n) et (P_n) puis celle de la série (S_n).
5. On note S la limite de (S_n). Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |S_n - S| \leqslant a_n$$

6. Comment interpréter le résultat ci-dessus en termes de vitesse de convergence de la série $\sum (-1)^n a_n$?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 *Sommes de séries entières*

1. Pour chacune des séries ci-dessous, donner le rayon de convergence puis une forme explicite de $S_i(x)$ $(i = 1, 2)$.

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2^n + 3^n) x^n \qquad\qquad S_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (3n+1) x^{3n}$$

2. Soit S la série entière définie par $S(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$
   (a) Déterminer le rayon de convergence R de S.
   (b) Montrer que S est définie sur $[-R, R]$.
   (c) Pour tout $x \in]-R, R[$, calculer $S'(x)$ sous la forme d'une série puis sous forme explicite.
   (d) En déduire $S(x)$ sous forme explicite.
   (e) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. a étant supposé positif, le terme général $u_n(a) = \frac{a^n}{(1-a^n)(1-a^{n+1})}$ est positif pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On peut donc appliquer le critère d'équivalence. Or

   - Si $a > 1$, on a $a^n \to +\infty$. Ainsi, $(1 + a^n) \sim a^n$ et
     $$u_n(a) \sim \frac{a^n}{a^n.a^{n+1}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}$$
     Puisque $a > 1$, on reconnaît ici le terme général d'une série géométrique de raison $0 < \frac{1}{a} < 1$. C'est donc le terme général d'une série convergente et par équivalence, la série $\sum u_n(a)$ converge.

   - Si $0 \leqslant a < 1$, on a $a^n \to 0$. Ainsi $(1 + a^n) \sim 1$ et
     $$u_n(a) \sim \frac{a^n}{1.1} = a^n$$
     Puisque $0 \leqslant a < 1$, on reconnaît là encore le terme général d'une série géométrique de raison $a < 1$. C'est donc encore le terme général d'une série convergente, et toujours par équivalence, la série $\sum u_n(a)$ converge.

2. (a) D'après le théorème de décomposition en éléments simples, il existe deux réels α et β tels que
   $$\forall X \in \mathbb{R} \backslash \left\{1, \frac{1}{a}\right\}, \qquad \frac{X}{(1-X)(1-aX)} = \frac{\alpha}{1-aX} + \frac{\beta}{1-X}$$
   D'autre part, en multipliant l'égalité ci-dessus par $(1 - aX)$ et en posant $X = \frac{1}{a}$, on obtient :
   $$\frac{\frac{1}{a}}{(1-\frac{1}{a})} = \alpha$$
   d'où $\alpha = \dfrac{1}{a-1}$.
   De même, en multipliant la même égalité par $(1-X)$ et en posant $X = 1$, on obtient
   $$\frac{1}{1-a} = \beta$$
   Ainsi
   $$\forall X \in \mathbb{R} \backslash \left\{1, \frac{1}{a}\right\}, \qquad \frac{X}{(1-X)(1-aX)} = \frac{1}{a-1}\left(\frac{1}{1-aX} - \frac{1}{1-X}\right)$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n(a) = \frac{a^n}{(1-a^n)(1-a.a^n)} = P(a^n)$$

D'où

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(a) &= \frac{1}{a-1}\left(\frac{1}{1-a.a^n} - \frac{1}{1-a^n}\right) = \frac{1}{a-1}\left(\frac{1}{1-a^{n+1}} - \frac{1}{1-a^n}\right)\\ &= v_{n+1}(a) - v_n(a)\end{aligned}$$

avec $v_n(a) = \dfrac{1}{(a-1)(1-a^n)}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} u_k(a) = v_{n+1}(a) - v_1(a) = v_{n+1}(a) + \frac{1}{(1-a)^2}$$

Ainsi

- <u>Si $a > 1$</u>, $v_n(a) \to 0$ et

$$S(a) = \lim_{n\to+\infty} S_n(a) = \frac{1}{(1-a)^2}$$

- <u>Si $0 \leqslant a < 1$</u>, $v_n(a) \to \frac{1}{a-1}$ et

$$S(a) = \lim_{n\to+\infty} S_n(a) = \frac{1}{a-1} + \frac{1}{(1-a)^2} = \frac{a}{(a-1)^2}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}I_{n+1} - I_n &= S_{2n+3} - S_{2n+1}\\ &= \sum_{k=0}^{2n+3}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k a_k\\ &= (-1)^{2n+3}a_{2n+3} + (-1)^{2n+2}a_{2n+2}\\ &= -a_{2n+3} + a_{2n+2}\end{aligned}$$

Or la suite (a_n) étant décroissante, on a $a_{2n+2} > a_{2n+3}$ donc $I_{n+1} - I_n > 0$ et la suite (I_n) est croissante.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} P_{n+1} - P_n &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \\ &= (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \\ &= a_{2n+2} - a_{2n+1} \end{aligned}$$

Or la suite (a_n) étant décroissante, on a $a_{2n+1} > a_{2n+2}$ donc $P_{n+1} - P_n < 0$ et la suite (P_n) est décroissante.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$I_n - P_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k = -a_{2n+1}$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n - P_n = 0$ par hypothèse.

4. D'après les résultats obtenus aux questions précédentes, on constate que les suites (I_n) et (P_n) sont adjacentes. Elles sont donc toutes les deux convergentes et ont la même limite S.
   Puisque les deux suites (I_n) et (P_n) extraites de (S_n) sont toute les deux convergentes vers la même limite et qu'à elles deux elles recouvrent l'ensemble des termes de la suite (S_n), la suite (S_n) converge également et sa limite est encore S.

5. Les deux suites (I_n) et (P_n) encadrant la limite S, on peut montrer que S est toujours comprise entre deux termes consécutifs de (S_n). Précisément, soit $n \in \mathbb{N}$.

   - Si n est pair, il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. Mais alors

   $$S_{n+1} = I_p \leqslant S \leqslant P_p = S_n$$

   - Si n est impair, il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p + 1$. Mais alors

   $$S_n = I_p \leqslant S \leqslant P_{p+1} = S_{n+1}$$

   Dans tous les cas, on a

   $$|S_n - S| \leqslant |S_{n+1} - S_n| = a_{n+1} \leqslant a_n$$

6. Du point de vue de la vitesse de convergence, cela signifie que toute série alternée qui converge converge vers sa limite à la vitesse à laquelle sont terme général tend vers 0.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. (a) On reconnaît dans la série $S_1(x)$ la somme des séries

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n = \frac{1}{1-2x}$$

définie pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ et

$$T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^n = \frac{1}{1-3x}$$

définie pour tout $x \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$.

La somme $S_1(x)$ est donc définie sur le plus petit de ces deux intervalles et

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[, \qquad S_1(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} = \frac{2-5x}{(1-2x)(1-3x)}$$

(b) On reconnaît dans $S_2(x)$ la dérivée de la série $U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{3n+1}$ définie et dérivable sur $]-1,1[$ et dont la forme explicite est

$$U(x) = x\sum_{n=0}^{+\infty}(x^3)^n = \frac{x}{1-x^3}$$

Ainsi,

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad S_2(x) = \frac{1.(1-x^3) - x(-3x^2)}{(1-x^3)^2} = \frac{2x^3+1}{(1-x^3)^2}$$

2. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$, on pose $u_n = \left|\frac{x^n}{n(n-1)}\right| = \frac{|x|^n}{n(n-1)}$. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{|x|^{\cancel{n+1}}}{(n+1)\cancel{n}}\frac{\cancel{n}(n-1)}{\cancel{|x|^n}}\\ &= \frac{n-1}{n+1}|x|\\ &\to |x|\end{aligned}$$

Donc la série $\sum u_n$ converge pour tout $-1 < x < 1$ et diverge pour tout $x > 1$. Donc le rayon cherché est $R = 1$.

(b) Pour $x = \pm 1$, on doit établir la convergence de la série $\sum \frac{(\pm 1)^n}{n(n-1)}$. Il est possible de traiter les deux cas simultanément en considérant la valeur absolue $\left|\frac{(\pm 1)^n}{n(n-1)}\right| = \frac{1}{n(n-1)}$. Or

$$\frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$$

On reconnaît ici le terme général d'une série de Riemann de paramètre $\alpha = 2 > 1$. Il s'agit donc du terme général d'une série convergente et par équivalence, la série $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge également. Les séries $\sum \frac{(\pm 1)^n}{n(n-1)}$ sont donc toutes deux convergentes et la fonction S est définie sur $[-1, 1]$.

(c) Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\cancel{n}x^{n-1}}{\cancel{n}(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

On reconnaît ici le développement en série entière de la fonction $x \longmapsto -\ln(1-x)$.

(d) La fonction S est donc une primitive de $[x \mapsto -\ln(1-x)]$. S est donc de la forme

$$\forall x \in [-1, 1], \qquad S(x) = (1-x)\ln(1-x) - (1-x) + C$$

pour une constante $C \in \mathbb{R}$.
D'autre part, on a $S(0) = 0$ et $[(1-x)\ln(1-x) - (1-x) + C]_{|x=0} = -1 + C$. On en déduit $C = 1$ et

$$\forall x \in [-1, 1], \qquad S(x) = (1-x)\ln(1-x) + x$$

(e) À l'aide d'un décalage d'indice, on peut montrer que la somme cherchée est exactement $S(1)$, soit $\lim\limits_{x \to 1} [(1-x)\ln(1-x) + x]$
Par croissances comparées, on en déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

⋆ ⋆
⋆