Université Toulouse 2 le Mirail | Année universitaire 2006/2007

L2 MASS. Rattrapage analyse S3

Comparaison séries/intégrales

Exercice 1 Soit $r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} r_n = +\infty$.
2. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, on a $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leqslant \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}}$.
3. En déduire un encadrement de $\frac{1}{\sqrt{k}}$ puis de r_n. Montrer par exemple que $18 \leqslant r_{100} \leqslant 20$.
4. Donner un équivalent de r_n quand $n \to +\infty$.

****

Exercice 2

1. On pose $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$ on a $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$.
   (b) En déduire un encadrement de $\frac{1}{k}$ pour $k \geqslant 2$ puis un équivalent de h_n quand $n \to +\infty$.
2. On note maintenant $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
   (a) Montrer que la suite (u_n) converge est que sa limite ℓ vérifie $\ell \in [1/2, 1]$.
   (b) À l'aide de la question 1, donner un encadrement de u_n et en déduire sa limite.

****

Exercice 3 Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue, positive et décroissante.

1. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, on a
$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)dt \leqslant f(k).$$
2. On note $u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(t)dt$. Montrer que la suite (u_n) converge et que sa limite ℓ vérifie $\ell \in [0, f(1)]$.
3. Applications :
   (a) Montrer qu'il existe une constante $\gamma \in [0, 1]$ telle que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.
   (b) Montrer qu'il existe une constante $\alpha \in [1, 2]$ telle que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} - \alpha + o(1)$.