

# Coniques, quadriques et formes quadratiques

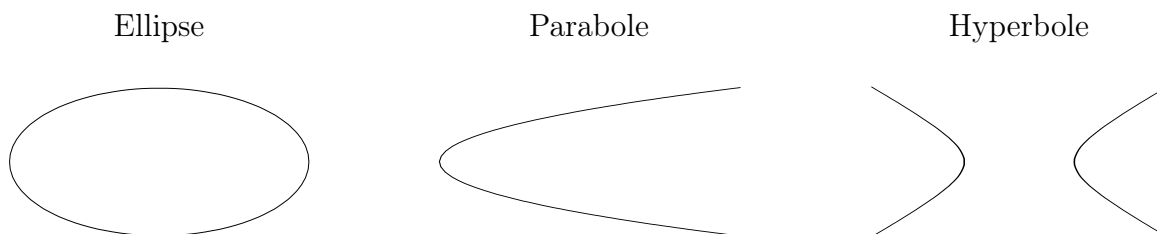
ISA-BTP  
deuxième année

## Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Coniques et quadriques</b>	<b>3</b>
1.1 Définition géométrique d'une conique . . . . .	3
1.2 Symétries et points remarquables d'une conique . . . . .	4
1.3 Une première équation cartésienne . . . . .	5
1.4 Équations réduites . . . . .	6
1.5 Sommets et distances remarquables . . . . .	8
1.6 Paramétrisation d'une conique . . . . .	9
1.7 Tangentes à une conique . . . . .	10
1.8 Équation cartésienne et réduction . . . . .	11
1.9 Quadriques . . . . .	13
<b>2 Formes quadratiques</b>	<b>16</b>
2.1 Expression analytique d'une forme quadratique . . . . .	16
2.1.1 Notations . . . . .	16
2.1.2 Mise sous forme réduite . . . . .	17
2.2 Définition matricielle . . . . .	18
2.2.1 Rappels . . . . .	18
2.2.2 Matrice d'une forme quadratique . . . . .	19
2.2.3 Réduction matricielle . . . . .	19

# Introduction

On appelle conique toute courbe de type



Ceux sont trois familles de courbes qui vérifient certaines propriétés géométriques que l'on peut souvent exploiter en pratique.

Pour toute parabole, par exemple, il existe un point qui concentre tous les rayons qui entrent dans la parabole (antennes, phares, fours,...).

Historiquement, une conique est l'intersection d'un plan avec un (double) cône : en partant d'un plan horizontal, on a un cercle et en inclinant le plan progressivement, l'intersection passe d'une ellipse (tant que l'angle du plan est plus petit que l'angle du cône) à un parabole (quand le plan est parallèle à l'une des directions du cône) puis à une hyperbole.

Il existe également une façon géométrique basée sur des distances dans le plan. Cette forme géométrique permet, en plaçant un repère dans le plan, de déterminer une équation cartésienne.

L'équation que l'on obtient en plaçant un repère dans le plan dépend évidemment de la position du repère dans le plan. Cependant, on peut montrer que quelque soit le repère que l'on se fixe, l'équation d'une même conique dans le plan est donnée par un polynôme de degré 2 en les coordonnées  $(x, y)$  des points :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

On verra qu'il existe alors certaines bases plus adaptées que d'autres. Dans ces bases, les équations cartésiennes sont particulièrement simples (au sens où l'essentiel des coefficients est nul) et les coefficients non nuls peuvent trouver un sens géométrique.

On verra en particulier qu'il existe un repère du plan dans lequel l'équation d'une ellipse ou d'une hyperbole est de la forme

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1.$$

L'étude détaillée des coniques sous l'angle analytique permet également de généraliser aux dimensions supérieures. On verra ainsi qu'en dimension trois, on peut distinguer une

famille de surfaces : les quadriques intimement liées aux coniques.

Une étude plus poussée des équations analytiques se généralise également aux dimensions supérieures. L'étude des polynômes de degré 2 en  $n$  variables trouve en particulier des interprétations en termes de distances dans un EV de dimension  $n$  via le calcul matriciel. On obtient alors un outil puissant pour pour l'analyse géométriques des surfaces et hyper-surfaces. Ces outils sont en particulier utilisés en modélisation numérique ou statistique.

# 1 Coniques et quadriques

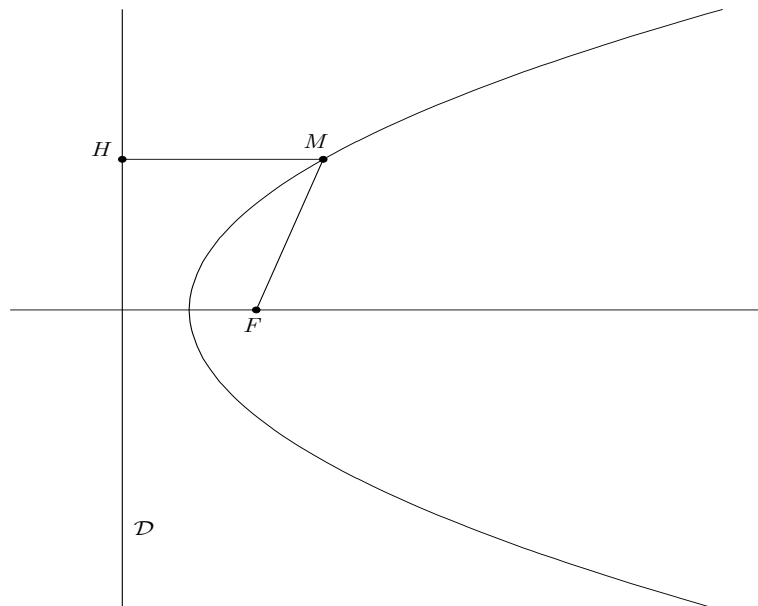
## 1.1 Définition géométrique d'une conique

D'un point de vue géométrique, pour définir une conique, on choisit

- un point : le foyer  $F$ ,
- une droite (ne passant pas par  $F$ ) : la directrice  $\mathcal{D}$ ,
- un réel ( $> 0$ ) : l'excentricité  $e$ .

On appelle alors conique associée au triplet  $(F, \mathcal{D}, e)$  (ou simplement conique  $(F, \mathcal{D}, e)$ ) la courbe  $\mathcal{C}$  formée par l'ensemble des points  $M$  du plan tels que

$$d(M, F) = e.d(M, \mathcal{D}).$$



En notant  $H_M$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{D}$ , la conique  $\mathcal{C}$  définie par  $(F, \mathcal{D}, e)$  est l'ensemble des points  $M$  tels que

$$MF = e.MH_M.$$

Le paramètre  $e$  permet en particulier de donner une seule définition pour les trois types de coniques. C'est alors la valeur de l'excentricité  $e$  qui détermine le type de conique. Précisément :

- Si  $0 < e < 1$ ,  $\mathcal{C}$  est une ellipse.
- Si  $e = 1$ ,  $\mathcal{C}$  est une parabole.
- Si  $e > 1$ ,  $\mathcal{C}$  est une hyperbole.

**Notes :**

- On peut noter qu'une conique ne passe jamais par son foyer. En effet, pour qu'une conique  $\mathcal{C} = (F, \mathcal{D}, e)$  passe par son foyer, il faut que le point  $F$  du plan vérifie la relation

$$d(F, F) = e.d(F, \mathcal{D}).$$

Puisque  $d(F, F) = 0$ , il faut donc que le foyer  $F$  soit sur la directrice  $\mathcal{D}$ , ce que est exclu.

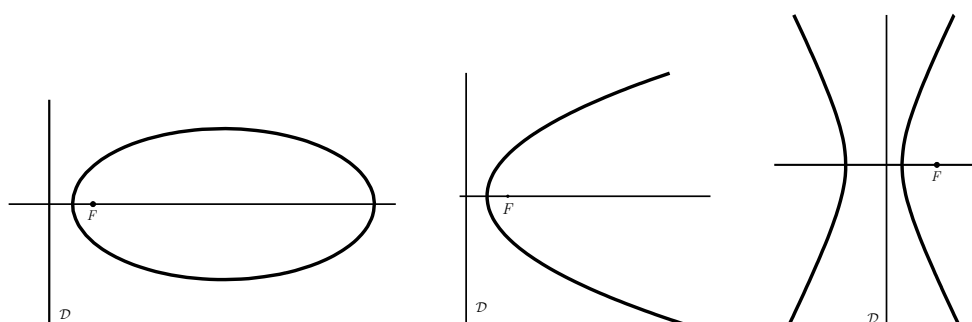
- Une première quantité caractéristique que l'on peut associer à une conique est la distance entre  $F$  et  $\mathcal{D}$ , notée traditionnellement  $d$ .

## 1.2 Symétries et points remarquables d'une conique

Étant donnée une conique  $\mathcal{C}$ , on peut lui associer certains éléments géométriques caractéristiques ainsi que certaines propriétés caractéristiques.

Ainsi, on peut déjà associer à chaque conique sa directrice  $\mathcal{D}$  et son foyer  $F$ .

D'autre part, on note que les trois types de coniques sont symétriques par rapport à une droite : l'axe horizontal passant par le foyer de la courbe. On l'appelle l'axe focal. C'est *un axe de symétrie* de la conique.



De façon générale, l'axe focal d'une conique  $\mathcal{C} = (F, \mathcal{D}, e)$  est la droite perpendiculaire à  $\mathcal{D}$  qui passe par  $F$ .

**Exercice** : montrer par des arguments de géométrie que l'ensemble des points vérifiant une relation du type

$$MF = e.MH_M$$

est symétrique par rapport à l'axe focal.

On peut également définir certains points particuliers des coniques : les sommets. Formellement, les sommets d'une coniques sont donnés par son intersection avec ses axes de symétrie. Ainsi, l'intersection d'une conique avec son axe focal produit un ou plusieurs sommets. Précisément, on obtient un sommet  $S$  pour une parabole et deux sommets  $S$  et  $S'$  pour une ellipse ou une hyperbole.

**Note** : on peut également noter  $P$  l'intersection de la directrice avec l'axe focal. Le point  $P$  est le projeté orthogonal de  $F$  sur  $\mathcal{D}$ .

Les conique d'excentricité  $e \neq 1$  (i.e. les ellipses et les hyperboles), possèdent également un deuxième axe de symétrie. D'un point de vue géométrique, on peut par exemple la définir comme la médiatrice du segment  $[SS']$ . (On verra comment qu'en plaçant un premier repère dans le plan, on peut obtenir une première équation qui nous donne une caractérisation analytique de ce second axe).

Pour les ellipse, ce second axe de symétrie nous donne deux sommets supplémentaires.

Les deux axes de symétrie des coniques d'excentricité  $e \neq 1$  permettent également de définir un centre de symétrie  $\Omega$  : l'intersection des deux axes. (On appelle parfois les ellipses et hyperboles les coniques à centre). C'est ce point  $\Omega$  que l'on prendra pour centre dans le repère qui donne les équations les plus simples pour les coniques à centre.

### 1.3 Une première équation cartésienne

Pour définir de façon exacte la position du centre d'une conique à centre, on fixe un premier repère du plan dans lequel on peut facilement exprimer les objets remarquables de la conique (foyer, directrice, axe focal, sommets,...) : on place le centre du repère au niveau du foyer  $F$  et on dirige nos axes selon l'axe focal pour les abscisses et la directrice  $\mathcal{D}$  pour les ordonnées. On complète alors le foyer par deux vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  unitaires portés par ces deux axes. On appelle  $\mathcal{R}_F$  le repère ainsi obtenu.

Dans ce repère, le foyer est le point  $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_F}$ , l'axe focal est la droite d'équation

$$y = 0$$

et la directrice est la droite d'équation

$$x = -d.$$

D'autre part, le projeté orthogonal  $H_M$  d'un point  $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_F}$  a pour coordonnées  $H_M = \begin{pmatrix} -d \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_F}$ . En exprimant l'équation  $MF = eMH_M$  dans ce repère, on obtient la première équation cartésienne de la conique  $\mathcal{C} = (F, \mathcal{D}, e)$  :

$$\begin{aligned} MF = eMH_M &\iff MF^2 = e^2MH_M^2 \\ &\iff x^2 + y^2 = e^2(x + d)^2 \end{aligned}$$

En développant cette équation et en notant  $p = ed$ , on obtient l'équation

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2epx - p^2 = 0.$$

**Notes :**

- L'équation est donnée par un polynôme de degré 2 en  $x$  et  $y$ .
- La valeur de  $e$  détermine le signe  $(1 - e^2)$ , c'est-à-dire le signe du coefficient de  $x^2$ .
- La quantité  $p = ed$  est appelée paramètre de la conique.

## 1.4 Équations réduites

À partir de cette première équation cartésienne, on va voir comment déterminer un nouveau repère du plan dans lequel l'équation est plus simple pour la conique étudiée.

**Les coniques à centres.** Soit  $\mathcal{C}$  est une conique d'excentricité  $e \neq 1$ . D'après la représentation géométrique, il est clair que  $\mathcal{C}$  admet un centre de symétrie.

Or l'équation

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 - 2epx - p^2 = 0.$$

de  $\mathcal{C}$  dans le repère  $\mathcal{R}_F$  permet de déterminer les coordonnées de ce centre  $\Omega$ . En effet,  $\Omega$  n'est autre que le milieu du segment  $[SS']$ . Or les coordonnées des sommets  $S$  et  $S'$  sont données par le système

$$\begin{cases} y = 0 \\ (1 - e^2)x^2 + y^2 - 2epx - p^2 = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on obtient

$$S = \left(-\frac{p}{e+1}, 0\right)_{\mathcal{R}_F}, \quad S' = \left(-\frac{p}{e-1}, 0\right)_{\mathcal{R}_F}$$

et

$$\Omega = \left(\frac{ep}{1 - e^2}, 0\right)_{\mathcal{R}_F}$$

Une fois que l'on connaît les coordonnées du centre  $\Omega$ , on peut établir un lien entre les coordonnées  $(x, y)_{\mathcal{R}_F}$  dans  $\mathcal{R}_F$  et  $(X, Y)_{\mathcal{R}_\Omega}$  d'un vecteur du plan :

$$\begin{cases} X = x - \frac{ep}{1-e^2} \\ Y = y \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = X + \frac{ep}{1-e^2} \\ y = Y \end{cases}$$

L'équation de la conique dans le repère  $\mathcal{R}_\Omega$  est alors donnée par

$$\begin{aligned} (1-e^2)\left(X + \frac{ep}{1-e^2}\right)^2 - 2ep\left(X + \frac{ep}{1-e^2}\right) + Y^2 &= p^2 \\ \Leftrightarrow (1-e^2)X^2 + Y^2 &= \frac{p^2}{1-e^2} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1-e^2}{p}\right)^2 X^2 + \frac{1-e^2}{p^2} Y^2 &= 1 \end{aligned}$$

C'est encore un polynôme du second degré en deux variables, mais dans lequel n'apparaissent que les deux carrés  $X^2$  et  $Y^2$ .

On note de plus que le coefficient de  $X^2$  est toujours positif et que le signe du coefficient de  $Y^2$  dépend de la nature de la conique à centre. Ainsi, pour toute conique à centre, si l'on note encore  $x$  et  $y$  les coordonnées d'un point du plan dans le repère  $\mathcal{R}_\Omega$ , il existe des réels  $a, b > 0$  tels que son équation dans le repère  $\mathcal{R}_\Omega$  soit de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{si } e < 1 \quad \text{i.e. si } \mathcal{C} \text{ est une ellipse}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{si } e > 1 \quad \text{i.e. si } \mathcal{C} \text{ est une hyperbole}$$

**Les paraboles.** Si  $\mathcal{C}$  est une parabole ( $e = 1$ ), elle n'a pas de centre. Elle possède également un unique sommet  $S$ . Puisque  $e = 1$ , on peut montrer que les coordonnées de  $S$  dans  $\mathcal{R}_F$  sont données par

$$S = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_F}.$$

(où  $d$  est à la fois la distance du foyer à la directrice et le paramètre de la parabole).

L'équation réduite d'une parabole est alors obtenue en déplaçant le repère  $\mathcal{R}_F$  au sommet  $S$ . En effet, pour tout point  $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_F} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_S}$  du plan, on a alors

$$\begin{cases} x = X - \frac{d}{2} \\ y = Y \end{cases}$$

En injectant ces expressions dans l'équation  $y^2 - 2dx = d^2$ , on obtient l'équation de la parabole dans le repère  $\mathcal{R}_S$  :

$$Y^2 - 2d\left(X - \frac{d}{2}\right) = d^2$$

$$\Leftrightarrow Y^2 = 2dX$$

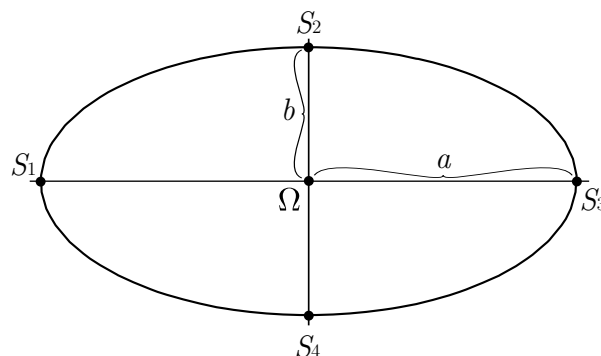
## 1.5 Sommets et distances remarquables

À partir de l'équation réduite d'une conique  $\mathcal{C}$ , on peut facilement montrer que pour une conique à centre, les axes du repère  $\mathcal{R}_\Omega$  sont des axes de symétrie. On peut également déterminer les sommets de  $\mathcal{C}$  et donner un sens géométrique aux coefficients  $a$  et  $b$  (dans le cas d'un repère orthonormé) :

- Une ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  a quatre sommets

$$S_1 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_\Omega}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_\Omega}$$

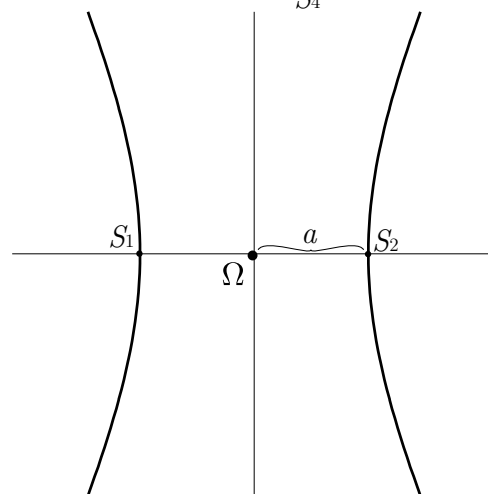
$$S_3 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_\Omega}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_\Omega}$$



- Une hyperbole d'équation  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  a deux sommets

$$S_1 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_\Omega}$$

$$S_2 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_\Omega}$$



- Une parabole d'équation  $y^2 = 2px$  a un seul sommet  $S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_S}$ .

**Exemple** : étant donnée une droite  $\mathcal{D}$  du plan, on note  $\mathcal{C}$  la conique de directrice  $\mathcal{D}$ , d'excentricité  $e = \frac{1}{2}$  et de paramètre  $p = 1$ .



1. Tracer la droite  $\mathcal{D}$  verticalement et placer le foyer  $F$  ainsi que l'axe focal  $\Delta$  de  $\mathcal{C}$  (on pourra commencer par calculer la distance  $d$  entre  $\mathcal{D}$  et  $F$ ).
2. On note  $\mathcal{R}_F$  le repère orthonormé du plan centré en  $F$  et dont l'axe horizontal est donné par  $\Delta$  et on note  $(x, y)_{\mathcal{R}_F}$  les coordonnées dans  $\mathcal{R}_F$  d'un point  $M$  quelconque du plan.
  - (a) Donner l'équation de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{R}_F$ .
  - (b) Montrer rapidement que  $\Delta$  est un axe de symétrie de  $\mathcal{C}$ .
  - (c) Déterminer les coordonnées dans  $\mathcal{R}_F$  des deux sommets de  $\mathcal{C}$  qui sont sur  $\Delta$ .
  - (d) En déduire les coordonnées dans  $\mathcal{R}_F$  du centre de symétrie  $\Omega$  de  $\mathcal{C}$ .
3. On note  $\mathcal{R}_\Omega$  le repère du plan obtenu en déplaçant  $\mathcal{R}_F$  en  $\Omega$  et on note  $(X, Y)_{\mathcal{R}_\Omega}$  les coordonnées d'un point  $M$  du plan dans  $\mathcal{R}_\Omega$ .
  - (a) Exprimer  $(x, y)_{\mathcal{R}_F}$  en fonction de  $(X, Y)_{\mathcal{R}_\Omega}$  (on pourra se baser sur la relation vectorielle  $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{M\Omega} + \overrightarrow{\Omega F}$ ).
  - (b) En déduire l'équation de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{R}_\Omega$ .
  - (c) Montrer que l'axe vertical de  $\mathcal{R}_\Omega$  est un axe de symétrie de  $\mathcal{C}$ .
  - (d) Déterminer les coordonnées des deux derniers sommets de  $\mathcal{C}$ .
4. Tracer une esquisse de  $\mathcal{C}$  (on pourra calculer d'autres points à l'aide de l'équation réduite).

## 1.6 Paramétrisation d'une conique

À partir des équations réduites, on obtient rapidement une paramétrisation des coniques.

**Rappel :** la paramétrisation d'une courbe du plan, dans un repère  $\mathcal{R}$  fixé est la donnée de deux fonctions  $x$  et  $y$  de  $t$  et d'un intervalle  $I$  tel que l'ensemble des points  $(x(t), y(t))$ ,  $t \in I$  recouvrent toute la courbe.

Ainsi,

1. Si  $\mathcal{C}$  est une ellipse d'équation réduite  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , une paramétrisation de  $\mathcal{C}$  est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t) \\ y(t) = b \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi[.$$

2. Si  $\mathcal{C}$  est une hyperbole d'équation réduite  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , une paramétrisation de  $\mathcal{C}$  est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = a \cosh(t) \\ y(t) = b \sinh(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

3. Si  $\mathcal{C}$  est une parabole d'équation réduite  $y^2 = 2px$ , une paramétrisation de  $\mathcal{C}$  est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{2p} \\ y(t) = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Exercice** : vérifier que dans chaque cas, les points décrits par les paramétrisations données sont bien des points de  $\mathcal{C}$ .

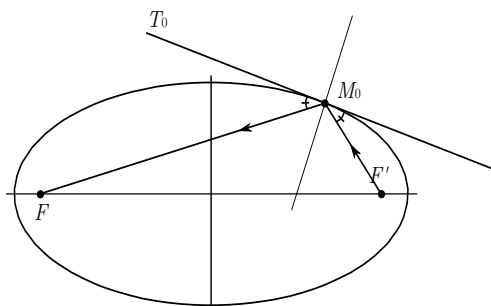
## 1.7 Tangentes à une conique

Les équations cartésiennes des coniques permettent de montrer que l'on peut tirer des tangentes à une conique en chacun de ses points. Ces équations nous permettent également de déterminer les équations de ces tangentes (voir TD).

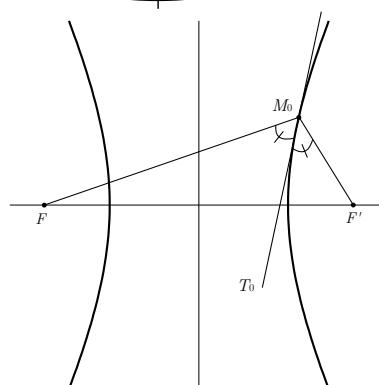
L'étude poussée des tangentes à une conique permet d'en obtenir des propriétés géométriques. Ce sont en particulier ces propriétés qui sont souvent exploitées en physique des ondes.

Précisément, on a les propriétés suivantes :

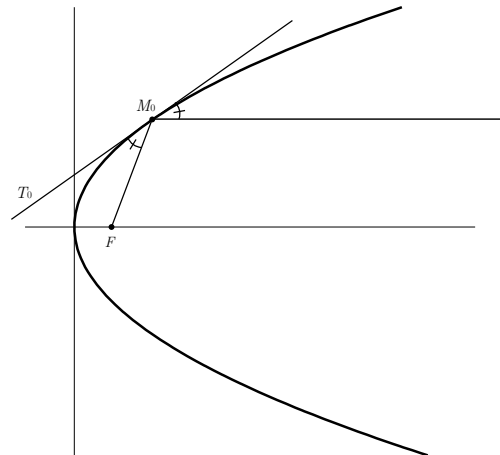
- si  $\mathcal{C}$  est une ellipse de foyers  $F$  et  $F'$ , la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M$  est la bissectrice extérieure de l'angle  $((MF), (MF'))$ .



- si  $\mathcal{C}$  est une hyperbole de foyers  $F$  et  $F'$ , la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M$  est la bissectrice intérieure de l'angle  $((MF), (MF'))$ .



- si  $\mathcal{C}$  est une parabole de foyer  $F$  et d'axe focal  $\Delta$ , la tangente à  $\mathcal{C}$  en  $M$  est la bissectrice extérieure de l'angle  $((MF), \Delta_M)$  où  $\Delta_M$  est la parallèle à  $\Delta$  passant par  $M$ .



## 1.8 Équations cartésienne et réduction

Dans tous les repères que nous avons choisi, l'équation d'une conique est un polynôme de degré 2 en les coordonnées  $x$  et  $y$ . On peut montrer que c'est le cas quel que soit le repère que l'on se fixe. Ainsi, de façon générale, on appelle désormais conique toute courbe du plan dont les coordonnées dans un repère donné sont liées par une équation de la forme

$$P(x, y) = 0$$

où  $P(x, y)$  est un polynôme de la forme

$$P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f. \quad (*)$$

En prenant  $b = d = e = 0$  et  $f = -1$ , on retrouve l'équation réduite d'une conique à centre. En prenant  $a = b = e = f = 0$ , on retrouve l'équation réduite d'une parabole.

**Note :** cette nouvelle définition englobe plus de cas que la définition géométrique. Elle permet notamment d'inclure les cercles dans l'ensemble des coniques en prenant  $a = c = 1$ ,  $b = d = e = 0$  et  $f = -R^2$ .

Cette définition permet également de voir n'importe quelle droite du plan comme une conique. On dit que ce sont des coniques *dégénérées*. De façon générale, les coniques dégénérées sont toutes les figures géométriques correspondant à la définition analytique mais qui ne sont pas des coniques usuelles. Il y en a trois types :

- les droites ( $a = b = c = 0$ ),
- le centre du repère, ( $a, c > 0, b = d = e = f = 0$ ),
- les couples de droites passant par  $(0, 0)$  ( $a > 0, c < 0, b = d = e = f = 0$ ).

**Question :** étant donné un polynôme  $P(x, y)$ , comment déterminer la nature de la conique associée ?

On peut bien sûr commencer par calculer et placer quelques points dans un repère. Cependant, on peut également procéder de façon analytique.

En effet, on peut montrer que la nature de la conique d'équation (\*) ne dépend en réalité que de la partie quadratique du polynôme  $P$  :

$$Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

Pour déterminer la nature de la conique associée à  $P$ , il suffit alors de modifier l'expression  $Q(x, y)$  afin d'obtenir une somme de carrés (on dit que l'on fait disparaître le terme rectangle  $bxy$ ).

Pour cela, on effectue la mise sous forme canonique de  $Q(x, y)$  :

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= ax^2 + bxy + cy^2 \\ &= a \left( x - \frac{b}{2a}y \right)^2 + \left( c - \frac{b^2}{4a} \right) y^2 \end{aligned}$$

**Note** : pour que cela soit valide, il faut que  $a \neq 0$ . On supposera donc que c'est toujours le cas (dans le cas contraire, on inverse les rôles de  $x$  et  $y$  dans la mise sous forme canonique). On supposera même que  $a > 0$  (on peut en effet toujours se placer dans ce cas là en choisissant le bon côté de l'équation  $P(x, y) = 0$ ).

En posant alors le changement de variable

$$(C_1) : \begin{cases} X = x - \frac{b}{2a}y \\ Y = y \end{cases}$$

on obtient une nouvelle expression  $\tilde{Q}(X, Y)$  pour la partie quadratique de  $\mathcal{C}$  :

$$\tilde{Q}(X, Y) = aX^2 + \beta Y^2$$

avec  $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$ .

En effectuant le changement de variable  $(C_1)$  dans le polynôme  $P(x, y)$ , on obtient un nouveau polynôme  $\tilde{P}(X, Y)$  de la forme

$$\tilde{P}(X, Y) = aX^2 + \beta Y^2 + \gamma X + \delta Y - K.$$

En traitant séparément les variables  $X$  et  $Y$ , on peut encore réduire l'équation de  $\mathcal{C}$  en faisant disparaître la partie linéaire  $\gamma X + \delta Y$  en mettant sous forme canonique les polynômes  $aX^2 + \gamma X$  et  $\beta Y^2 + \delta Y$ .

**ATTENTION** : l'équation que l'on obtient à l'issue de cette dernière réduction ressemble beaucoup aux équations réduites que l'on a vu plus haut. Cependant, contrairement au cas géométrique, les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  que l'on obtient par la méthode analytique n'ont en général pas de sens géométrique. Cela vient en particulier du fait que les changements de variables que l'on effectue au cours du calcul correspondent à des changements de repères entre des repères qui ne sont pas nécessairement orthonormés.

Cependant, ce calcul produit une méthode rapide pour déterminer la nature d'une conique associée à un polynôme  $P$ . Cette nature dépend en effet du signe du coefficient  $\beta$  dans la forme canonique  $\tilde{Q}(X, Y)$ . Or puisque  $a > 0$ , le signe de  $\beta$  dépend uniquement du signe du discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  de la forme quadratique  $Q(x, y)$ . Précisément :

- Si  $\Delta < 0$ , alors  $\mathcal{C}$  est soit vide, soit un point, soit une ellipse (éventuellement un cercle).
- Si  $\Delta = 0$ , alors  $\mathcal{C}$  est soit vide, soit une droite, soit la réunion de deux droites parallèles, soit une parabole.
- Si  $\Delta > 0$ , alors  $\mathcal{C}$  est soit la réunion de deux droites sécantes, soit une hyperbole.

**Note** : les cas distingués ci-dessus sont des cas généraux. Ainsi, une ellipse peut être vide, une hyperbole peut être la réunion de deux droites sécantes, une parabole peut être en fait une ou deux droites parallèles...

**Exemple** : on se place dans un repère quelconque du plan et l'on considère la courbe  $\mathcal{C}$  du plan d'équation

$$x^2 - 2xy + 3y^2 - x + 1 = 0.$$

Quelle est la nature de la courbe ?

## 1.9 Quadriques

On peut facilement généraliser la notion de polynôme de degré 2 au cas de trois variables  $(x, y, z)$  :

$$P(x, y, z) = \underbrace{q_1x^2 + q_2y^2 + q_3z^2 + q_4xy + q_5xz + q_6yz}_{\text{forme quadratique}} + \underbrace{\ell_1x + \ell_2y + \ell_3z}_{\text{partie linéaire}} + \underbrace{K}_{\text{cste}} = 0$$

Or en dimension 3, la donnée d'une contrainte de la forme  $P(x, y, z) = 0$  sur les coordonnées associées à un repère quelconque de l'espace définit une surface (un plan dans le cas où l'équation est linéaire).

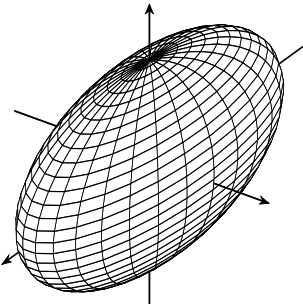
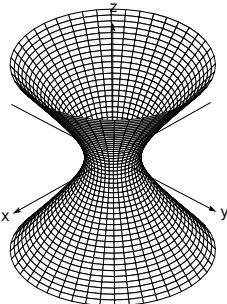
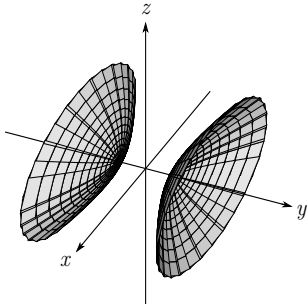
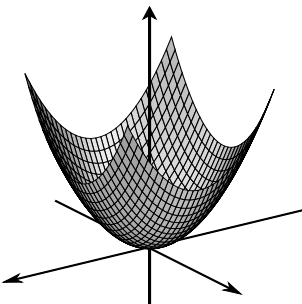
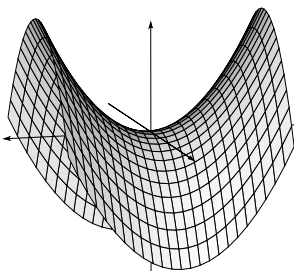
On appelle *quadrique* toute surface de l'espace ayant pour équation dans un repère donné une expression de la forme

$$P(x, y, z) = 0$$

où  $P$  est un polynôme de degré 2.

Comme en dimension 2, il existe pour chaque quadrique  $\mathcal{Q}$  un repère de l'espace dans lequel l'équation de  $\mathcal{Q}$  est réduite.

Là encore, la forme de l'équation réduite donne la nature de la quadrique étudiée :

<p style="text-align: center;">Ellipsoïde</p>  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	<p style="text-align: center;">Hyperboloïde à une nappe</p>  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$	<p style="text-align: center;">Hyperboloïde à deux nappes</p>  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
<p style="text-align: center;">Paraboloïde elliptique</p>  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$	<p style="text-align: center;">Paraboloïde hyperbolique</p>  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$	

**Note** : l'intersection d'une quadrique et d'un plan de l'espace produit une conique. Par exemple, l'intersection d'un ellipsoïde et du plan d'équation  $x = 0$  est l'ensemble des points

de l'espace vérifiant le système

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

On retrouve l'équation

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

d'une ellipse dans le plan  $(yOz)$ .

**Exercice** : à partir des équations données ci-dessus, déterminer pour chaque quadrique la nature des courbes obtenues par intersection avec les plans coordonnées.

**Note** : de façon générale, étudier l'intersection d'une surface avec les plans du repère (ou même tout plan de l'espace) donne un moyen efficace de se faire une idée de la forme générale de la surface.

Enfin, toujours comme en dimension 2, on peut montrer que la nature d'une quadrique dépend uniquement de la partie quadratique de son équation.

Il existe d'autre part des méthodes analogues à la mise sous forme canonique qui permettent de réécrire cette partie quadratique sous la forme d'une somme de carrés : la méthode de Gauss. La nature de la quadrique étudiée est alors donnée par le nombre de coefficients non nuls de cette nouvelle écriture et le signe des coefficients non nul.

**Méthode de Gauss** : comme en dimension 2, la méthode de Gauss est basée sur la mise sous forme canonique d'un polynôme en l'adaptant au cas de trois variables :

**Exercice** : mettre sous forme réduite le polynôme

$$P(x, y, z) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4yz + 2z^2 + 4xz.$$

À quel type de quadrique est-il associé ?

Enfin, la notion de polynôme de degré 2 se généralise à un nombre quelconque  $n$  de variables. Dans un espace de dimension  $n$  muni d'un repère, la donnée d'une contrainte de la forme

$$P(x_1, \dots, x_n) = 0$$

définit une partie de cet espace. On appelle encore quadrique toute partie d'un espace de dimension  $n$  défini par une relation de la forme  $P(x_1, \dots, x_n) = 0$  où

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} q_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n \ell_i x_i + K$$

est un polynôme de degré 2 en  $n$  variables.

Ces hypersurfaces ont les mêmes propriétés analytiques et géométriques que les coniques et les quadriques de l'espace. On peut en particulier les mettre sous forme réduite et les classer selon le signe des coefficients obtenus.

On peut alors montrer que la nature de la quadrique ne dépend que de la partie quadratique

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} q_{ij} x_i x_j$$

L'étude de ces formes quadratiques fait l'étude de la partie suivante.

## 2 Formes quadratiques

On l'a vu, la partie *forme quadratique* des équations de coniques ou de quadriques joue un rôle important. C'est en particulier la seule chose qui reste quand on passe aux équations réduites.

Or l'algèbre linéaire donne un outil très efficace pour trier et traiter les formes quadratiques. On peut en particulier mettre en place une représentation matricielle des formes quadratiques (bien que le procédé soit un peu moins naturel que dans le cas des applications linéaires).

### 2.1 Expression analytique d'une forme quadratique

#### 2.1.1 Notations

D'un point de vue analytique, une forme quadratique en  $n$  variables est un polynôme homogène de degré 2 en les variables  $x_1, \dots, x_n$ . On peut donc l'écrire sous la forme

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} x_i x_j. \quad (1)$$

On peut également distinguer la partie carrée de la partie rectangle :

$$q(X) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j \quad (2)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_i x_j \quad (3)$$

**Exercice** : écrire la forme quadratique suivante sous la forme 1 puis sous la forme 3 :

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2 + x_3 x_4 + x_4^2 + x_1 x_4 + x_1 x_3 + x_2 x_4.$$



### 2.1.2 Mise sous forme réduite

Quelque soit le nombre  $n$  de variable, une forme quadratique  $q(x_1, \dots, x_n)$  peut se mettre sous forme réduite. La méthode d'obtention de cette forme réduite est exactement la même qu'en dimension 2 ou 3.

**Note** : puisque contrairement aux cas géométriques on ne conserve que la partie quadratique, la forme réduite ici correspond à une somme de carrés. Précisément, toute forme quadratique  $q$  en  $n$  variables  $(x_1, \dots, x_n)$  peut s'écrire sous la forme

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i \ell_i(x_1, \dots, x_n)^2$$

où chaque  $\ell_i$  est une fonction de la forme

$$\ell_i(x_1, \dots, x_n) = \alpha_{i1}x_1 + \dots + \alpha_{in}x_n.$$

En posant le changement de variables

$$y_i = \ell_i(x_1, \dots, x_n) \tag{4}$$

on obtient une nouvelle expression de  $q$  sous la forme

$$\tilde{q}(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n a_i y_i^2.$$

**Attention** : de façon générale, une même forme quadratique possède plusieurs formes réduites. Cependant, pour que le changement de variables 4 soit valide, il faut que les fonctions  $\ell_i$  soient linéairement indépendantes. On peut toujours s'arranger pour que ce soit le cas, mais cela nous oblige à être vigilant en pratique.

La rigueur de la méthode de Gauss permet d'être sur que les formes linéaires que l'on obtient sont indépendantes.

À l'aide de ces techniques algorithmiques, on peut notamment montrer que toutes les formes réduites d'une même forme quadratique ont des caractéristiques en commun. Précisément, on peut montrer que le nombre de coefficients  $a_i$  non nuls est toujours le même, ainsi que les signes des coefficients  $a_i$  restants.

On appelle alors

- *rang de  $q$*  (noté  $\text{rg}(q)$ ) le nombre de carrés de l'une de ses formes réduites valides,
- *signature de  $q$*  (notée  $\sigma(q) = (+, -)$ ) le nombre de coefficients positifs et négatifs dans l'une de ses formes réduites valides.

D'un point de vue géométrique, on peut noter que ces paramètres permettent de définir la nature de la conique ou de la quadrique associée à  $q$ .

**Exemple** : écrire la forme quadratique ci dessous sous la forme de somme de carrés indépendants :

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 + x_3x_4 + x_4^2.$$

En déduire le rang et la signature de  $q$ .

## 2.2 Définition matricielle

En définissant les formes quadratiques à l'aide du produit matriciel, on obtient un outil efficace pour étudier les formes quadratiques et en déduire par exemples ces caractéristiques par des méthodes algorithmiques. D'autre part, le point de vue matriciel permet également de formaliser les changements de bases qui correspondent aux changements de variables décrits plus haut. Avant cela, un petit rappel sur les matrices.

### 2.2.1 Rappels

**Transposée.** Étant donnée une matrice  $A$ , la transposée de  $A$  est la matrice  ${}^tA$  obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de  $A$ . Dans le cas où  $A$  est une matrice carrée, la matrice  ${}^tA$  est obtenue en effectuant, dans  $A$ , une symétrie par rapport à la diagonale. Dans le cas d'un vecteur colonne  $X$ ,  ${}^tX$  est le vecteur colonne ayant les mêmes coordonnées que  $X$ .

**Matrices symétriques.** Une matrice carrée  $A$  est dite symétrique si ses coefficients sont symétriques par rapport à sa diagonale. Ainsi, en dimension 2, une matrice symétrique est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

On peut alors noter qu'une matrice symétrique est égale à sa transposer. On peut même s'en servir de définition : une matrice  $A$  sera dite symétrique si  ${}^tA = A$ .

**Changement de base.** Une base de  $\mathbb{R}^n$  est une famille de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  qui est à la fois libre et génératrice.

Il existe une infinité de bases pour  $\mathbb{R}^n$  et à chacune de ces bases est associé un système de coordonnées.

Si l'on se fixe deux bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  de  $\mathbb{R}^n$ , on appelle *matrice de passage* de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_2$  la matrice carrée inversible dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de  $\mathcal{B}_2$  exprimés dans  $\mathcal{B}_1$ . Les coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)_{\mathcal{B}_1}$  et  $(x'_1, \dots, x'_n)_{\mathcal{B}_2}$  d'un même vecteurs sont alors liées par la relation matricielle

$$X = PX'.$$

### 2.2.2 Matrice d'une forme quadratique

Concernant les formes quadratique, on va voir que l'on peut représenter toute forme quadratique en  $n$  variables comme un produit matriciel basé sur une matrice carrée de taille  $n$ . Soit par exemple

$$q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

En notant  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ , on a

$$q(x, y) = {}^t X A X.$$

**Remarques :**

- La matrice  $A$  associée à la forme quadratique  $q$  est symétrique.
- On pourra noter une forme quadratique en 2 variables sous la forme

$$q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

de telle sorte que la matrice  $A$  associée soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ .

De façon générale, à toute forme quadratique  $q(x_1, \dots, x_n)$  on peut associer une matrice  $A$  carrée de taille  $n$  et symétrique telle que si  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ , on a

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad q(x_1, \dots, x_n) = {}^t X A X.$$

Si l'on note  $a_{ij}$  les coefficients de la matrice  $A$ , la forme quadratique associée est

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} a_{ij} x_i x_j.$$

### 2.2.3 Réduction matricielle

La notation matricielle que l'on vient de voir sert, entre autres, à réduire les formes quadratiques. Elle permet même de retrouver la forme réduite des équations de coniques et quadriques.

Précisément, si une forme quadratique  $q$  est réduite, elle ne contient aucun terme rectangle. Les coefficients associés sont donc nuls dans la matrice de  $q$ . Les seuls coefficients non nuls de cette matrice sont donc sur la diagonale, autrement dit, cette matrice est diagonale.

Pour réduire une forme quadratique, il faut donc déterminer une base de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle la matrice de  $q$  est diagonale.

Or soient  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  deux bases de  $\mathbb{R}^n$  telles que la forme quadratique  $q$  soit représentée par la matrice  $A$  dans  $\mathcal{B}_1$  et  $A'$  dans  $\mathcal{B}_2$  et soit  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}_1$  à  $\mathcal{B}_2$ . Dans  $\mathcal{B}_1$ , on a

$$q(x, y) = {}^t X A X \quad (*)$$

et dans  $\mathcal{B}_2$ , on a

$$q(x', y') = {}^t X' A' X'. \quad (**)$$

De plus, les vecteurs  $X$  et  $X'$  sont liés par la relation  $X = P X'$ . En injectant cette relation dans (\*), on obtient

$$\begin{aligned} {}^t X A X &= {}^t (P X') A (P X) \\ &= {}^t X' ({}^t P A P) X \end{aligned}$$

En identifiant cette dernière expression avec l'équation (\*\*), on obtient un lien entre deux matrices représentant une même forme quadratique dans deux bases différentes :

$$A' = {}^t P A P.$$

Ainsi, pour réduire une forme quadratique  $q$  définie par une matrice  $A$ , il suffit de trouver une matrice  $P$  telle que le produit  ${}^t P A P$  soit diagonale.

Or on sait, à l'aide des valeurs propres et vecteurs propres de  $A$ , trouver une matrice  $P$  telle que le produit  $P^{-1} A P$  soit diagonale. En adaptant cette méthode, on peut faire en sorte que la matrice de passage donnée par les vecteurs propres de  $A$  soit telle que

$${}^t P = P^{-1}.$$

Il suffit pour cela que la base de vecteurs propres que l'on choisit pour construire la matrice  $P$  soit orthonormée. Or on peut montrer que pour une matrice symétrique, on peut toujours trouver une BON formée de vecteurs propres pour  $A$ .

**Exemple :** On fixe un repère  $\mathcal{R}$  du plan et l'on considère les courbes du plan associées à la forme quadratique

$$q(x, y) = 6x^2 + 4xy + 3y^2.$$

1. Déterminer la matrice  $A$  de  $q$  dans  $\mathcal{R}$ .
2. Déterminer les valeurs propres de  $A$ .
3. En déduire un repère orthonormé du plan formé de vecteurs propres de  $A$ .
4. Déterminer la matrice de  $q$  dans ce nouveau repère.
5. Déterminer le rang et la signature de  $q$ .
6. Quel est le type de surfaces étudié ?