CONTRÔLE CONTINU

Systèmes différentiels, 3° année.

Durée : 1h30 *Calculatrices autorisées.*

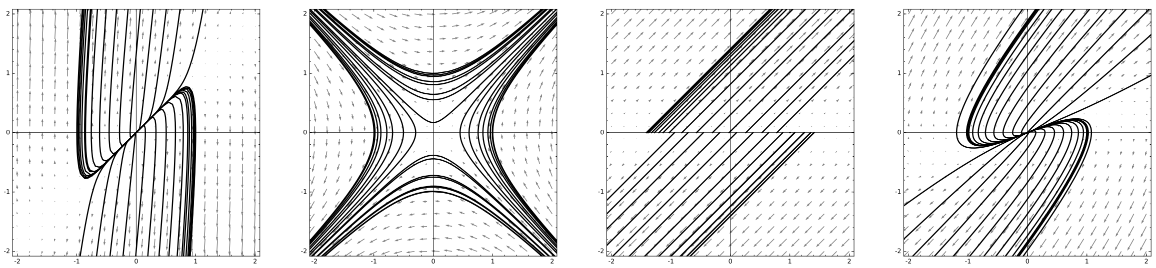
Tous les exercices sont indépendants.
Il sera tenu compte de la présentation et de la rédaction.

Exercice 1 Pour tout $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, on note

$$(E_a)\ :\ y'' - (1+a)y' + ay = 0$$

1. Montrer que (E_a) est équivalente au système différentiel linéaire (S_a) homogène d'ordre 1 de matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 1+a \end{pmatrix}$
2. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A.
3. Associer les portraits de phases ci-dessous aux différentes valeurs de a proposées (on justifiera rapidement).

$$a = -1, \quad a = 0, \quad a = 0.2, \quad a = 10$$



I II III IV

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On note (S) le système différentiel linéaire d'ordre 1, homogène, à coefficients constants défini par $(S)\ :\ \begin{cases} x' &= y \\ y' &= x \\ z' &= -z \end{cases}$

1. Déterminer la matrice A du système (S).
2. Montrer que les valeurs propres de A sont -1 et 1.
3. Montrer que E_1 est une droite dont on donnera un vecteur directeur X_1.
4. Montrer que E_{-1} est un plan dont on donnera une base (X_2, X_3).
5. En déduire l'ensemble des solutions de (S). On exprimera les fonctions coordonnées $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ en fonction de trois constantes $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
6. Déterminer, parmi toutes les solutions de (S), celle qui vérifie en outre les conditions initiales

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0, \qquad z(0) = z_0$$

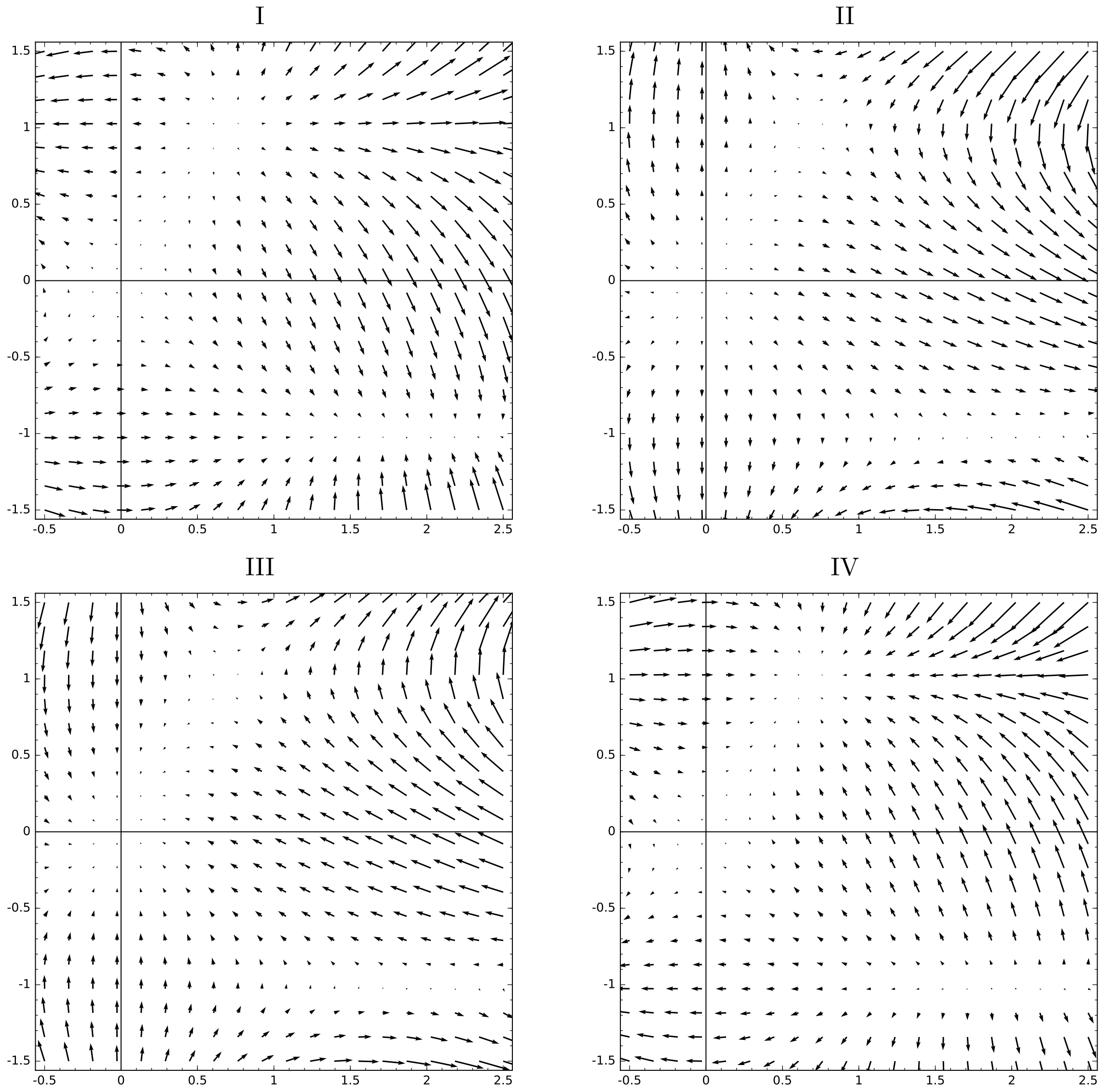
7. (a) Déterminer les conditions initiales (x_0, y_0, z_0) de l'espace associées à des trajectoires convergent vers $(0,0,0)$.
   (b) Montrer que dans ce cas, les trajectoires sont linéaires.

8. Décrire le comportement asymptotique des trajectoires dont le point de départ n'est pas dans l'ensemble déterminé à la question 7.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit (S) : $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -x + xy^2 \\ y' & = & \frac{1}{2}x - y + xy \end{array}\right.$

1. Donner le champ de vecteurs F naturellement associé au système (S) et calculer sa matrice jacobienne $\nabla F(x,y)$.
2. Montrer que (S) admet trois points fixes que l'on précisera.
3. Déterminer la nature de chacun de ces points fixes (nœud attractif, répulsif, col, etc) en étudiants les systèmes linéaires associés à chacun de ces points fixes.
4. Parmi les champs de vecteurs ci-dessous, lequel correspond à celui du système (S) (justifier) ?



⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Exercice 1 :

1. On pose
$$y_1 = y \qquad \text{et} \qquad y_2 = y'$$
On a alors
$$\begin{cases} y_1' &= y' &= & y_2 \\ y_2' &= y'' &= (1+a)y' - ay &= -ay_1 + (1+a)y_2 \end{cases}$$
On retrouve le système différentiel linéaire associé à la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & (1+a) \end{pmatrix}$$

2. — Valeurs propres :
$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a & 1+a-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -\lambda(1+a-\lambda) + a = \lambda^2 - (1+a)\lambda + a$$
$$\Delta = (-(1+a))^2 - 4a = (1-a)^2$$
D'où
$$\lambda = \frac{(1+a) \pm |1-a|}{2}$$
et en distinguant les cas $a > 1$ et $a < 1$, on obtient, pour tout $a \neq 1$
$$\lambda_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = a$$
— Vecteurs propres :
— E_1 :
$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} y &= x \\ -ax + (1+a)y &= y \end{cases} \Leftrightarrow y = x$$
D'où $E_1 = \{(x,x),\ x \in \mathbb{R}\}$.

— E_a :
$$AX = aX \Leftrightarrow \begin{cases} y &= ax \\ -ax + (1+a) &= ay \end{cases} \Leftrightarrow y = ax$$
D'où $E_a = \{(x,ax),\ x \in \mathbb{R}\}$.

3. — Le portrait de phase II est un col. Il correspond donc à un système différentiel dont les valeurs propres sont de signes distincts. Il s'agit donc du cas $a = -1$. On note par ailleurs que les directions principales de ce col correspondent bien aux sous espaces propres, d'équations respectives $y = \pm x$.

— Les lignes constituant le portrait de phase III correspondent au cas d'un système différentielle dont 0 est une valeur propre. Il correspond donc au cas $a = 0$. Le dessin laisse en outre deviner la droite d'équation $y = 0$ comme droite de points fixes.

— Les portraits de phases I et IV sont des nœuds (répulsifs). Ils correspondent à des systèmes dont les valeurs propres sont de même signe. Le principale différence est l'a droite tangente à l'ensemble des trajectoires au voisinage du centre du repère. Cette droite est le sous espace propre associé à la plus petite des valeurs prorpes (en valeurs absolues). Le portrait de phase I correspond donc à $a = 10$ (et la droite évoquée plus haut est E_1, d'équation $y = x$) alors que le portrait de phase IV correspond au cas $a = 0.2$ (et la droite associée est $E_{0.2}$ d'équation $y = 0.2x$).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 :

1. (S) équivaud à $Y' = AY$ avec
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Les valeurs propres de A sont les racines de
$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2-1) = -(\lambda+1)^2(\lambda-1) \end{aligned}$$
Les valeurs propres de A sont donc $\lambda_1 = 1$ (d'ordre 1) et $\lambda_2 = -1$ (d'ordre 2).

3. E_1 :
$$AX = X \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x \\ x & = & y \\ -z & = & z \end{array} \right. \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$
D'où
$$E_1 = \{(x, x, 0),\ x \in \mathbb{R}\}$$
C'est bien une droite, engendrée (par exemple) par le vecteur $X_1 = (1, 1, 0)$.

4. E_{-1} :
$$AX = -X \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -x \\ x & = & -y \\ -z & = & -z \end{array} \right. \;\Leftrightarrow\; y = -x$$
D'où
$$E_{-1} = \{(x, -x, z), x, z \in \mathbb{R}\}$$
C'est un plan, engendré (par exemple) par les vecteurs $X_1 = (1, -1, 0)$ et $X_2 = (1, -1, 1)$.

5. D'après les calculs précédents, la famille
$$Y_1 \,:\, t \mapsto e^t X_1, \qquad Y_2 \,:\, e^{-t} X_2, \qquad Y_3 \,:\, e^{-t} X_3$$
forme une base de solutions de (S).
Les solutions de (S) sont donc les fonctions vectorielles de la forme
$$Y \,:\, t \mapsto \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} & -e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
D'où
$$\left\{ \begin{array}{rcr} x(t) & = & \alpha e^t + \beta e^{-t} + \gamma e^{-t} \\ y(t) & = & \alpha e^t - \beta e^{-t} - \gamma e^{-t} \\ z(t) & = & \gamma e^{-t} \end{array} \right. \qquad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

6. L'unique solution de (S) vérifiant en outre les conditions initiales données est associé aux coefficients $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ vérifiant le système linéaire
$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \alpha & + & \beta & + & \gamma & = & x_0 \\ \alpha & - & \beta & - & \gamma & = & y_0 \\ & & & & \gamma & = & z_0 \end{array} \right. \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcr} 2\alpha & = & x_0 + y_0 \\ \beta & = & \alpha - \gamma - y_0 \\ \gamma & = & z_0 \end{array} \right. \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{rcr} \alpha & = & \frac{x_0+y_0}{2} \\ \beta & = & \frac{x_0-y_0}{2} - z_0 \\ \gamma & = & z_0 \end{array} \right.$$
L'unique solution cherchée est donc
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \dfrac{x_0+y_0}{2} e^t + \dfrac{x_0-y_0}{2} e^{-t} \\[2ex] y(t) & = & \dfrac{x_0+y_0}{2} e^t - \dfrac{x_0-y_0}{2} e^{-t} \\[2ex] z(t) & = & z_0 e^{-t} \end{array} \right.$$

7. (a) Pour qu'une trajectoire de (S) converge vers $(0,0,0)$, il faut que le coefficient $\frac{x_0+y_0}{2}$ de e^t soit nul. D'après les calculs précédents, c'est le cas si et seulement si le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) appartient au plan d'équation $x+y=0$.

   Les paramétrisations de ces trajectoires sont alors de la forme

$$\left\{\begin{array}{rcr} x(t) &=& x_0e^{-t} \\ y(t) &=& -x_0e^{-t} \\ z(t) &=& z_0e^{-t} \end{array}\right.$$

   (b) On constate que tous les points de cette trajectoire sont situés sur la droite portée par le vecteur $\begin{pmatrix} x_0 \\ -x_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$.

8. Si les conditions initiales (x_0, y_0, z_0) ne sont pas prises dans le plan d'équation $x+y=0$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} y(t) = \pm\infty$$

   et

$$\lim_{t\to+\infty} z(t) = 0$$

   Par ailleurs, en $t \to +\infty$, on a

$$x(t) \sim y(t) \sim \frac{x_0+y_0}{2}e^t$$

   Les trajectoire admettent la droite définie par $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& y \\ z &=& 0 \end{array}\right.$ comme droite asymptote.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 :

1. Le champ de vecteur F est

$$F \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (-x+xy^2, \frac{1}{2}x - y + xy) \end{array}$$

   Sa matrice jacobienne est

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} -1+y^2 & 2xy \\ \frac{1}{2}+y & -1+x \end{pmatrix}$$

2. Les points fixes de (S) sont les solutions du système $F(x,y) = (0,0)$. Or

$$F(x,y) = (0,0) \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{rcl} -x+xy^2 &=& 0 \\ \frac{1}{2}x - y + xy &=& 0 \end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{rcl} x(-1+y^2) &=& 0 \\ \frac{1}{2}x - y + xy &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} y &=& 1 \\ x &=& \frac{2}{3} \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcr} y &=& -1 \\ x &=& 2 \end{array}\right.$$

   On obtient les trois points fixes

$$P_0 = (0,0) \qquad P_1 = \left(\frac{2}{3}, 1\right) \qquad P_2 = (2,-1)$$

3. La nature de chacun des points fixes ci dessus est déterminée par les valeurs propres des matrices jacobiennes $J_i = \nabla F(P_i)$ pour $i = 1,2,3$. Or

   — $J_0 = \nabla F(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$. J_0 admet $-1 < 0$ comme valeur propre double. Il s'agit d'un nœud attractif.
   — $J_1 = \nabla F\left(\frac{2}{3}, 1\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{3} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Donc $\det(J_1) = -2 < 0$. Les deux valeurs propres de J_1 sont de signes contraires et P_1 est un col.
   — $J_2 = \nabla F(2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. Donc $\det(J_2) = -2 < 0$ et P_2 est aussi un col.

4. Seuls les champs de vecteurs II et III représentent des cols aux points fixes P_1 et P_2. Par ailleurs, seul le portrait III correspond à un nœud attractif.