Cours de mathématiques fondamentales
1° année, DUT GEA

Mourad Abouzaïd

9 décembre 2008

Table des matières

Introduction

Beaucoup de problèmes concrets, notamment en terme de gestion peuvent se traduire en problèmes mathématiques. C'est ce que l'on appelle la mise en équation. On dispose alors de toute une batterie d'outils et de techniques mathématiques pour résoudre ce problème. Dans ce cours, on commencera par revoir quelques techniques de calcul de base, indispensable à n'importe quelle étude mathématique. On verra ensuite trois outils particuliers, et quelques applications :

- les systèmes linéaires, que l'on appliquera à la progression linéaire (un problème d'optimisation),
- les fonctions d'une variable réelle (continuité, dérivée, fonctions usuelles), que l'on appliquera à des problèmes d'analyse marginale et d'élasticité.
- les suites arithmétiques et géométriques que l'on appliquera à du calcul d'intérêts.

0 Rappels d'algèbre élémentaire

0.1 Calcul algébrique

Faire du calcul algébrique, c'est utiliser toutes les règles que l'on vient de voir, en utilisant, soit des chiffres, soit des lettres, soit (bien souvent...) les deux. Les lettres représentent alors des inconnues, ou des paramètres, et doivent être traités comme des chiffres (dont on ne connaît pas la valeur).

0.1.1 Développer, factoriser

Factoriser une expression, c'est transformer une somme en produit. Pour cela, il faut commencer par trouver un facteur commun à **tous** les termes de la somme que l'on veut factoriser. Ainsi,

$$\underline{a} \times b \,+\, \underline{a} \times c \,=\, a \times (b+c).$$

Exemples :

1. $6x + 3y = \underline{3} \times 2x + \underline{3}y = 3(2x+y)$.
2. $3\underline{(x-1)} - (x+2)\underline{(x-1)} = (x-1)(3-(x+2)) = (x-1)(-x+1)$.

Développer une expression, c'est transformer un produit en somme (c'est l'opération inverse de la factorisation). Ainsi :

$$a \times (b+c) \,=\, a \times b + a \times c.$$

Et de façon plus générale :

$$(a+b) \times (c+d) \,=\, ac + ad + bc + bd.$$

Exemples :

1. $3(2x-1) = 6x - 3$.
2. $5[1-2(1-a)] = 5 - 10(1-a) = 5 - 10 + 10a = 10a - 5$.
3. $(x-1)(x-2) = x^2 - 2x - x + 2 = x^2 - 3x + 2$.
4. $(x-3)(x+3) = x^2 + 3x - 3x - 9 = x^2 - 9$.

0.1.2 Identités remarquables

Pour rendre les calculs plus rapide, il existe certaines identités qui doivent être connues : les identités remarquables. (Notons que si on ne les connaît pas, on peut les retrouver à l'aide des règles de calcul que l'on vient de voir...). Elles sont au nombre de trois :

1.	$(a+b)^2$	$=$	$a^2+2ab+b^2$
2.	$(a-b)^2$	$=$	$a^2-2ab+b^2$
3.	$(a+b)(a-b)$	$=$	a^2-b^2

ATTENTION

on voit bien ici qu'en particulier

$$(a+b)^2 \neq a^2+b^2$$

Exemples :

1. $(x+5)^2 = x^2+10x+25$, $4x^2+12x+9 = (2x+3)^2$.
2. $(4x-y)^2 = 16x^2-8xy+y^2$, $x^2-14x+49 = (x-7)^2$.
3. $(2-3x)(2+3x) = 4-9x^2$, $x^2-1 = (x-1)(x+1)$,
   $(3x-1)^2-9 = (3x-1-3)(3x-1+3) = (3x-4)(3x+2)$.

Si l'on veut développer des expressions du type $(a+b)^n$ pour un entier n plus grand que 2, on pourra utiliser ces identités remarquable, et le fait que $(a+b)^n = (a+b)\times(a+b)^{n-1}$.

Exemples :

1. $(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) = a^3+3a^2b+3ab^2 = b^3$.
2. $(x-1)^4 = (x-1)^2(x-1)^2 = (x^2-2x+1)(x^2-2x+1) = \ldots = x^4-4x^3+6x^2-4x+1$.

Remarque : il existe une formule générale pour développer les expressions du type $(a+b)^n$ appelé binôme de Newton, qui fait notamment intervenir les *coefficients binomiaux*.

0.2 Manipulation des puissances

La puissance (ou l'exposant) est une notation. Ainsi, si a est un nombre et n un entier, a^n est le produit de a par lui même n fois.

$$a^n = \underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n \text{ fois}}.$$

0.2.1 Règles de calcul

Soient a et b des nombres réels et soient m et n des entiers.

$a^m \times a^n = a^{m+n}$	$(a \times b)^m = a^m \times b^m$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ En particulier, $\dfrac{1}{a} = a^{-1}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$ En particulier, $\left(\dfrac{1}{a}\right)^m = \dfrac{1}{a^m}$

Attention : il n'y a pas de formule simple pour exprimer $(a+b)^n$...

Exemples :

1. $(x^2)^3 + (x^3)^2 = x^6 + x^6 = 2x^6$.
2. $(x + x + x)^2 = (3x)^2 = 3^2x^2 = 9x^2$.

Pour pour factoriser une somme dont les termes contiennent des puissances, l'exposant donne le nombe de facteurs indentiques. Ainsi, si une expression apparaît dans plusieurs termes à des puissances différentes, le facteur commun est l'expression en question à la plus petite puissance.

Exemples :

1. $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$.
2. $18x^4 + 24x^3 + 12x^5 = 6x^3(3x + 4 + 2x^2)$.

0.2.2 Racines carrées

La racine carrée peut être vue comme une puissance 1/2 : $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. Ainsi, toutes les formules que l'on vient de voir pour les puissances entières s'appliquent à la racine, vue comme une puissance. En particulier, on a $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$. De plus, on n'a pas de formule simple pour $\sqrt{a+b}$.

0.3 Fraction

Une fraction est un quotient (une division) $\frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers (b étant évidement non nul). l'entier a est le *numérateur* et l'entier b est le *dénominateur*.

Remarque : si a est plus petit que b, la fraction $\dfrac{a}{b}$ est plus petite que 1. Si a est plus grand que b, la fraction $\dfrac{a}{b}$ est plus grande que 1.

0.3.1 Multiplication et division de fractions

Pour multiplier deux fractions, il suffit de multiplier les numérateurs entre eux, et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

Pour diviser, on multiplie par l'inverse. Ainsi, pour diviser une fraction par $\frac{c}{d}$, on la multiplie par $\frac{d}{c}$:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

0.3.2 Simplification d'une fraction

Si pour une fraction $\frac{a}{b}$ donnée, les entiers a et b on un facteur en commun, on peut simplifier par ce facteur commun sans changer la valeur de la fraction. Ainsi, si $a = d \times a'$ et $b = d \times b'$, alors

$$\frac{a}{b} = \frac{\cancel{d} \times a'}{\cancel{d} \times b'} = \frac{a'}{b'}.$$

Exemple : $\frac{20}{15} = \frac{\cancel{5} \times 4}{\cancel{5} \times 3} = \frac{4}{3}$.

Il est fortement conseillé de travailler autant que possible avec des fractions simplifiées.

Pour simplifier une fraction, une méthode générales consiste à utiliser la *décomposition en facteurs premiers*. En effet, tout nombre entier peut se factoriser au maximum. (Les facteurs que l'on obtient alors sont des *nombres premiers*). Or une fois que le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont décomposés au maximum, il est plus facile de déterminer s'ils ont des facteurs en commun.

Exemple : $\frac{72}{60} = \frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3} \times 3}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 5} = \frac{6}{5}$.

0.3.3 Addition de fractions

On ne peut additionner deux fractions que si elles ont le même dénominateur. Dans ce cas, on additionne alors les numérateurs.

$$\frac{a}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{d}.$$

Si l'on veut additionner deux fractions qui n'ont pas le même dénominateur, il faut commencer par leur trouver un dénominateur commun. Or, comme pour la simplification, si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un facteur commun, on ne change pas la valeur de cette fraction (en fait, on la multiplie par 1). Ainsi, si l'on a deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ on peut multiplier le numérateur et le dénominateur de $\frac{a}{b}$ par d et le numérateur et le dénominateur de $\frac{c}{d}$ par b. On obtient deux fractions, égales aux fractions précédentes et qui ont pour dénominateur le produit ab.

$$\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd} \quad \text{et} \quad \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}.$$

Ainsi,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

Remarque : il se peut que les dénominateurs b et d est un facteur commun plus petit que le produit bd. Il en existe même un plus petit que tous les autres : le *pgcd*. Si l'on peut trouver rapidement le pgcd de b et d, on peut l'utiliser pour la mise au même dénominateur et l'on simplifie ainsi les calculs...

Exemple : faire la somme de $\frac{5}{6}$ et $\frac{3}{4}$ en commençant par mettre ces deux fractions sur 24, puis en cherchant leur pgcd.

0.4 Fractions algébriques

Les fractions algébriques sont des fractions dont le numérateur et le dénominateur ne sont plus seulement des nombres entiers, mais peuvent également être des expressions algébriques.

Exemples : $\frac{1}{x-1}, \frac{x^2-3}{(x-2)(x+6)}$.

Les règles de calcul sont exactement les mêmes que pour les fractions d'entiers : on multiplie directement, on additionne en mettant au même dénominateur, et l'on pense à simplifier à chaque étape. Ces opérations peuvent cependant prendre plus de temps que pour des fractions d'entiers, étant donnée la complexité des expressions que l'on manipule. En particulier, on utilisera la factorisation et le développement pour déterminer les dénominateurs communs et simplifer.

Remarque : il faut faire un peu plus attention à la division par 0 lorsque l'on travaille avec des fractions algébriques. Il faut en particulier eliminer certaines valeurs des paramètres : celles qui annulent le dénominateur. Ainsi, dans le premier exemple donné plus haut, il faut éliminer la valeur $x = 1$, et dans le second, il faut éliminer les valeurs $x = 2$ et $x = -6$.

Exemples :

1. $\frac{y-1}{x-2} \times \frac{x}{y} = \frac{x(y-1)}{y(x-2)}$ pour $x \neq 2$ et $y \neq 0$.
2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x(x-1)} + \frac{x}{x(x-1)} = \frac{2x-1}{x(x-1)}$ pour $x \neq 0$ et $x \neq 1$.
3. $\frac{3(x-2)+(x-2)(x-3)}{x^2-4} = \frac{(x-2)(3+x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x}{x+2}$ pour $x \neq \pm 2$.

Chapitre 1

Systèmes linéaires, programmation linéaires

1.1 Mise en équation

Lorsque l'on veut utiliser les mathématiques pour résoudre un problème concret, la première étape consiste à traduire ce problème en données mathématiques exploitables. C'est ce que l'on appelle *la mise en équation*. Une bonne mise en équation se fait de la façon suivante :

1. Répertorier toutes les variables du problème, et les nommer de façon claire.
2. Déterminer toutes les contraintes du problème, et les traduire en équations (i.e. égalités) ou inéquations (i.e. inégalités).

Exemple : une entreprise de location de vélos veut renouveler son stock de vélos. Le gérant souhaite proposer à ses clients deux types de vélos : des vélos de ville qu'il achète à 500 € pièce, et des VTT qu'il achète à 750 € pièce. Il dispose pour cela d'un budget de 30000 € . Quelle quantité de vélos de ville et de VTT peut-il acheter ?

Pour résoudre ce problème, on peut le mettre en équation de la façon suivante :

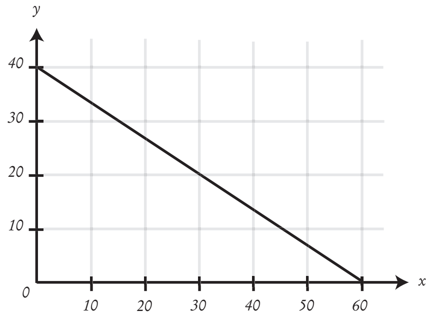
1. Ensemble de variables : notre problème contient deux variables :
   - $x =$ le nombre de vélos de ville,
   - $y =$ le nombre de VTT.
2. Mise en équation : notre problème contient une contrainte : les 30000 € à dépenser. Le problème peut donc être modélisé par l'équation

$$500x + 750y = 30000.$$

Résoudre notre problème revient alors à déterminer tous les couples (x, y) qui vérifient cette équation.

Ainsi, si	$x = 15$	alors	$y = 30$
	$x = 30$		$y = 20$
	$x = 45$		$y = 10$
	...		

Chacun de ces couples (x, y) est une solution de notre problème. L'ensemble des couples constituant une solution est l'ensemble solution. Pour les systèmes ne contenant que deux inconnues, on peut représenter l'ensemble solution par une courbe du plan (en mettant les x en abcisse et les y en ordonnée). Ainsi, dans l'exemple qui nous intéresse, l'ensemble des solutions peut être représenté par la droite ci contre.



Remarques :
- Pour des raisons évidentes, la droite ci-dessus est la droite d'équation $500x + 750y = 30000$, ou $y = -\frac{2}{3}x + 40$.
- Étant donnée la nature de nos inconnues, on ne regarde que la partie de la droite correspondant à $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

1.2 Équations linéaires

Lors d'une mise en équation, si l'équation que l'on obtient est de la forme $ax + by = c$ (comme dans l'exemple précédent), on dit que le problème (ou l'équation) est un problème **linéaire** à deux variables. Comme dans l'exemple précédent, tout problème linéaire à deux variables peut être représenté par une droite du plan.

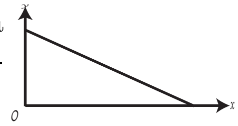
De façon générale, toute équation du type

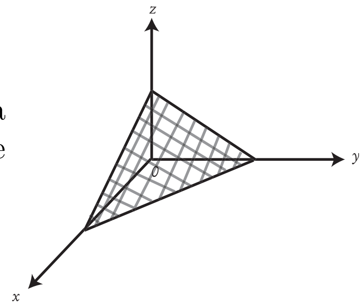
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \; = \; c$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les inconnues, et $a_1, \ldots, a_n$ et c sont les coefficient (i.e. des nombres connus), sera dite équation linéaire (à n variables). Si le nombre d'inconnues est plus petit que 3, on pourra avoir une représentation géométrique de l'équation. Précisément,

- Une équation linéaire à 1 variable est une équation de la forme $ax = b$. Elle possède en générale une unique solution, que l'on peut représenter par un point sur la droite réelle.

– Une équation linéaire à 2 variable est une équation de la forme $ax + by = c$. L'ensemble des solutions peut être représenté par une droite dans le plan.





– Une équation linéaire à 3 variable est une équation de la forme $ax + by + cz = d$. L'ensemble des solutions peut être représenté par un plan dans l'espace à 3 dimensions.

Exemples :

Représenter graphiquement les solutions des équations linéaires suivantes :

– $(E_1)\ :\ 2x = 10$.

– $(E_2)\ :\ 3x + y = 9$.

– $(E_3)\ :\ 2x - y + 3z = 6$.

1.3 Systèmes d'équations linéaires

Un *système linéaire* est un ensemble d'équations linéaires ayant le même nombre d'inconnues.

Exemples :

– $\left\{\begin{array}{rrcr} 2x & +3y & = & 11 \\ 5x & -y & = & 2 \end{array}\right.$ est un système de deux équations à 2 inconnues.

– $\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & +5y & -z & +\frac{1}{2}t & = & 15 \\ 5x & -y & & -t & = & 2 \\ -x & +y & -4z & +\frac{2}{3}t & = & 0 \end{array}\right.$ est un système de 3 équations à 4 inconn ues.

– Un système linéaire de m équations à n inconnues s'écrit sous la forme

$$(S) = \left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & C_{marg} \end{array}\right.$$

où les x_i sont les inconnues, et les a_{ij} et les c_i sont les coefficients.

Résoudre un système linéaire de m équations à n inconnues, c'est trouver tous les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ qui vérifient *simultanément* les m équations.

1.4 Les systèmes 2×2

Un système de deux équations à deux inconnues, (dit 2×2) est un système du type

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Dans ce chapitre, on appliquera les différentes méthodes de résolution au système

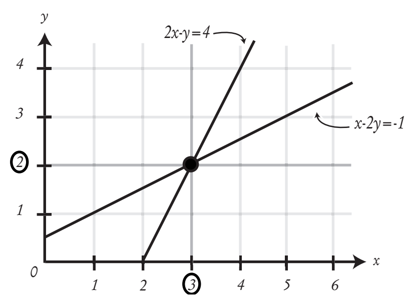
$$(S) = \begin{cases} x - 2y & = & -1 \\ 2x - y & = & 4 \end{cases}$$

On a trois façons différentes de résoudre un système 2×2. Une première méthode est géométriques. Les deux autres se font par calcul. L'une s'appelle par substitution, l'autre par combinaison.

1.4.1 Résolution graphique

Résoudre un système 2×2, c'est trouver les couples (x, y) qui vérifient simultanément deux équation linéaires.

Géométriquement, cela revient à chercher le point d'intersection de deux droites du plan. Il suffit donc de tracer les deux droites dans un repère orthonormé et de lire les coordonnées du point d'intersection. Ainsi, pour le système (S), on obtient le dessin ci-contre, et l'on trouve une unique solution : le point $(3, 2)$.



1.4.2 Méthode par substitution

La première méthode calculatoire est dite *par substitution.* Il s'agit de transformer l'une des deux équations en une équation du type $x = \ldots$ (ou $y = \ldots$) et remplacer, dans l'autre équation, x (ou y) par l'expression obtenue. On fait ainsi disparaître l'une des inconnue de l'une des équations. On peut alors résoudre cette dernière équation. On trouve une première inconnue, et en utilisant ce premier résultat, on trouve la seconde inconnue.

Exemple : dans le système (S), on peut modifier la première équation en une équation du type $x = \ldots$ Précisément,

$$(S) \iff \begin{cases} x & = & 2y - 1 \\ 2x - y & = & 4 \end{cases}$$

On peut alors remplacer, dans la seconde équation, x par $2y - 1$ (on fait ainsi disparaître x dans cette équation :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 1 + 2y \\ 2 \times (2y - 1) - y & = & 4 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ccl} x & = & 2y - 1 \\ 3y & = & 6 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccl} x & = & 2y - 1 \\ y & = & 2 \end{array} \right.$$

On peut alors remplacer y par sa valeur dans la première équation, et l'on obtient

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & 4 - 1 & = & 3 \\ y & = & 2 & & \end{array} \right.$$

On retrouve pour unique solution le couple $(3, 2)$.

1.4.3 Méthode par combinaison

La seconde méthode, dite *par combinaison* consiste à ajouter à une équation un multiple de l'autre. Le but est, là encore de faire disparaître l'une des inconnues de l'une des équations.

Exemple : dans notre système (S), on peut soustraire 2 fois la première équation à la seconde, afin de faire disparaître les x dans la seconde équation :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x - 2y & = & -1 \\ 2x - y - 2(x - 2y) & = & 4 - 2 \times (-1) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcr} x - 2y & = & -1 \\ 3y & = & 6 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr} x - 2y & = & -1 \\ y & = & 2 \end{array} \right.$$

Là encore, en remplaçant y par sa valeur dans la seconde équation, on obtient x :

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{ccl} x & = & 2 \times 2 - 1 \\ y & = & 2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 3 \\ y & = & 1 \end{array} \right.$$

On obtient encore comme unique solution le couple $(3, 2)$.

1.4.4 Représentation matricielle

Pour simplifier les calculs et gagner un peu de temps, on pourra représenter un système linéaire 2×2 à l'aide d'une *matrice*. Il s'agit d'un tableau de chiffres contentant les coefficients du système. Ainsi, le système 2×2 de l'exemple précédent peut être représenté de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x - 2y & = & -1 \\ 2x - y & = & 4 \end{array} \right. \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|r} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{array} \right).$$

De façon générale, on peut représenter tout système 2×2 de la façon suivante :

$$\begin{cases} ax + by &= s_1 \\ cx + dy &= s_2 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} a & b & s_1 \\ c & d & s_2 \end{array}\right).$$

Dans la méthode par combinaisons, on pourra alors travailler sur les lignes de la matrice, plutôt que sur les équations du système. Faire disparaître des inconnues revient alors à faire apparaître des zéros dans la matrice.

Exemple : traitons l'exemple précédent sous forme de matrice :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{array}\right) \leftarrow (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1)$$

Une fois qu'une ligne ne contient plus qu'un coefficient non nul, cela nous donne la valeur d'une inconnue. Dans notre exemple, la deuxième ligne nous donne l'équation $3y = 6$, soit $y = 2$. On peut alors conclure comme plus haut.

De façon générale, tout système linéaire peut se représenter sous la forme d'une matrice. On aura autant de lignes qu'il y a d'équation, et autant de colonne qu'il y a d'inconnues. Par exemple,

$$\begin{cases} x & +5y & -z & +\frac{1}{2}t & = & 15 \\ 5x & -y & & -t & = & 2 \\ -x & +y & -4z & +\frac{2}{3}t & = & 0 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & \frac{1}{2} & 15 \\ 5 & -1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 & \frac{2}{3} & 0 \end{array}\right)$$

De façon générale, on a

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & c_m \end{array}\right).$$

1.4.5 Les différents types de solutions

Dans l'exemple que l'on a traité, on obtenait à chaque fois une unique solution. Or ça n'est pas toujours le cas. Précisément,

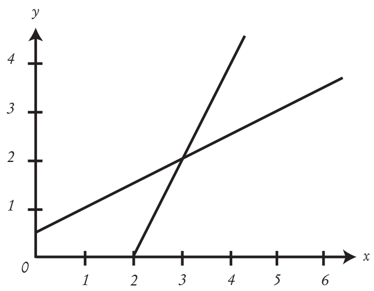
- un système linéaire sera dit consistant s'il admet une unique solution, ou une infinité de solutions.

- un système linéaire sera dit inconsistant s'il n'admet aucune solution.

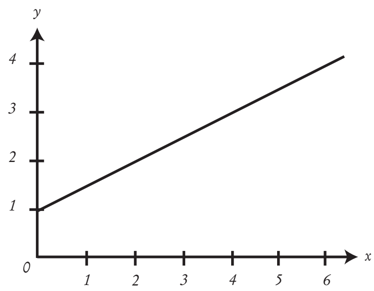
Par la méthode géométrique, la consistance d'un système se lit immédiatement. En effet, un système 2×2 n'admettra qu'une solution si les deux droites se coupent en un unique point. Il admettra une infinité de solutions si les deux droites sont confondues. Enfin, il sera inconsistant si les deux droites sont parallèles.

Exemples :

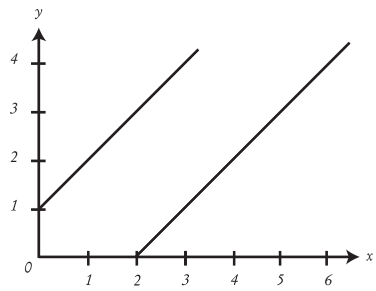
$$\left\{\begin{array}{l} x-2y=-1 \\ 2x-y=4 \end{array}\right.$$



$$\left\{\begin{array}{l} x-2y=-2 \\ 2x-4y=-4 \end{array}\right.$$



$$\left\{\begin{array}{l} x-y=-1 \\ x-y=2 \end{array}\right.$$



On peut également déterminer la consistance d'un système par le calcul :

– Si le système admet une infinité de solutions, n'importe quelle méthode de calcul transformera l'une des équations en "$0=0$" qui est toujours vrai. Il ne reste alors plus qu'une équation utile, et l'ensemble des solutions peut être représenté par une droite.

– Si le système est inconsistant, le calcul transformera l'une des équations en une équation du type "$0=a$" où a est un nombre non nul. Cette équation n'étant pas réalisable, il n'y a pas de solution.

– Si le système admet une unique solution, le calcul se déroule comme prévu, et donne cette solution.

Exercice : vérifier ceci sur les trois exemples ci-dessus.

1.4.6 Application

Les systèmes linéaires nous permettent de modéliser un certain nombre de problèmes concrets.

Exemple : Une usine fabriquant des torchons et des serviettes décide de les vendre par lots :

– Lot A : 9 torchons et 6 serviettes. Ce lot sera vendu 20 € .

– Lot B : 2 torchons et 12 serviettes. Ce lot sera vendu 15 € .

Elle a en stock 3200 torchons et 4800 serviettes.

Combien de lots de chaque sorte doivent être vendus pour épuiser le stock ?

Quel sera le chiffre d'affaire total ?

Les données peuvent être rassemblées dans le tableau suivant

	Torchons	Serviettes
Lot A	9	6
Lot B	2	12

Les inconnues sont
- x = le nombre de lots A,
- y = le nombre de lots B.

Les contraintes nous donnent alors le système suivant :

$$\begin{cases} 9x + 2y = 3200 \\ 6x + 12y = 4800 \end{cases}$$

On peut alors commencer par simplifier un peu les équations en diviant la seconde par 6. On a alors le système

$$\begin{cases} 9x + 2y = 3200 \\ x + 2y = 800 \end{cases}$$

En remplaçant alors L_1 par $L_1 - L_2$, on obtient

$$\begin{cases} 8x = 2400 \\ x + 2y = 800 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x = 300 \\ y = \frac{800-300}{2} = 250 \end{cases}$$

On peut alors fabriquer 300 lots A et 250 lots B, qui au total rapporteront

$$20 \times 300 \; + \; 15 \times 250 \; = \; 9750 \text{ €}.$$

1.5 Le Pivot de Gauss

Pour les systèmes linéaires à 3 inconnues, on peut encore utiliser une méthode de résolution géométrique, chaque équation correspondant à un plan de l'espace. Au delà de 3 inconnues, on ne peut plus utiliser la représentation graphique. On utilise donc le calcul, et la méthode générale est une combinaison des deux méthodes de calcul que l'on utilise pour les systèmes 2×2 : le pivot de Gauss

1.5.1 Objectif du pivot de Gauss

Le principe général du pivot de Gauss est de transformer le système que l'on veut résoudre en un système *triangulaire.*

Pour un système 3×3, cela revient à passer d'un système du type

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1x + b_1y + c_1z & = & d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = & d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & = & d_3 \end{array}\right.$$

à un système du type

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1z & = & \delta_1 \\ \beta_2y + \gamma_2z & = & \delta_2 \\ \gamma_3z & = & \delta_3 \end{array}\right.$$

à l'aide de combinaisons.

Une fois que l'on a un système triangulaire, on obtient directement la dernière inconnue. On peut ensuite passer à la substitution en remontant ligne par ligne.

1.5.2 Opérations autorisées

Pour transformer un système donné en un système triangulaire, on dispose d'un certain nombre d'opérations que l'on peut faire sur les équations du système sans changer ses solutions. Précisément, on peut

- permuter deux équations,
- multiplier une équation par un nombre non nul,
- ajouter une ligne à une autre.

En pratique, on commencera par passer à la notation matricielle. On effectuera alors les différentes opérations précédentes sur les lignes de la matrice associée à notre système, le but étant de faire apparaître un certain nombre de zéros dans la matrice.

1.5.3 Mécanisme du pivot de Gauss

Considérons le système suivant, ainsi que sa matrice associée.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - y + z & = & 2 \\ 2x + y - z & = & 1 \\ 4x + 3y + z & = & 3 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

La première étape du pivot de Gauss consiste à utiliser la première équation pour faire disparaitre les x dans les autres équations. Au niveau de la matrice, cela revient à utiliser la première ligne pour faire apparaître des 0 sous le premier coefficient de la première ligne. C'est ce premier coefficient que l'on appelle le pivot.

Dans l'exemple ci-dessus, on peut ainsi soustraire 2 fois la première ligne à la deuxième :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \leftarrow (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1)$$

On a ainsi fait apparaître un premier 0 sous notre pivot. On fait alors apparaître un nouveau 0 en soustrayant 4 fois la première ligne à la troisième :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 4 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1) \end{array}$$

On a maintenant terminé la première étape du pivot de Gauss : on a mis des 0 sur toute la première colonne, à l'exception de notre pivot.

Pour l'étape suivante, on oublie la première ligne et la première colonne, qui resteront inchangées jusqu'à la fin du procédé :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right).$$

On recommence alors la première étape, sur la matrice plus petite : dans notre exemple, notre nouveau pivot est le 3, que l'on utilise pour faire apparaître des 0 en dessous. Ainsi,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{3}L_2) \end{array}$$

On continue cette seconde étape jusqu'à ce qu'il n'y ait plus que des 0 en dessous du second pivot. Une fois que c'est fait, on oublie la seconde ligne et la seconde colonne de la matrice, et l'on recommence sur la matrice plus petite.

Le processus s'arrête lorsque l'on a une matrice triangulaire (i.e. une matrice ne contenant que des 0 sous la diagonale), et donc un système triangulaire. On revient alors à la notation système, et l'on peut faire de la substitution. Dans notre exemple, la dernière ligne de notre matrice nous donne l'équation

$$4z = 2, \quad \text{soit} \quad z = \frac{1}{2}.$$

La seconde ligne nous donne

$$3y - 3z = -3,$$

et en substituant à z la valeur trouvée, on obtient

$$3y = -\frac{3}{2}, \quad \text{d'où} \quad y = -\frac{1}{2}.$$

enfin, la première ligne nous donne

$$x - y + z = 2,$$

et en substituant, on obtient

$$x = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1.$$

La solution de notre systèmes est donc le triplet

$$\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Remarque : pour simplifier les calculs, on préfère travailler avec un pivot égale à 1. Si ça n'est pas le cas, on peut utiliser la permutation des ligne pour avoir un pivot égale à 1. Il faut pour cela que l'un des coefficients placés sous le pivot soit égal à 1 et permuter la ligne du pivot avec la ligne correspondante.

Si aucun coefficient se trouvant sous le pivot est n'est égal à 1, on peut toujours diviser la ligne du pivot par ce pivot pour le transformer en 1. De façon générale, on pourra d'ailleurs utiliser cette opération pour simplifier un peu les lignes. Dans notre exemple, la seconde étape commence avec la ligne $(\,0\;\;3\;\;-3\,|\,-3\,)$ On peut donc la diviser par 3 et travailler avec la ligne $(\,0\;\;1\;\;-1\,|\,-1\,)$.

1.5.4 Les différents types de solutions

Comme pour les systèmes 2×2, il peut arriver que l'on n'ait pas de solution. C'est le cas si deux équations sont en contradiction. Il peut également arriver que l'on ait une infinité de solutions. C'est en particulier le cas quand on a plus d'inconnues que d'équations. Dans le pivot de Gauss, cela se traduit par l'apparitions de lignes de 0 au bas de la matrice. Dans ce cas, les derniers paramètres sont laissés libres, et l'on exprime les premiers en fonction de ces derniers.

Exemple : Considérons le système suivant, ainsi que sa représentation matricielle.

$$\left\{\begin{array}{rcr} x-y+z & = & 2 \\ 2x+y-4z & = & 1 \\ x+2y-5z & = & -1 \end{array}\right. \longleftrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right).$$

Le pivot de Gauss nous donne :

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & -1 \end{array}\right) &\iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \leftarrow (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \\ \leftarrow (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{array} \\ &\iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (L_3 \leftarrow L_3 - L_2) \end{array} \end{aligned}$$

Le système de départ est donc en réalité un système 2×3. Il possède donc une infinité de solutions. La différence entre le nombre d'inconnues et le nombre de solutions nous donne le nombre de paramètres libres. Ici, $3-2=1$. On va donc pouvoir exprimer toutes les solution en fonction d'un seul paramètre z. Précisément, la seconde ligne nous donne

$$y = 2z - 1$$

et la première nous donne

$$x = y - z + 2 = z + 1.$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \{(z+1, 2z-1, z),\ z \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple : Une confiserie possède trois mélanges de fruits secs différents :

- le mélange A contient 500g d'amandes, 400g de noix et 100g de noisettes,
- le mélange B contient 400g d'amandes, 200g de noix et 400g de noisettes,
- le mélange C contient 600g d'amandes, 100g de noix et 300g de noisettes.

Si la confiserie possède 6100g d'amandes, 2500g de noix et 3400g de noisettes et qu'elle désire utiliser tout son stock, combien de sacs de chaque mélange devra-t-elle faire ?

1.6 Inéquations linéaires

À deux variables, une inéquation linéaire a la forme

$$ax + by \leqslant c \quad \text{ou} \quad ax + by \geqslant c$$

D'un point de vue graphique, l'ensemble des solution d'une inéquation à deux variables est constitué de la droite d'équation $ax + by = c$ et tous les points qui sont d'un coté de la droite. C'est donc un demi-plan. Le sens de l'inégalité indique quel coté de la droite il faut considérer.

Exemples :

$$2x + 2y \leqslant 1 \qquad\qquad 2x + 2y \geqslant 1 \qquad\qquad 2x - y \leqslant 1$$

1.7 Systèmes d'inéquations linéaires

Résoudre un système d'inéquations linéaires, c'est résoudre simultanément plusieurs inéquations. À deux variables, cela revient donc à déterminer l'intersection de plusieurs demi-plans.

Exemple :

$$\begin{cases} y - 3x \leqslant -2 \\ y + x \leqslant 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 4y \geqslant 4 \\ 2x + y \leqslant 4 \\ y \leqslant x \\ y \geqslant -4 \end{cases}$$

L'intersection d'un nombre fini de demi-plan (et donc l'ensemble des solutions d'un système 2×2 d'inéquations linéaires) est un *ensemble convexe*. Les partie du plan ci-dessous sont tous des ensembles convexes.

L'ensemble ci-contre n'est pas un ensemble convexe

L'ensemble convexe peut être borné ou non borné selon qu'il s'étend ou non jusqu'à l'infini. Les deux premières figures sont des ensembles convexes bornés tandis que la troisième est un ensemble convexe non borné.

Les sommets d'un ensemble convexe sont les points de rencontre des droites frontières qui le constituent.

Exemple : considérons le système d'inéquations linéaires suivant.

$$\begin{cases} 2x + y \leqslant 16 \\ x + 2y \leqslant 11 \\ x + 3y \leqslant 15 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

Pour déterminer l'ensemble des solutions de ce système, on commence par déterminer les demi-plans définis pas chacune des inéquations. On obtient alors l'ensemble convexe des solutions. Pour terminer l'étude, on détermine les sommets de cet ensemble convexe. Pour cela, on lit graphiquement les coordonnées de ces points, et l'on vérifie à l'aide du système. (Chaque point doit être l'unique solution du système 2×2 donné par les droites produisant l'intersection).

1.8 Programmation linéaire

1.8.1 Une méthode graphique

Dans cette section, nous allons voir une autre approche, plus complète et plus réaliste des problème de gestion que l'on a vu jusque là. Commençons par un exemple.

Exemple : Le directeur d'une manufacture de meubles décide de fabriquer deux nouveaux modèles de bibliothèque : le modèle A et le modèle B.

– Le modèle A nécessite 1 heure de sciage, 2 heures d'assemblage et 1 heure de finition.

– Le modèle B nécessite 2 heures de sciage, 1 heure d'assemblage et 1 heure de finition.

La manufacture dispose quotidiennement de 20 heures à l'atelier de sciage, de 22 heures à l'atelier d'assemblage et de 12 heures à l'atelier de finition. Les profits que la compagnie peut réaliser pour chacun des modèles sont de 200 € pour le modèle A et de 300 € pour le modèle B. Le directeur désire déterminer le nombre de bibliothèques de chaque modèle quŠil doit fabriquer par jour pour obtenir un profit maximal.

On peut rassembler les données dans le tableau suivant.

	sciage	assemblage	finitions	
modèle A	1h	2h	1h	x
modèle B	2h	1h	1h	y
ressources	20h	22h	12h	

Contrairement aux exemples précédents, on ne cherche plus ici à utiliser toute la ressource disponible, mais on cherche à maximise le profit. Cela nous donne donc un système d'inéquations :

$$\begin{cases} x + 2y \leqslant 20 \\ 2x + y \leqslant 22 \\ x + y \leqslant 12 \end{cases}$$

ainsi que les contraintes de positivité

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$$

On peut alors déterminer graphiquement la partie convexe du plan qui contient toutes les solutions de ce système. Il représente toutes les productions que l'on peut faire à l'aide des ressources dont on dispose. On a par exemple les couples $(2,5)$, $(8,3)$, $(2,8)$, $(0,9)$,... Le problèmes est alors de déterminer la ou les solutions qui donnent un profit maximal. Le profit est donné par l'équation

$$P = 200x + 300y$$

pour des couples (x, y) pris dans l'ensemble des solutions. Voici quelques profits, associés aux solutions vues plus haut

modèle A	modèle B	Profit
2	5	$2 \times 200 + 5 \times 300 = 1900$ €
8	3	$8 \times 200 + 3 \times 300 = 2500$ €
2	8	$2 \times 200 + 8 \times 300 = 1800$ €
0	9	$0 \times 200 + 9 \times 300 = 2700$ €
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Il n'est bien sur pas pensable de calculer les profits correspondant à chacun des points solutions.

Prenons alors la question dans l'autre sens : existe-t-il une solution permettant de réaliser un profit de

$$a)\,4000\,€\ ? \qquad b)\,2000\,€\ ? \qquad c)\,3200\,€\ ?$$

Pour réaliser ces profits, on cherche les couples (x, y) qui, en plus de satisfaire les inéquations précédentes, vérifient les équations

$$\begin{array}{lll} a)\ 200x + 300y = 4000 & \text{soit} & 2x + 3y = 40 \\ b)\ 200x + 300y = 2000 & \text{soit} & 2x + 3y = 20 \\ c)\ 200x + 300y = 3200 & \text{soit} & 2x + 3y = 32 \end{array}$$

Sur notre graphe, cela nous donne donc trois droites parallèles, et les profits réalisables sont ceux pour lesquels ces droites coupent la partie convexe donnant les solutions du système d'inéquations.

Précisément, il n'est pas possible de réaliser un profit de 4000 € avec les contraintes que l'on a. On peut par contre réaliser un profit de 2000 € de plusieurs façons différentes. Enfin, on ne peut réaliser un profit de 3200 € que d'une seule façon.

De façon générale, les profits sont représentés par un ensemble de droites parallèles, qui montent ou qui descendent selon que le profit cherché augment ou diminue. Le profit maximum accessible est donc donné par la droite la plus haute qui rencontre encore l'ensemble convexe. Dans notre exemple, il s'agit de 3200 € , obtenu en produisant 4 unités du modèle A et de 8 unités du modèle B.

La programmation linéaire est un outil permettant une étude systématique de ce type de problème. Précisément, la programmation linéaire permet d'optimiser (i.e. obtenir le maximum ou le minimum d') une équation linéaire, soumise à des contraintes également linéaires (équations ou inéquations), et donne des méthodes algorithmiques pour déterminer la ou les solutions optimales. Le tableau ci-contre rassemble les données d'un problème pouvant être résolu grâce à la programmation linéaire.

Fonction w à optimiser $w = a_0x + b_0y + c_0z + \dots$
Contraintes de fonctionnement $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + \dots \leqslant k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \dots \leqslant k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + \dots \leqslant k_3 \\ \vdots \end{cases}$
Contraintes de positivité $x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0, \dots$

Du fait de la forme d'un ensemble convexe (forme de tous les ensembles-solutions des systèmes linéaires), la solution d'un problème de programmation linéaire sera toujours atteint en un sommet de l'ensemble convexe des solutions réalisables, à condition bien sûr que cet ensemble existe et soit borné.

Si l'ensemble des solutions réalisables n'est pas borné, il se peut qu'un maximum (ou minimum) ne soit jamais atteint, mais là encore, si cet optimum est atteint, il l'est en un somment de l'ensemble convexe. Pour les systèmes à 2 inconnues, une première méthode, géométrique est donc d'utiliser les droites comme dans l'exemple ci-dessus. On détermine la pente de la fonction à optimiser, et on la fait glisser sur l'ensemble convexe des solutions possibles jusqu'à atteindre le dernier sommet. Une autre méthode consiste à faire la liste de tous les sommet de l'ensemble solution, et de calculer pour chacun de ces sommets la valeur de la fonction à optimiser.

Exemple.

Un fermier dispose d'un champ de 120 hectares, de 480 € destinés à l'achat de semences et de 2400 heures de main-d'œuvre agricole pour effectuer son travail. Il doit utiliser son champ pour deux cultures :

- une culture A pour laquelle la semence revient à 5 € par hectare et qui nécessite 8 heures de main-d'œuvre par hectare
- une culture B pour laquelle la semence coûte 3 € par hectare et qui nécessite 24 heures de main d'œuvre par hectare.

Sachant que la culture A rapporte 100 € par hectare et la culture B rapporte 150 € par hectare, le fermier désire savoir combien d'hectare de son champ il devra consacrer à chaque culture pour maximiser son profit.

Commençons par dresser le tableau des contraintes.

	terrain (hect)	coût (€)	M.O. (h)	
culture A	1	5	8	x
culture B	1	3	24	y
contraintes	120	480	2400	

Les inconnues étant ici le nombre x d'hectares consacrés à la culture A et le nombre y d'hectares consacrés à la culture B.

On obtient le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} x + y \leqslant 120 \\ 5x + 3y \leqslant 480 \\ 8x + 24y \leqslant 2400 \end{cases}$$

ainsi que les contraintes de positivité

$$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$$

Enfin, la fonction profit que l'on veut rendre maximale est

$$P = 100x + 150y.$$

À l'aide des contraintes, on détermine ensuite la partie convexe du plan qui contient toutes les solutions possibles pour la répartition des deux cultures :

Il nous reste ensuite à faire la liste des sommet de l'ensemble convexe, et calculer pour chacun de ces sommets le profit réalisable. Notons que certains sommet ne se lisent pas directement sur le graphe. Il faut alors résoudre le système 2×2 donné par les équations des deux droites formant ce sommet.

Ici, on obtient quatre sommets

$$S_1 = (0, 100), \quad S_2 = (30, 90), \quad S_3 = (60, 60), \quad S_4 = (96, 0)$$

et pour chacun de ces sommet, on a le profit correspondant

$$P_1 = 15\,000\,€, \quad P_2 = 16\,500\,€, \quad P_3 = 15\,000\,€, \quad P_4 = 9\,600\,€$$

Le profit maximum que l'on peut réaliser est donc de 16 500 € , obtenu en faisant 30 hect. de culture A et 90 de culture B.

Différents types de solution À l'aide de la résolution graphique, on peut voir les différents types de solution que l'on peut obtenir lorsque l'on est face à un problème de programmation linéaire. Dans la plupart des cas, on trouve une unique solution, qui est le seul sommet rencontrant la droite des profits la plus haute.

Mais il peut arriver que l'on ait une infinité de solutions. C'est en particulier le cas si les droites représentant la fonction à optimiser sont parallèles à l'un des cotés de la partie convexe.

Dans tous les cas, on voit qu'au moins un sommet de la partie convexe réalise l'optimum cherché. Si la liste des sommets nous donne deux extrema identiques et consécutifs, alors c'est que l'on a une infinité de solutions.

1.8.2 La méthode du simplexe

La méthode du simplexe est une méthode algorithmique permettant de résoudre les problèmes d'optimisation comme ceux que l'on vient de voir.

Tous les exemples que l'on a vu jusque là étaient des problèmes en deux variables. On pouvait donc se baser sur une méthode graphique, assez intuitive, pour les résoudre. Le premier avantage de la méthode du simplexe est qu'elle s'applique pour un nombre quelconque de variables. De plus, c'est une méthode algorithmique. Cela signifie que l'on pourra le faire faire à un ordinateur (à l'aide d'un tableur, par exemple).

Principe de la méthode du simplexe

Dans l'étude qualitative que l'on a fait plus haut, on a vu que dans un problème de programmation linéaire, l'ensemble des solutions réalisables était un ensemble convexe, et que le point de cet ensemble qui optimise le problème est toujours un sommet. L'idée de la méthode du simplexe est de trouver une façon de parcourir symboliquement les sommet de l'ensemble des solutions réalisable, à la recherche du point optimal. Il s'agit d'un "jeu" sur les inéquations qui définissent l'ensemble des solutions réalisables, qui nous permet de ne pas avoir à passer par la représentation graphique.

Commençons par décrire la méthode sur un exemple à deux variable. On pourra ainsi avoir une représentation graphique des différentes opérations de la méthode.

Considérons donc le problème suivant :

Une compagnie fabrique des lave-linges et des sèche-linges automatiques. Elle utilise 4 heures à la fabrication des morceaux d'un lave-linge automatique et 1 heures à l'assemblage de ces morceaux. Les morceaux d'un sèche-linge prennent 2 heures à fabriquer et 1 heure et demi à assembler. La compagnie dispose à chaque jour de 400 heures pour la fabrication des morceaux et de 150 heures pour l'assemblage. Un lave-linge rapporte un profit de 24 € et un sèche-linge un profit de 16 € . Combien de lave-linges et de sèche-linges devraient être fabriquées chaque jour par la compagnie pour que celle-ci retire un profit maximal ?

La mise en équation donne le tableau suivant

	fabrication	assemblage		profit
Lave-linge	4h	1h	x	24 €
Sèche-linge	2h	1h30	y	16 €
Contraintes	400h	150h		

et le programme linéaire suivant

Maximiser la fonction $P = 24x + 16y$ sous les contraintes

$$\begin{cases} 4x + 2y \leqslant 400 & \text{(contrainte de fabrication)} \\ x + 1,5y \leqslant 150 & \text{(contrainte d'assemblage)} \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0 & \text{(contraintes de positivité)} \end{cases}$$

L'ensemble des solutions réalisables est donné par l'ensemble convexe suivant :

dont les sommets sont

$$A = (0,0), \quad B = (0,100), \quad C = (75,50), \quad D = (100,0).$$

La première étape du simplexe consiste à transformer les inéquations données par les contraintes de fonctionnement en équations, en introduisant des variables d'ajustement, ou d'écart. Ainsi, l'inéquation

$$4x + 2y \leqslant 400$$

peut être transformée en l'égalité

$$4x + 2y + r = 400$$

où r est une variable positive qui mesure la différence entre $4x + 2y$ et 400.

Si l'on effectue cette transformation pour chaque inéquation de fonctionnement (i.e. toutes les inéquations, sauf les contraintes de positivité), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} 4x + 2y + r = 400 \\ x + 1,5y + s = 150 \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ r \geqslant 0,\ s \geqslant 0 \end{cases}$$

Ces variables d'écart nous permettent de représenter les différents sommets de façon algébrique. En effet, un sommet de l'ensemble convexe est un point pour lesquelles deux des variables x, y, r, s sont nulles, et les autres sont positives. Ainsi,

si $x = 0$ et $y = 0$	alors $r = 400$ et $s = 150$	et cela correspond au sommet A.
si $x = 0$ et $s = 0$	alors $y = 100$ et $s = 200$	et cela correspond au sommet B.
si $r = 0$ et $s = 0$	alors $x = 75$ et $s = 50$	et cela correspond au sommet C.
si $r = 0$ et $y = 0$	alors $x = 100$ et $s = 50$	et cela correspond au sommet D.

Par ailleurs,

si $x = 0$ et $r = 0$	alors $y = 200$ mais $s = -150$	et cela ne correspond à aucun sommet.
si $y = 0$ et $s = 0$	alors $x = 150$ mais $r = -200$	et cela ne correspond à aucun sommet.

On a donc transformé notre problème de parcours des sommets en un problème algébrique (i.e. un problème de calculs). On peut alors mettre en place l'algorithme.

L'algorithme du simplexe

Le principe de cet algorithme est de représenter l'étude de chaque somment par un tableau contenant les coefficients des différentes équations correspondant aux différents sommets.

Premier tableau. Pour commencer, choisissons un sommet. En règle générale, on choisit le sommet $x = 0$, $y = 0$. On a alors le tableau suivant :

variables $\longrightarrow$

x	y	r	s	*constante*	
24	16	0	0	0	P
4	2	1	0	400	r
1	1,5	0	1	150	s

} équations

↑ variables non nulles

L'algorithme du simplexe consiste à passer d'un tableau au suivant jusqu'à obtenir la situation optimale. Le tableau optimal est celui dans lequel les coefficients de la ligne P sont tous négatifs ou nuls.

Passage d'un tableau à l'autre. Pour passer d'un tableau à l'autre (i.e. d'un sommet à l'autre), on commence par déterminer dans le premier tableau trois variables :
- la variable entrante,
- la variable sortante,
- le pivot.

La variable entrante est la celle qui a le plus fort coefficient positif dans la ligne P. Elle va entrer dans la dernière colonne. Dans notre exemple, c'est donc la variable x.

$\boldsymbol{x}$	y	r	s	*constante*	
24	16	0	0	0	P
4	2	1	0	400	r
1	1,5	0	1	150	s

La variable sortante se lit dans la dernière colonne. C'est la variable qui correspond au plus petit rapport terme à terme entre la colonne *constantes* et la colonne de la variable entrante. La variable sortante va disparaître de la dernière colonne, pour être remplacée par la variable entrante. Dans notre exemple, la variable sortante est r car $\frac{400}{4} < \frac{150}{1}$.

x	y	r	s	*constante*	
24	16	0	0	0	P
4	2	1	0	400	$\boldsymbol{r}$
1	1,5	0	1	150	s

Le pivot est le coefficient qui se trouve à l'intersection de la colonne de la variable entrante et de la ligne de la variable sortante.

x	y	r	s	*constante*	
24	16	0	0	0	P
4	2	1	0	400	r
1	1,5	0	1	150	s

Une fois que l'on a repéré ces trois entrées, on construit le tableau suivant en effectuant les opérations suivantes :

1. Dans la dernière colonne, on remplace la variable sortante par la variable entrante.

x	y	r	s	*constante*	
					P
					$\boldsymbol{x}$
					s

2. On divise la ligne du pivot par la valeur du pivot. (Le pivot est alors remplacé par 1).

x	y	r	s	*constante*	
					P
1	$0,5$	$0,25$	0	100	x
					s

3. On utilise la méthode du pivot de Gauss pour faire apparaître des 0 dans la colonne du pivot.

	x	y	r	s	*constante*	
$L_1 \leftarrow L_1 - 24L_2$	0	4	-6	0	-2400	P
	1	$0,5$	$0,25$	0	100	x
$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$	0	1	$-0,25$	1	50	s

On obtient alors un nouveau tableau. Ça n'est pas le tableau optimal, car les coefficients de la première ligne ne sont pas tous négatifs ou nul (on a 4, -6 et -2400). Il va donc falloir recommencer les opérations 1. 2. et 3.

Avant cela, observons un peu le tableau que l'on a obtenu. La dernière colonne contient les nouvelles variables non nulles. Les variables nulles correspondant à ce tableau sont donc les variables y et r. Cela correspond donc au sommet D.

passage de A à D

D'autre part, la lecture des lignes nous donnent la valeur des autres paramètres du problème en ce point D. Ainsi, la première ligne nous dit que

$$P = 4y - 6r + 2400.$$

Au point D, on a donc $P = 2400$.

De même, les deux dernières lignes nous disent que

$$x + 0,5y + 0,25r = 100 \quad \text{et } y - 0,25r + s = 50.$$

Au point D, on a donc $x = 100$ et $s = 50$.

Il s'agit donc bien de la situation du système au sommet D.

Appliquons maintenant une nouvelle fois la modification de notre tableau : on commence par repérer la variable entrante, la sortante et le pivot :

- La variable entrante est la variable y car 4 est le plus grand coefficient de la première ligne.
- La variable sortante est la variable s car $\frac{50}{1} < \frac{100}{0,5}$.
- Le pivot est 1.

x	$\boldsymbol{y}$	r	s	*constante*	
0	4	-6	0	-2400	P
1	$0,5$	$0,25$	0	100	x
0	**1**	$-0,25$	1	50	$\boldsymbol{s}$

On peut alors construire le nouveau tableau :

1. On remplace la variable sortante par la variable entrante dans la dernière colonne.

x	y	r	s	*constante*	
					P
					x
					$\boldsymbol{y}$

2. La ligne du pivot reste inchangée (on divise par 1...)

x	y	r	s	*constante*	
					P
					x
0	1	$-0,25$	1	50	$\boldsymbol{y}$

3. On applique le pivot de Gauss pour introduire des 0 dans la colonne du pivot.

	x	y	r	s	*constante*	
$L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3$	0	0	-5	-4	-2600	P
$L_2 \leftarrow L_2 - 0,5L_3$	1	0	$0,375$	$-0,5$	75	x
	0	1	$-0,25$	1	50	y

On a obtenu le tableau optimal car tous les coefficients de la première ligne sont négatifs ou nuls. On peut alors lire les lignes de ce tableau pour avoir le profit maximum et les valeurs de x et y correspondant :

- Le profit maximum est de 2600 € .
- Il est obtenu pour $x = 75$ et $y = 50$ (il s'agit donc du sommet C).

1.8.3 Le simplexe en dimension supérieure

On a vu que pour un problème en deux variables, l'introduction des variables d'écart permettait de représenter les somment de l'ensemble des solutions possibles par l'annulation de deux variables. D'autre part, le simplexe permet également de traiter des problème contenant autant de variables que l'on souhaite. Il faut cependant l'adapter. Ainsi, pour un problème en trois variables, les sommets de l'ensemble des possibilités est donné par l'annulation de trois variables. Hormis cela, la technique reste la même.

Exemple : Un petit agriculteur souhaite se lancer dans la production de cerises AOC bio. Il souhaite produire trois types de cerises :
- des merises qui lui rapportent 2000 € par arbre et par an,
- des griottes qui lui rapportent 2500 € par arbre et par an,
- des burlats qui lui rapportent 3000 € par arbre et par an.

Le terrain sur lequel il veut planter son verger ne peut accueillir plus de 60 arbres. De plus, pour des questions de label, le nombre de burlats ne peut excéder la somme des deux autres types d'arbres de plus de 2 unités et le double du nombre de merises ne peut excéder la somme des deux autres types de plus de 10 unités.

Quelle quantité de chaque arbre doit-il planter pour maximiser son profit ?

Démarche :

1. Donner le programme linéaire qui modélise ce problème.
2. Transformer ce programme linéaire en introduisant les variables d'écart.
3. Appliquer l'algorithme du simplexe pour résoudre le problèmes.

Réponse : 0 *merise,* 29 *griottes,* 31 *burlats, pour un profit max de* 165 500 €

1.8.4 Dualité

Jusqu'à présent, la méthode du simplexe nous permet de résoudre des problèmes de maximisation. Précisément, on sait résoudre des programmes linéaires du type

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Maximiser} \\ P = a_0x + b_0y + c_0z + \dots \\ \\ \text{sous les contraintes} \\ \left\{\begin{array}{c} a_1x + b_1y + c_1z + \dots \leqslant k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \dots \leqslant k_2 \\ \vdots \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, z \geqslant 0, \dots \end{array}\right. \end{array}}$$

Or on a vu qu'il existait d'autres types de programmes linéaires. Le simplexe nous permet de résoudre tous les types de programmes linéaires, mais il faut pour cela les adapter. Ainsi, pour résoudre un problème de minimisation, on doit faire appel au problème dual. Considérons par exemple le programme linéaire suivant.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Minimiser} \\ C = x_1 + 2x_2 \\ \\ \text{sous les contraintes} \\ \left\{\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \geqslant & 4 \\ 2x_1 + x_2 & \geqslant & 6 \\ x_2 & \geqslant & 1 \\ x_1,\ x_2 \geqslant 0 & & \end{array}\right. \end{array}}$$

Le programme dual est un programme linéaire du type $\{\max, \leqslant\}$ dont les variables sont y_1, y_2, y_3 et qui a les mêmes solutions que le programme de départ. Pour construire le programme dual, on commence par représenter le programme initial par un tableau contenant les coefficients des équations :

x_1	x_2	*cstes*	
1	2	0	C
1	1	4	y_1
2	1	6	y_2
0	1	1	y_3

En retournant ce tableau, on obtient le tableau représentant le programme dual :

y_3	y_2	y_1	C	
1	6	4	0	*cstes*
1	1	1	2	x_2
0	2	1	1	x_1

$\Longrightarrow$

Maximiser
$$P = 4y_1 + 6y_2 + y_3$$

sous les contraintes
$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 & \leqslant & 2 \\ y_1 + 2y_2 & \leqslant & 1 \\ y_1,\, y_2,\, y_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Le théorème fondamental de la dualité nous dit alors que les solutions optimales de ces deux programmes linéaires sont liés. En particulier, le maximum de P est égal au minimum de C.

D'autre part, après introduction des variables d'écart dans chacun des programmes linéaires, chaque système a le même nombre de variables :

$$C = x_1 + 2x_2 \qquad\qquad P = 4y_1 + 6y_2 + y_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geqslant 4 \\ 2x_1 + x_2 \geqslant 6 \\ x_2 \geqslant 1 \\ x_1,\, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 \leqslant 2 \\ y_1 + 2y_2 \leqslant 1 \\ y_1,\, y_2,\, y_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

Les coefficient des fonctions à optimiser nous permettent alors d'associer les x_i et les y_j. Précisément, on a

$$x_1 \sim y_5, \quad x_2 \sim y_4, \quad x_3 \sim y_1, \quad x_4 \sim y_2, \quad x_5 \sim y_3.$$

La première ligne du dernier tableau du simplexe appliqué au système dual donne alors les valeurs des variables au point optimal (en changeant les signes...).

Ainsi, en appliquant le simplexe au programme dual, on obtient en dernier tableau :

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	*cstes*	
0	-3	0	-1	-3	-5	P
0	1	1	1	-1	1	y_3
1	2	0	0	1	1	y_1

On lit alors que le coût minimum du premier programme linéaire est $C = 5$ et la première ligne de ce tableau nous dit qu'il est atteint pour

$$x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 3,\ x_5 = 0.$$

Chapitre 2

Étude d'une fonction d'une variable réelle

Une fonction est un outil mathématique permettant de représenter les relations que l'on peut avoir entre différentes quantités. En économie, par exemple, on a pu observer que pour la plupart des produits de consommation, la quantité de produit vendue dépend (en partie) du prix de vente. De même, la capacité de production dépend de plusieurs facteurs, tels que l'argent investit, le nombre d'ouvriers disponibles.

L'objectif de ce chapitre est d'apprendre à représenter différents problèmes à l'aide des fonctions, et de voir quelques outils nous permettant d'étudier ces fonctions. Que ce soit graphiquement ou par le calcul, on verra comment on peut exploiter les fonctions réelles pour analyser et optimiser les que l'on aura modélisé.

2.1 Rappels

2.1.1 Définition

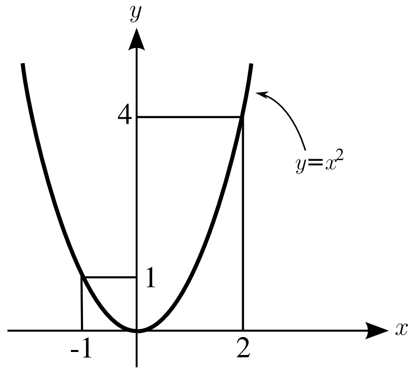
Une fonction f d'une variable x est une opération qui à un réel x associe un autre réel $f(x)$. On dit que $f(x)$ est l'image de x par f.

Exemples :
- La fonction $f : x \mapsto x^2$ associe à chaque nombre son carré. L'image de 2 est 4, l'image de -1 est 1, l'image de 0 est 0.
- La fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ associe à chaque nombre son inverse. L'image de 3 est $\frac{1}{3}$, l'image de $\frac{1}{2}$ est 2, 0 n'a pas d'image.

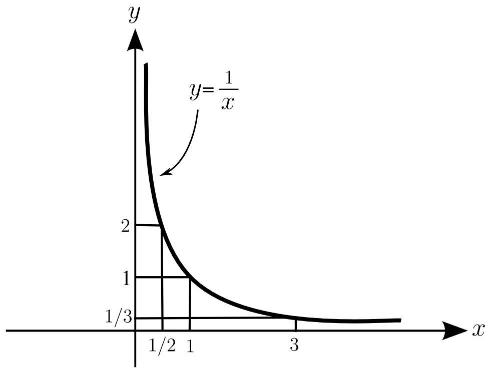
2.1.2 Représentation graphique

Étant donnée une fonction f, on peut construire sa représentation graphique $\mathcal{C}_f$ plaçant les points de coordonnées $(x, f(x))$ dans un repère.

Exemples :
– Graphe de la fonction f ci dessus.



– Graphe de g.



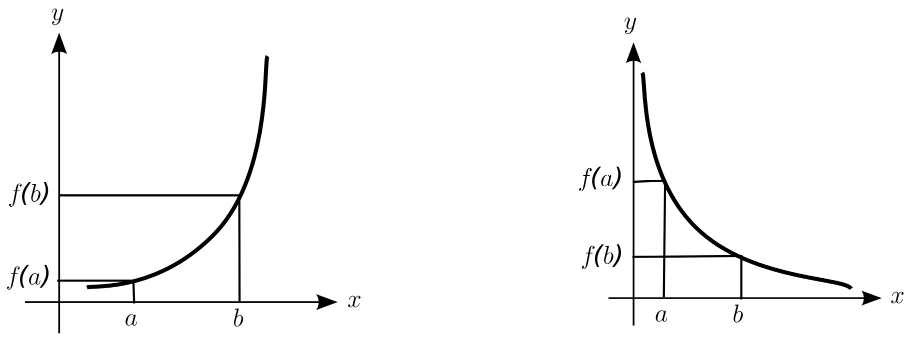
2.1.3 Sens de variation

L'une des premières choses que l'on peut observer sur le graphe d'une fonction est son sens de variation. Pour les deux exemples que l'on a vu plus haut, on peut par exemple dire que pour les $x > 0$, la fonction f est croissante, et qu'elle est décroissante pour les $x < 0$. La fonction g est, elle décroissante pour tout $x > 0$. Or si g représente par exemple l'évolution de la demande f par rapport au prix de vente x, on peut en conclure qu'une augmentation du prix de vente fera diminuer la demande, ; et inversement, une diminution du prix de vente fera augmenter la demande.

D'un point de vue algébrique, les variations d'une fonction f quelconque se traduisent de la façon suivante :

– On dit que f est croissante sur un intervalle I si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$. (On dit que f conserve l'ordre.)
– On dit que f est décroissante sur I si pour tous réels a et b de I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$. (On dit que f inverse l'ordre.)

On peut voir que cela correspond bien à ce que l'on observe graphiquement :



2.2 Variations d'une fonction

Une fois que l'on a observer quand f monte et quand elle descend, on peut tenter d'être un peu plus précis : monte-elle vite ? lentement ? toujours à la même vitesse ? D'un point de vue graphique cela se lit dans la concavité de la courbe. Ainsi, en observant nos exemples, on peut voir que la fonction carré croit de plus en plus rapidement quand x augmente.

Remarque : une fonction qui croit toujours à la même vitesse est représentée par une droite. C'est une fonction du type $f(x) = ax + b$.

D'un point de vue algébrique, on a également des outils permettant de préciser les variations d'une fonction.

2.2.1 Taux d'accroissement

Comme son nom l'indique, le taux de variation est une moyenne. Précisément, si a et b sont deux points de l'axe des abscisses, le taux d'accroissement de f entre a et b est donné par la formule

$$T(a,b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Il permet de mesurer l'évolution moyenne de la fonction f entre $x = a$ et $x = b$. Ainsi, le signe du taux d'accroissement nous donne le sens de variation (moyen) entre a et b :

- Si $T(a,b)$ est positif, les différences $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont de même signe donc la fonction f est croissante.
- Si $T(a,b)$ est négatif, les différences $f(b) - f(a)$ et $b - a$ sont de signes contraires donc la fonction f est décroissante.

D'autre part, la valeur absolue de $T(a,b)$ nous permet donne la vitesse à laquelle la fonction f varie. Par exemple, si $T(a,b) > 1$, cela signifie que $f(b) - f(a)$ est plus grande que $b - a$. Autrement dit, entre a et b, $f(x)$ augmente plus vite que x.

Exemples :

- Calculer le taux d'accroissement de la fonction $f : x \mapsto x^2$ entre $x = 0$ et $x = 1$ puis entre $x = 1$ et $x = 2$ puis entre $x = -1$ et $x = 0$.
- Calculer le taux d'accroissement de la fonction $f : x \mapsto 3x + 1$ entre $x = 0$ et $x = 1$ puis entre $x = 1$ et $x = 2$.
  Remarque : on voit que pour cette fonction affine, le taux d'accroissement est partout le même. De façon générale, le taux d'accroissement d'une fonction affine (de la forme $f(x) = \alpha.x + \beta$) est contant égal au coefficient directeur (α).

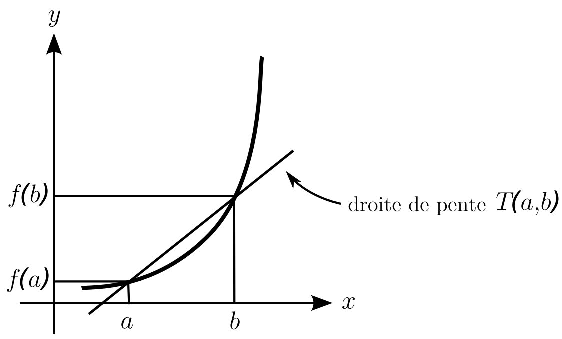
La notation Δ. Pour une fonction f donnée, on peut tracer la courbe représentant f, qui est la courbe d'équation $y = f(x)$. Le taux d'accroissement est alors

$$\frac{\text{la différence des } y}{\text{la différence des } x}.$$

On note cela de la façon suivante :

$$T = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Représentation graphique du taux d'accroissement. Soit f une fonction et a et b deux valeurs de x. Si l'on trace la courbe de f dans un repère, le taux d'accroissement $T(a, b)$ est donné par le coefficient directeur de la droite reliant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

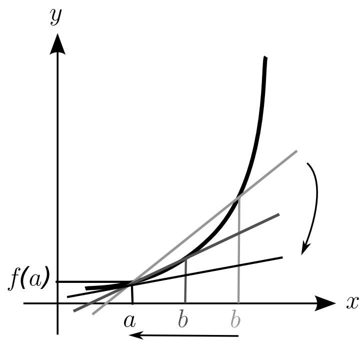


2.2.2 Dérivée

Comme on vient de le voir, le taux d'accroissement n'est qu'une moyenne. Comme toute moyenne, il ne donne pas avec précision ce qu'il se passe entre a et b. Cependant, si a et b sont assez proches (i.e. si Δx est assez petit), la précision augmente. D'autre part, en faisant appel aux limites, on peut définir le taux d'accroissement en un point, que l'on appelle la dérivée :

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Interprétation graphique. Observons graphiquement ce qu'il se passe sur le graphe lorsque le point a se rapproche du point b :



On voit donc que quand le point b se rapproche du point a, la droite reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ se rapproche de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $(a, f(a))$. La dérivée de f en a est donc le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a.

Fonction dérivée. D'après ce que l'on vient de voir, partout où l'on peut tracer une tangente à la courbe, on a un nombre dérivé. La fonction qui à tout point x associe le nombre dérivé $f'(x)$ est la fonction dérivée de f. La feuille ci-jointe donne les fonctions dérivées des fonctions usuelles.

D'autre part, toutes les fonctions que l'on va étudier seront construites à partir des fonctions usuelles, et des opérations $+$, $-$, $\times$, $\div$ et $\circ$. Les formules suivantes, qui donnent les dérivées de ces opérations nous permettront donc de calculer la dérivée de n'importe quelle fonction.

Soient donc u et v deux fonctions dérivables, et u' et v' leurs dérivées respectives.

- Pour tout réel λ, on a $(\lambda.u)' = \lambda.u'$.
- $(u + v)' = u' + v'$.
- $(u.v)' = u'.v + u.v'$.
- $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$.
- $(v \circ u)' = u'.v' \circ u$

Exemples : Calculer les dérivée des fonctions suivantes

1. $f : x \mapsto x^3 + 2x^2 - x + 1$.

2. $g : x \mapsto x^2 \ln x$.

3. $h : x \mapsto \frac{x^2-1}{2x+1}$.

2.2.3 Étude de fonctions

Variation et dérivées. Tout comme le signe du taux d'accroissement nous donne le sens de variation moyen de f entre deux points, le signe de la dérivée de f en un point nous donne le sens de variation de f en ce point. Précisément, on a :

- La fonction f est croissante aux points x où $f'(x) > 0$.
- La fonction f est décroissante aux points x où $f'(x) < 0$.
- La fonction f est marque un arrêt aux points x où $f'(x) = 0$. (En ces points, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale).

Ainsi, si l'on peut calculer la dérivée d'une fonction donnée, et calculer le signe de cette dérivée en chaque point, on peut établir le tableau de variation de la fonction étudiée.

Exemple : considérons à nouveau la fonction $f : x \mapsto x^2$. On a vu que $f'(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le signe de f' est alors donné par le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

On peut alors en déduire les variations de la fonction f : la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$. On peut résumer cela dans le tableau suivant, en le complétant par quelques valeurs particulières de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dérivées et extrema. Dans l'exemple ci-dessus, on voit que la fonction carré admet un minimum en $x = 0$. Or ce minimum correspond à un point où la dérivée s'annule. De façon générale, si une fonction possède un minimum ou un maximum, alors sa courbe aura une tangente horizontale en ce point, et cela correspondra à un point où la dérivée s'annule.

Attention : ça n'est pas parce que la dérivée s'annule que l'on a nécessairement un extremum...

Résumé : pour étudier une fonction f, on commence par tracer sa courbe avec le plus de soin possible.
Pour tracer cette courbe, la démarche est la suivante.

1. Calculer la dérivée de f.
2. Factoriser f' au maximum.
3. Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Compléter ce tableau en calculant quelques valeurs significatives de $f(x)$.

2.3 Coût total, coût moyen, coût marginal

2.3.1 Coût total

Une première application importante de la notion de dérivée en économie concerne le coût de production. Précisément, considérons une entreprise qui produit un certain bien X. La production d'une certaine quantité q de produit X entraine un coût total, que l'on notera C_t. Il est clair que plus on produit, plus le coût total est élevé (autrement dit, la fonction C_t est une fonction croissante de la quantité q). Mais ce coût total peut être constitué de différentes choses. Ainsi, si la production de X nécessite l'achat d'une machine particulière, cet investissement de départ fait évidement partie du coût total, mais il ne dépend pas de la quantité q que l'on veut produire. Cet investissement fait donc partie du coût fixe. À l'inverse, le coût de la matière première nécessaire à la production de X dépend directement de la quantité q que l'on veut produire. Ce coût fait donc partie du coût variable.

Exemple : si l'évolution des dépenses engendrées par la production d'une quantité q de produit X est donnée par

$$C_t(q) = q^3 - 6q^2 + 12q + 8,$$

le coût variable est $q^3 - 6q^2 + 12q$ (formé de tout ce qui dépend de q) et le coût fixe est 8 (tout ce qui ne dépend pas de q).

2.3.2 Coût moyen

Une fois que l'on connaît le coût total de production d'une certaine quantité de bien X, on peut vouloir connaître le coût d'une unité de bien. C'est ce que l'on appelle le coût moyen C_{moy}. Pour connaître ce coût moyen, il suffit de diviser le coût total C_t par la quantité de matière produite :

$$C_{moy}(q) = \frac{C_t(q)}{q}.$$

Dans notre exemple, le coût moyen est donc

$$C_{moy}(q) = q^2 - 6q + 12 + \frac{8}{q}.$$

Remarque : le coût moyen est encore fonction de la quantité q de bien que l'on veut produire. En particulier, si C_t contient un coût fixe, ce coût fixe aura une importance de moins en moins grande dans le calcul du coût moyen si la quantité q produite augmente.

2.3.3 Coût marginal

Enfin, à partir du coût total C_t, on peut calculer le coût marginal C_{moy}. Il s'agit de l'accroissement du coût total résultant de la production d'une unité supplémentaire (ou, si la production varie de façon continue, l'accroissement du coût total engendré par une légère augmentation de la quantité produite q). Ainsi,

$$C_{moy}(q) = \lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta C_t}{\Delta q} = C_t'(q).$$

Dans l'exemple précédent, on a donc $C_{moy}(q) = 3q^2 - 12q + 12$. On remarque notamment que le coût fixe n'intervient pas dans le coût marginal.

2.3.4 Étude qualitative des différents types de coûts

Étudions en détails un nouvel exemple. Considérons la production d'un bien X dont le coût de production en fonction de la quantité q produite est donné par

$$C_t(q) = q^3 - 6q^2 + 12q.$$

(Ici, le coût fixe est nul.)

Le coût moyen est donné par

$$C_{moy}(q) = \frac{C_t(q)}{q} = q^2 - 6q + 12$$

et le coût marginal est donné par

$$C_{moy}(q) = C_t'(q) = 3q^2 - 12q + 12.$$

Pour effectuer une étude qualitative de cette production, on va étudier ces trois fonctions, afin d'optenir pour chacune une courbe (ou une allure de courbe). L'étude de ces courbes nous permettra d'obtenir des informations sur ces trois coût, et par exemple optimiser la production. (On se contentera bien sûr d'étudier ces fonctions sur $[0, +\infty[$).

Étude du cout total $C_t(q)$. Pour obtenir une première allure de la courbe, on étudie le signe de sa dérivée. Or sa dérivée est

$$C_t'(q) = 3q^2 - 12q + 12.$$

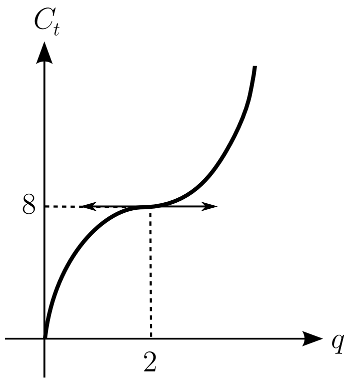
Pour obtenir le signe de cette dérivée, on doit factoriser. Ainsi,

$$C_t'(q) = 3(q^2 - 4q + 4) = 3(q - 2)^2.$$

On peut rapidement remarquer que cette dérivée est toujours positive, ce qui signifie que le coût total est une fonction croissante. On voit également que le point d'abscisse $q = 2$ est un point particulier de la courbe. Il correspond à un point où la dérivée est nulle. La courbe de C_t admet donc en ce point une tangente horizontale. En calculant quelques valeurs particulière de $C_t(q)$, on peut alors construire le tableau de variations suivant,

q	0		2		$+\infty$
$C_t'(q)$		+	0	+	
C_t	8	$\nearrow$	15	$\nearrow$	$+\infty$

et l'on obtient l'allure de la courbe suivante.



On peut maintenant interpréter les différentes choses que l'on a noté sur la courbe de C_t. La première chose que l'on peut dire est que notre fonction est croissante. C'est assez naturel : plus on produit, plus cela coût. Mais une seconde chose que l'on peut interpréter est la valeur $q = 2$ qui apparaît comme un point critique dans l'évolution du coût total : tant que $q < 2$, la courbe est concave. Cela signifie que le coût $C_t(q)$ grandit moins vite que q. Autrement dit, on aura tout intérêt à augmenter la production tant que l'on n'aura pas atteint ce seuil. Après ce point, la courbe devient convexe. Cela signifie que le coût de production grandit plus vite que ce qu'elle peut rapporter.

Enfin, en étudiant les formules donnant C_{moy} et C_{marg}, on va voir que l'on peut les lire sur la courbe de C_t.

1. Le coût marginal C_{marg} est la dérivée de C_t. Elle est donc donnée par le coefficient directeur de la tangente en chaque point. Remarquons notamment que le point d'abscisse $q = 2$ est un point où le coût marginal est nul.

2. Le coût moyen s'interprète également comme le coefficient d'une droite tracée à partir de la courbe de C_t. Dans notre exemple, la formule donnant C_{moy} en fonction de C_t peut se lire
$$C_{moy}(q) = \frac{C_t(q)}{q} = \frac{C_t(q) - C_t(0)}{q - 0}.$$

Cela correspond donc au taux d'accroissement de C_t entre le point d'abscisse 0 et le point d'abscisse q.

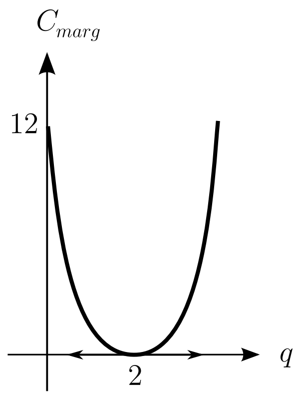
Le coût marginal. Pour le coût marginal C_{marg}, on a

$$C'_{marg}(q) = 6q - 12.$$

D'où le tableau

q	0		2		$+\infty$
$C'_{marg}(q)$		$-$	0	$+$	
C_{marg}	12	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

et la courbe



Remarquons tout d'abord que C'_{marg} est la dérivée de la dérivée de C_t. On l'appelle donc la dérivée seconde de C_t. D'autre part, en étudiant la courbe de C_{marg}, on voit que le point d'abscisse $q = 2$ est encore un point critique. Précisément, pour $q < 2$, le coût marginal est positif et décroissant, puis croissant pour $q > 2$. Cela correspond exactement à ce que l'on a observé pour le coût total :

- Quand C_{marg} est positif et décroissant, la dérivée de C_t est positive et décroissante. Le coût C_t est donc croissant, mais augmente de moins en moins vite. On retrouve le fait que la courbe est concave.
- Quand C_{marg} est positif et croissant, le coût C_t est encore croissant, mais augmente maintenant de plus en plus vite. On retrouve le fait que la courbe est convexe.

Le point $q = 2$ est le point d'inflexion de la courbe C_t. C'est le point où la dérivée de C_t change de sens de variation, où encore le point où la dérivée seconde de C_t change de signe.

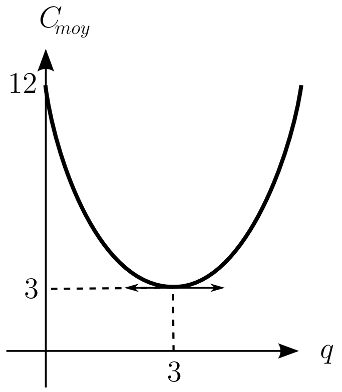
Le coût moyen. Enfin, pour le coût moyen C_{moy} on a

$$C'_{moy}(q) = 2q - 6$$

et l'on obtient le tableau de variations suivant

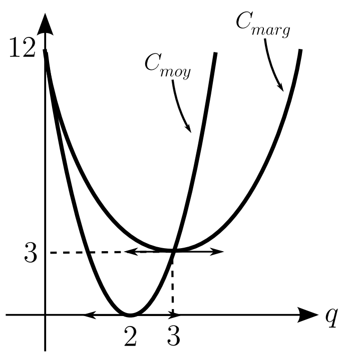
q	0		3		$+\infty$
$C'_{moy}(q)$		$-$	0	$+$	
C_{moy}	12	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

et la courbe



On voit sur cette courbe que pour le coût moyen, c'est le point d'abscisse $q = 3$ qui est un point critique. Précisément, pour $q < 3$, le coût moyen diminue. Cela signifie que tant que $q < 3$, une augmentation de la production entraîne une diminution du coût de chaque pièce produite.

Étude comparée de C_{marg} et C_{moy}. Si nous plaçons maintenant les courbes de C_{marg} et C_{moy} sur un même graphe, on voit que les deux courbes se croisent en $q = 3$. Autrement dit, ces deux courbes se croisent là où le coût moyen est le minimum.

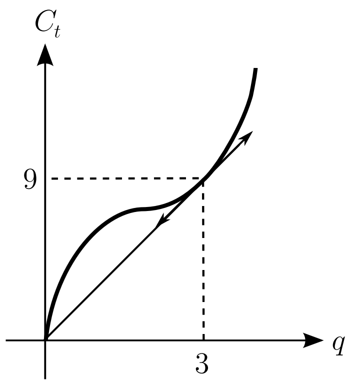


Cela se retrouve par le calcul. En effet, le minimum de la fonction C_{moy} est atteint là où sa dérivée s'annule. Or

$$\begin{aligned} C'_{moy} &= \left(\frac{C_t}{q}\right)' \\ &= \frac{C'_t.q - C_t}{q^2} \\ &= \frac{1}{q}\left(C'_t - \frac{C_t}{q}\right) \\ &= \frac{1}{q}(C_{marg} - C_{moy}) \end{aligned}$$

Ainsi, on voit que la dérivée s'annule quand $C_{marg} = C_{moy}$.

Enfin, on peut interpréter ce résultat sur la courbe de C_t : comme C_{moy} est donné par la droite reliant la courbe à l'origine et que C_{marg} est donnée par la tangente à C_t, le point $q = 3$ correspond au point de la courbe C_t où la droite joignant l'origine est la tangente à la courbe.



Optimisation du profit. Intéressons nous maintenant au profit que l'on peut faire grâce à cette production. Soit $p = 12$ euros le prix unitaire de notre produit. Le bénéfice que l'on tirera de la production et la vente d'une quantité q de ce bien est

$$B(q) = pq - C_t(q) = -q^3 + 6q^2.$$

L'étude de cette fonction va nous permettre de déterminer la quantité qu'il faut produire pour obtenir un profit maximum. Pour étudier cette fonction, on commence par la dériver :

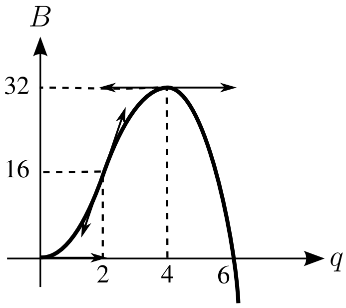
$$B'(q) = -3q^2 + 12q$$

On factorise en suite cette dérivée pour avoir son signe et les variations de B :

$$B'(q) = -3q(q - 4).$$

q	0		4		$+\infty$
$B'(q)$	0	$+$	0	$-$	
B	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

D'où la courbe suivante.



En lisant l'évolution de la courbe, on voit qu'au début, le bénéfice augmente rapidement lorsque la production augmente. Puis le bénéfice augmente de moins en moins vite, jusqu'à ce que l'on arrive à $q = 4$. À partir de $q = 4$, le bénéfice diminue et finit même par devenir négatif à partir de $q = 6$.

Remarquons que là encore le point $q = 2$ est un point particulier de la courbe. C'est à partir de $q = 2$ que l'augmentation du bénéfice commence à ralentir. C'est un point d'inflexion de la courbe.

2.4 Élasticité

Une autre application de la dérivée est le calcul d'élasticité. Étant donnée une fonction f, qui dépend de x, l'élasticité mesure la sensibilité de la quantité $f(x)$ aux variations de x.

En économie, on peut par exemple établir une fonction liant la demande et le prix. Comme on l'a déjà vu, le prix d'un produit ou d'un service influence la demande. (Traditionnellement, si le prix augmente, la demande diminue). L'élasticité de la demande mesure donc la sensibilité de la demande par rapport aux variations du prix d'un produit. Il est important de pouvoir mesurer cette sensibilité si l'on veut pouvoir gérer comme il le faut le prix d'une marchandise que l'on veut mettre sur le marché.

2.4.1 Définition

On a déja vu deux outils permettant de représenter les variation des y en fonction des variations de x :

– le taux d'accroissement :
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{ou} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

– la dérivée qui est la limite de ce taux quand b tend vers a, ou quand Δx tend vers 0 :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

L'élasticité est une variante de ces quantités. Ainsi, étant donnée une fonction f, dépendant d'un paramètre x, l'élasticité de $y = f(x)$ en un point x_0 est donnée par

$$E_{x_0}(y/x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}.$$

Ici, on a $\Delta x = x - x_0$ et $\Delta y = f(x) - f(x_0)$. x est la variable par rapport à laquelle on calcule l'élasticité et x_0 est le point auquel on fait ce calcul. Si l'on peut faire ce calcul en tout point x_0, on obtient la fonction élasticité de f par rapport à x notée $E(y/x)$.

2.4.2 Interprétation de l'élasticité

Comment interpréter l'élasticité d'une fonction en un point ? Remarquons tout d'abord que $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ étant une différence, la quantité $\frac{\Delta y}{y}$ est un taux de variation. Cela donne la variation de la fonction f entre $f(x)$ et $f(x_0)$, pondérée par la valeur de $f(x)$. De même, la quantité $\frac{\Delta x}{x}$ donne le taux de variation de la variable x entre x et x_0, pondérée par la valeur de x. De ce point de vue, l'élasticité permet donc de comparer le taux de variation de la fonction f en fonction du taux de variation de la variable x. Ainsi,

- Si $|E(y/x)| > 1$, on a $|\frac{\Delta y}{y}| > |\frac{\Delta x}{x}|$. Cela signifie qu'une variation de x entraine une variation plus importante de y. La fonction y est alors dite élastique.

- Si $|E(y/x)| < 1$, on a $|\frac{\Delta y}{y}| < |\frac{\Delta x}{x}|$. Cela signifie qu'une variation de x entraine une variation moins importante de y. La fonction y est alors dite inélastique.

- À l'extrême, si $|E(y/x)| \to +\infty$, la fonction y est parfaitement élastique, et si $E(y/x) = 0$, la fonction y est parfaitement inélastique.

D'autre part, comme pour la dérivée, le signe de l'élasticité donne le sens de variation des phénomènes étudiés. Précisément,

- Si $y' > 0$, alors $E(y/x) > 0$ et la fonction y est croissante.
- Si $y' < 0$, alors $E(y/x) < 0$ et la fonction y est décroissante.

Exemple : l'élasticité de la demande par rapport au prix. Comme on l'a vu en introduction, le prix d'un produit influence la demande, c'est-à-dire la quantité de produit que l'on pourra vendre. On peut donc exprimer la demande q à l'aide d'une fonction f, dépendant du prix de vente p :

$$q = f(p).$$

La fonction d'élasticité $E(q/p)$ traduit alors la variation relative de la demande du bien $(\Delta q/q)$, exprimée en pourcentage, lorsque son prix est modifié d'un certain pourcentage $(\Delta p/p)$. Ainsi, si par exemple l'élasticité $E(q/p)$ est égale à -3, cela signifie qu'une variation de 10% du prix entraine une diminution de 30% de la consommation. La valeur absolue 3 donne l'amplitude de variation, et le signe donne le sens de variation.

Pour les biens de consommation courante, en général, la demande est une fonction décroissante par rapport au prix et le coefficient d'élasticité est donc partout négatif. D'autre part, sauf cas particuliers, la valeur de l'élasticité n'est pas constante en tout point, ce qui traduit le fait que le consommateur réagit de façon différente selon le niveau de prix préalablement fixé.

2.4.3 Calcul de l'élasticité

L'élasticité d'une fonction est fortement reliée à sa dérivée. Ainsi,

$$\begin{aligned} E(y/x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{{}^{\Delta y}/_{y}}{{}^{\Delta x}/_{x}} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \times \frac{x}{y} \\ &= y' \times \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Exemple : soit $y = 3x + 5$. La dérivée de cette fonction est donnée par $y' = 3$ et l'élasticité de cette fonction est donnée par

$$\begin{aligned} E(y/x) &= 3. \left(\frac{x}{3x+5} \right) \\ &= \frac{3x}{3x+5} \end{aligned}$$

et pour $x_0 = 2$, valeur de $E(y/x)$ en 2 est $E(y/x)(2) = 6/11$.

2.4.4 Élasticité et opérations

Comme pour la dérivée, on peut établir des règles de calcul pour l'élasticité d'une somme, d'un produit, etc... Ainsi, si u et v sont deux fonction dérivables, on a

- Pour tout réel λ, on a $E(\lambda.u) = E(u)$:

$$\begin{aligned} E(\lambda.u/x) &= (\lambda.u)' \times \frac{x}{\lambda.u} \\ &= \lambda.u' \times \frac{x}{\lambda.u} \\ &= u' \times \frac{x}{u} \\ &= E(u/x). \end{aligned}$$

– $E(u.v) = E(u) + E(v)$:

$$\begin{aligned} E(u.v/x) &= (u.v)' \times \frac{x}{u.v} \\ &= (u'.v + u.v') \times \frac{x}{u.v} \\ &= u' \times \frac{x}{u} + v' \times \frac{x}{v} \\ &= E(u/x) + E(v/x). \end{aligned}$$

– $E\left(\frac{u}{v}\right) = E(u) - E(v)$:

$$\begin{aligned} E\left(\frac{u}{v}/x\right) &= \left(\frac{u}{v}\right)' \times \frac{x}{\frac{u}{v}} \\ &= \frac{u'.v - u.v'}{v^2} \times \frac{x.v}{u} \\ &= u' \times \frac{x}{u} - v' \times \frac{x}{v} \\ &= E(u/x) - E(v/x). \end{aligned}$$

2.4.5 Élasticités croisées

Lorsqu'une fonction (telle que la demande, par exemple) fait intervenir plusieurs variables (comme le prix de plusieurs biens, par exemple), on peut calculer les élasticités croisées par rapport aux différentes variables. Ainsi, si $q = f(x, y, z)$, on peut calculer les élasticités

$$\begin{aligned} E(q/x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta q/q}{\Delta x/x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta x} \times \frac{x}{q} \\ E(q/y) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta q/q}{\Delta y/y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta y} \times \frac{y}{q} \\ E(q/z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta q/q}{\Delta z/z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta z} \times \frac{z}{q} \end{aligned}$$

La limite $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta x}$ est appelée dérivée partielle de q par rapport à x. Elle se calcule en considérant q comme une fonction de x, les autres variables étant alors des paramètres. On la note q'_x. Ainsi, on a

$$E(q/x) = q'_x \times \frac{x}{q}, \quad E(q/y) = q'_y \times \frac{y}{q}, \quad E(q/z) = q'_z \times \frac{z}{q}.$$

Chapitre 3

Suites

Les suites sont des objets mathématiques qui permettent de modéliser de nombreuses situations financières. Supposons par exemple que l'on place un capital de 8 000 € à un taux simple de 6% par ans. Comment calculer le capital que l'on aura au bout d'un an ? 2 ans ? 5 ans ? 20 ans ? Comment savoir au bout de combien de temps on pourra s'offrire un tour du monde à 15 000 € ?

Les suite permettent de répondre rapidement à ces questions, et donnent un modèle que l'on pourra ensuite appliquer à tous les problèmes de ce type et bien d'autres.

Commençons donc par un peu de théorie.

3.1 Définition d'une suite

3.1.1 Définition

Une suite, une suite de nombres, est la donnée d'une série de nombres dans un ordre précis. En général, on note u_0 le premier terme de la suite, u_1 le deuxième, u_2 le troisième, etc... Enfin, on note u_n le terme général et on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des termes de la suite.

En les choisissant les uns après les autres, on peut construire n'importe quelle suite de nombres. Par exemple,

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 4, u_4 = 2, u_5 = 14, \ldots$$

Une suite construite au hasard est une suite aléatoire. Mais ça n'est pas celles ci qui nous intéresse. Dans ce chapitre, on va étudier des suites de nombre construites sur la logique.

Les suites logiques permettent de représenter et de prévoir différents phénomènes économiques, comme par exemple le calcul d'intérêts.

Il y a deux façons de construire une suite logique.

3.1.2 Définition explicite

Une première façon de définir une suite est de donner son terme général directement en fonction de n.

Exemples :
- (u_n) : $u_n = 2n+1$. Ici, on a donc $u_0 = 2\times 0+1$, $u_1 = 2\times 1+1 = 3$, $u_2 = 2\times 2+1 = 5$, $u_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21$, etc. . .
- (u_n) : $u_n = 3 \times 5^n$. Ici, on a $u_0 = 3 \times 5^0 = 3$, $u_1 = 15$, $u_2 = 75$, etc. . .

Le principal avantage de ce type de définition qu'il permet de calculer rapidement n'importe quel terme de la suite.

3.1.3 Suites récurrentes

Une autre façon de définir une suite est de donner la règle permettant de passer d'un terme au suivant. Dans ce cas, on donne le terme général u_n en fonction du terme précédent u_{n-1}. Par exemple, on peut passer d'un terme à l'autre en ajoutant 2 à chaque fois, on définit

$$u_n = u_{n-1} + 2.$$

Pour qu'une telle suite soit définie correctement, il faut également donner le premier terme.

Exemples :
- (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_n = u_{n-1} + 2 \end{cases}$
  Ici, on a $u_1 = 3$, $u_2 = 3 + 2 = 5$, $u_3 = 5 + 2 = 7$, etc. . .

- (u_n) : $\begin{cases} u_0 = 3, \\ u_n = 5u_{n-1} \end{cases}$
  Ici, on a $u_1 = 15$, $u_2 = 5 \times 15 = 75$, etc. . .

On voit ici que si l'on veut calculer un terme (par exemple u_{10}), il faut calculer tous les termes précédents.

Cependant, les suites récurrentes sont souvent plus pratiques pour modéliser une situation donnée. Par la suite, on verra comment modéliser une situation (financière) à l'aide de suites récurrentes, puis comment transformer cette suite en une suite explicite pour pouvoir l'exploiter et prévoir le comportement du système que l'on aura modélisé.

3.1.4 Variations d'une suite

Comme pour les fonctions, on peut étudier les variations d'une suite. Cela revient à comparer les termes de la suite entre eux, pour savoir si u_n augment, diminue, oscille, etc...

Ainsi,

– une suite (u_n) est croissante si pour tout entier n, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$.
– une suite (u_n) est décroissante si pour tout entier n, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$.

3.2 Suites arithmétiques

3.2.1 Forme récurrente

On appelle suite arithmétique toute suite telle que pour passer d'un terme au suivant, on ajoute une même quantité r, que l'on appelle la raison. Reprenons par exemple le capital de 8 000 € que l'on a investi en introduction. Un investissement à taux simple signifie que chaque année, les intérêts sont calculés sur l'investissement de départ. Autrement dit, chaque année, ce placement rapporte 6% de 8 000 € , soit

$$I = 8\,000 \times \frac{6}{100} = 480\,€.$$

Pour connaître ce que l'on possède au bout d'un an, on ajoute les 480 € d'intérêts au capital de départ :

$$C_1 = 8\,000 + 480 = 8\,480\,€.$$

Pour connaître ce que l'on possède au bout de deux ans, on ajoute 480 € à ce que l'on avait, soit

$$C_2 = 8\,480 + 480 = 8\,960\,€.$$

De même, pour calculer ce que l'on possède au bout de n années, on ajoute 480 € à ce que l'on a calculé pour l'année d'avant. On a donc bien une suite arithmétique, de raison 480 et de premier terme 8 000.

De façon générale, une suite arithmétique sous forme récurrente est donnée par

$$(u_n) \;:\; \begin{cases} u_0 \text{ donné,} \\ u_n = u_{n-1} + r. \end{cases}$$

Dans notre exemple, notre capital est représenté par la suite (C_n) définie par

$$(C_n) \;:\; \begin{cases} C_0 = 8\,000, \\ C_n = C_{n-1} + 480. \end{cases}$$

3.2.2 Forme explicite

Imaginons que l'on souhaite maintenant calculer notre capital au bout de 20 ans. Avec la représentation que l'on a choisi, on doit calculer notre capital pour toutes les années de 1 à 20 pour connaître notre capital au bout de 20 ans. Mais si l'on peut trouver une forme explicite pour la suite (C_n) que l'on vient de construire, on pourrait obtenir notre capital pour n'importe quelle durée de placement par un simple calcul. Or si l'on observe ce que l'on a gagné comme intérêts au bout de 2 ans de placement, on a

$$I_2 = 2 \times 480\,€.$$

De même, au bout de trois ans, on a

$$I_3 = 3 \times 480\,€.$$

Avec cette méthode, on peut calculer notre capital au bout de 20 ans, sans avoir à faire 20 calculs : les intérêts que l'on gagne au bout de 20 ans, sont

$$I_{20} = 20 \times 480 = 9\,600\,€$$

et notre capital est alors de

$$C_{20} = 8\,000 + 20 \times 480 = 17\,600\,€.$$

De façon générale, la forme explicite d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 est

$$u_n = u_0 + n.r.$$

Ainsi, dans notre situation, notre capital au bout de n années de placement sera de

$$C_n = 8\,000 + 480n.$$

Si l'on veut maintenant savoir au bout de combien de temps on pourra se payer le voyage à 15 000, il nous suffit de résoudre l'équation

$$15\,000 = 8\,000 + 480n.$$

On trouve $n = \frac{15\,000-8\,000}{480} \simeq 14,6$. Il nous faudra donc attendre 15 ans.

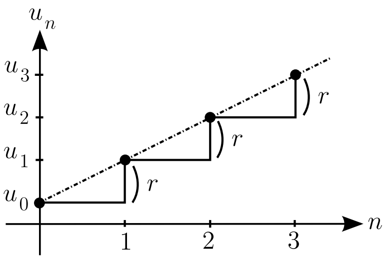
3.2.3 Variations d'une suite arithmétique

Les variations d'une suite arithmétique sont particulièrement simple. Ainsi,

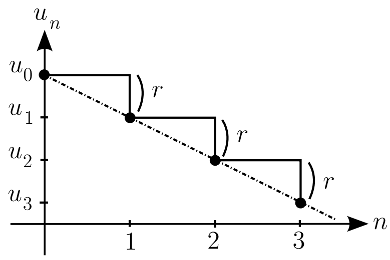
- si la raison r est positive, la suite arithmétique correspondant est croissante.
- si la raison r est négative, la suite arithmétique correspondant est décroissante.

3.2.4 Représentation graphique

Comme pour les fonctions, on peut représenter les suites numériques dans un plan, muni d'un repère, en plaçant n en abscisse, et u_n en ordonnée. Concernant les suites arithmétique, on voit sur le dessin ci-dessous que les points représentant une suite arithmétique de raison r sont alignés, sur une droite de coefficient directeur r.



Raison $r > 0$.



Raison $r < 0$.

3.3 Suites géométriques

3.3.1 Forme récurrente

On appelle suite géométrique toute suite telle que pour passer d'un terme au suivant, on multiplie toujours par une même quantité q, que l'on appelle encore la raison. Reprenons l'exemple du capital de 8 000 € que l'on a investi plus haut et plaçons les maintenant à un taux composé de 6%. Un investissement à taux composé signifie que chaque année, les intérêts perçus sont ajoutés au capital et participent au calcul d'intérêts de l'année suivante. Ainsi, au bout d'un an, notre capital est de

$$C_1 = 8\,000 + 8\,000 \times \frac{6}{100} = 8\,000\left(1 + \frac{6}{100}\right) = 8\,480\,€.$$

Au bout de deux ans, le capital est de

$$C_2 = 8\,480 + 8\,480 \times \frac{6}{100} = 8\,480\left(1 + \frac{6}{100}\right) = 8\,998,8\,€.$$

De façon générale, notre capital au bout de n années est obtenu par la formule

$$C_n = C_{n-1}.\left(1 + \frac{6}{100}\right)$$

Il s'agit donc d'une suite géométrique de raison $\left(1 + \frac{6}{100}\right)$ et de premier terme $C_0 = 8\,000$.

une suite géométrique de raison q est donc définie sous forme récurrente par

$$(u_n)\ :\ \begin{cases} u_0 \text{ donné,} \\ u_n = q.u_{n-1} \end{cases}$$

3.3.2 Forme explicite

Comme pour les suites arithmétiques, il existe une forme explicite pour les suites géométriques, ce qui nous permet de calculer n'importe quel terme de la suite par un calcul direct. Ainsi, la forme explicite d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 est

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Ainsi, dans notre exemple, notre capital au bout de n années de placement est donné par la formule

$$C_n = 8\,000 \times \left(1 + \frac{6}{100}\right)^n.$$

En particulier, on a

$$C_{20} = 8\,000 \times 1,06^{20} \simeq 25\,657,09\,€$$

On voit là encore que la forme explicite permet de calculer directement n'importe quel terme de la suite sans avoir à calculer les précédents.

Concernant le problème de savoir au bout de combien de temps on aura acquis un capital donné, le problème est un peu plus compliqué que pour les suites arithmétique. Ainsi, pour savoir au bout de combien de temps on aura 15 000 €, on doit résoudre l'équation

$$15\,000 = 8\,000 \times 1,06^n.$$

Il faut pour cela faire appel au logarithme.

3.3.3 Variations d'une suite géométrique

Comme pour les suites arithmétiques, la variations d'une suite géométrique sont assez simples, si la raison est positive.

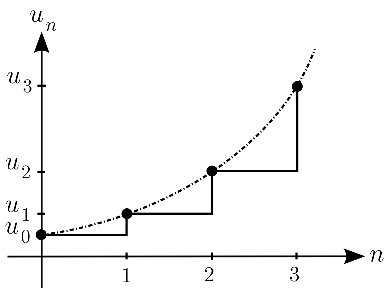
- Si la raison q d'une suite géométrique est plus grande que 1, alors la suite est croissante.
- Si $0 < q < 1$, la suite géométrique associée est décroissante.

Pour les suites géométriques dont la raison est négative, les variations sont un peu plus compliquées. Si la raison q est négative, à chaque fois que l'on passe d'un terme au suivant, on change de signe. On a donc une suite (u_n) qui oscille. La encore, on peut tout de même distinguer les cas, selon que q est plus grande ou plus petite que -1. Ainsi,

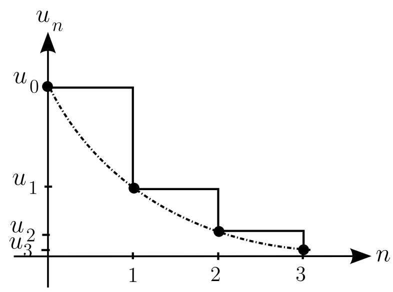
- Si $q < -1$, la suite $(|u_n|)$ est croissante.
- Si $-1 < q < 0$, la suite $(|u_n|)$ est décroissante.

3.3.4 Représentation graphique

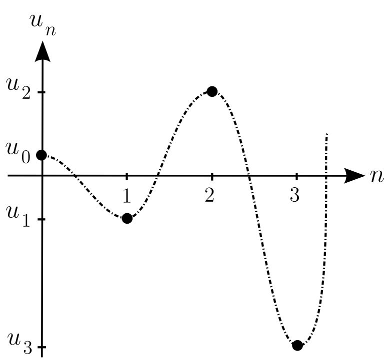
Comme pour les suite arithmétiques, on peut représenter une suite géométrique dans un plan muni d'un repère. Cependant, contrairement aux suites arithmétiques, on voit sur le dessin ci-dessous que pour une suite géométrique, les points ne sont plus alignés, mais suivent une courbe exponentielle.



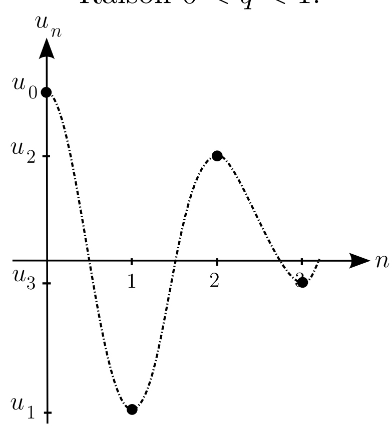
Raison $q > 1$.



Raison $0 < q < 1$.



Raison $q < -1$.



Raison $-1 < q < 0$.

Chapitre 4

Fonctions exponentielles et logarithmes

4.1 Les fonctions exponentielles

4.1.1 Définitions et exemples

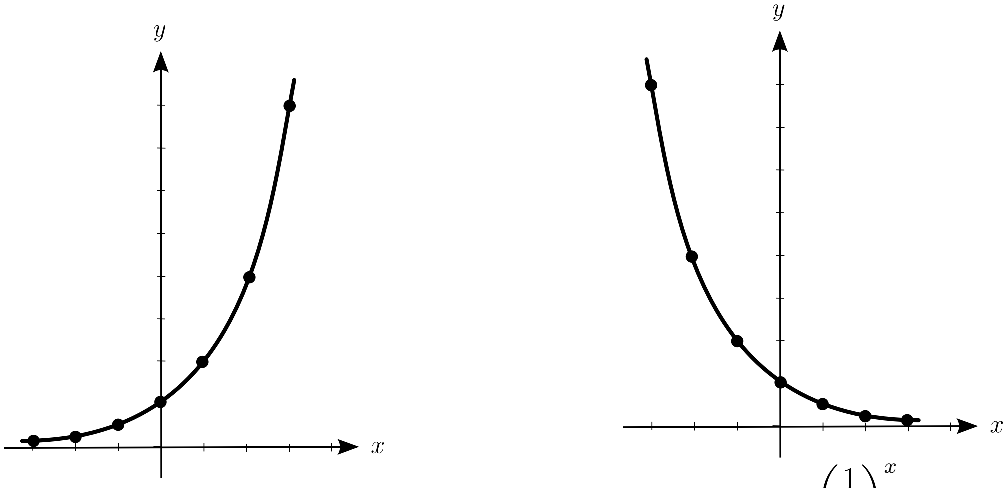
Une fonction exponentielle est une fonction de la forme $[x \mapsto a^x]$ où a est un nombre fixé.

Exemples :
- La fonction $[x \mapsto 2^x]$.
- La fonction $[x \mapsto 10^x]$.
- La fonction $\left[x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$.

Étudions les deux exemples $[x \mapsto 2^x]$ et $\left[x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x\right]$. Pour cela, calculons ce qu'elles valent pour quelques valeurs de x :

x	2^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	$0,125$	8
-2	$0,25$	4
-1	$0,5$	2
0	1	1
1	2	$0,5$
2	4	$0,25$
3	8	$0,125$
4	16	$0,0625$
5	32	$0,03125$

En les plaçant dans un repère, on obtient les courbes suivantes



$x \longmapsto 2^x$ $\qquad$ $x \longmapsto \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

On voit que la fonctions $[x \mapsto 2^x]$ est croissante et convexe (autrement dit, elle croît de plus en plus vite). À l'inverse, la fonction $\left[x \mapsto \left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right]$ est décroissante, et se rapproche petit à petit de 0. D'autre part, on peut remarquer que ces deux fonction sur définies sur $\mathbb{R}$ tout entier, et sont toutes les deux à valeurs strictement positives.

On peut cela de la façon suivante :

1. Toute fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_*^+$.
2. Si $a > 1$, la fonction $[x \mapsto a^x]$ est strictement croissante et convexe.
3. Si $a < 1$, la fonction $[x \mapsto a^x]$ est strictement décroissante et tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

4.1.2 Propriétés

Croissances comparées. S'il n'y a qu'une chose à retenir sur les fonctions exponentielles est que ce sont les fonctions dont la croissance est la plus rapide. On pourra par exemple penser au vizir qui introduit les échecs en Andalousie et qui demanda en récompense qu'on lui dépose un grain de riz sur la première case, deux sur la deuxième, quatre sur la troisième, et ainsi de suite, en doublant à chaque fois. La dernière case devait alors contenir 2^{64} grains de riz, ce qui représente près de 650 milliards de tonnes...

Jusqu'ici, les fonctions croissantes et convexes que l'on connaît sont les fonctions puissances ($[x \mapsto x^n]$). Or pour tout nombre $a > 1$, la fonction $[x \mapsto a^x]$ croît plus vite que n'importe quelle puissance de x. Graphiquement, cela signifie la courbe d'une fonction puissance (de base $a > 1$) finira toujours par passer au dessus de n'importe quelle courbe représentant une fonction puissance.

Règles de calculs. Les fonctions exponentielles vérifient certaines règles de calculs, qui sont exactement les règles de calculs sur les puissances. Ainsi,

1. Pour n'importe quelle base a, on a $a^0 = 1$.
2. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$a^{x+y} = a^x.a^y \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$
$$(ab)^x = a^x.b^x \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$
3. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a
$$a^x = a^y \quad \Longleftrightarrow \quad x = y \qquad (*)$$

Ces règles nous permettent de résoudre des équations exponentielles.

Exemples :
– L'équation $5^{3x+1} = 5^{x-1}$ donne $3x + 1 = x - 1$ puis $x = 1$.

– L'équation $\dfrac{4^{2x+1}}{2^{x-1}} = 1$ donne
$$\begin{aligned} \frac{4^{2x+1}}{2^{x-1}} = 1 &\Leftrightarrow \frac{2^{4x+2}}{2^{x-1}} = 1 \\ &\Leftrightarrow 2^{4x+2-(x-1)} = 2^0 \\ &\Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

4.1.3 Deux fonctions exponentielles particulières

Parmi toutes les fonctions exponentielles, il en est deux que l'on rencontrera plus souvent : l'exponentielle en base 10 et l'exponentielle en base e.

L'exponentielle en base 10. L'exponentielle en base 10 est l'exponentielle utilisée pour évaluer un ordre de grandeur. Elle est à la base de la notation scientifique $a.10^n$ et permet de comparer des quantités qui ne sont pas forcément égales, mais proches. Ainsi, en notant $4000 = 4.10^3$ et $1500 = 1,5.10^3$, on dira que ces deux quantités sont de même ordre.

L'exponentielle en base e. La notation e, inventée par L. Euler au XVIIIième siècle désigne un nombre irrationnel dont une valeur approchée est $2,71828...$. La propriété principale de la fonction [exp : $x \mapsto e^x$] est le fait qu'elle est égale à sa dérivée. De ce fait, l'exponentielle en base e est la fonction exponentielle de référence. On verra dans la suite comment toute fonction exponentielle peut s'exprimer à l'aide de puissances de e.

4.2 Les fonctions logarithmes

4.2.1 Définitions

Parmi les propriétés vérifiées par les fonctions exponentielles, on a noté la propriété suivante : quelque soit la base a que l'on se fixe, on a

$$a^x = a^y \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y.$$

Cela signifie que la fonction $[x \mapsto a^x]$ est une bijection. Autrement dit, pour tout nombre positif y, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = a^x$. C'est ce nombre x que l'on appelle le logarithme en base a de y, que l'on note $\log_a(y)$. Ainsi,

$$x = \log_a(y) \qquad \Leftrightarrow \qquad y = a^x.$$

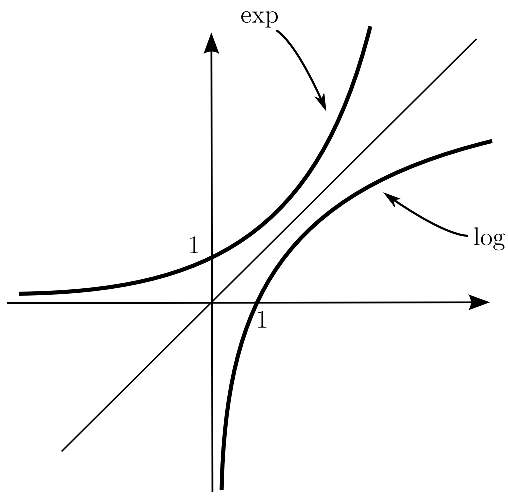
Ainsi, dire que $2^5 = 32$ revient à dire que $\log_2(32) = 5$. La quantité $\log_2(32)$ est donc la puissance à laquelle il faut élever 2 pour obtenir 32. De façon générale, la quantité $\log_a(y)$ représente la puissance à laquelle il faut élever a pour obtenir y. Ainsi, le logarithme en base 10 noté $\log_{10}$ donne l'ordre de grandeur de la quantité à laquelle il est appliqué.

Notons que quelque soit la base a que l'on choisit, on ne peut pas prendre le logarithme d'un nombre négatif ou nul. Autrement dit, le domaine de n'importe quelle fonction log est $\mathbb{R}_*^+$. D'autre part, étant donné les liens étroits qu'il existe entre les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmes, les propriétés des fonctions exponentielles donnent des propriétés équivalentes pour les logarithmes. Ainsi,

1. Quelque soit la base a, on a $\log_a(1) = 0$.
2. Si $a > 0$, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
$$\log_a(x.y) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
3. Pour tout nombre y, on a
$$\log_a(x^y) = y.\log_a(x).$$
4. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a
$$\log_a(x) = \log_a(y) \quad \Longleftrightarrow \quad x = y$$

4.2.2 Représentation graphique

Comme pour toutes fonctions qui sont réciproques l'une de l'autre, il existe un lien fort entre la courbe d'une exponentielle et la courbe du logarithme correspondant. Précisément, la courbe du logarithme en base a est obtenu à partir de la courbe de l'exponentielle en base a en effectuant une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$:



On retrouve le fait qu'une fonction log est définie sur $\mathbb{R}_*^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4.2.3 Le logarithme népérien

Parmi toutes les fonctions logarithmes, il en existe une qui correspond à l'exponentielle en base e : le logarithme népérien ln. Il est évidement définit sur $\mathbb{R}_*^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Il est défini par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \ln(e^x) = x.$$

Le logarithme népérien est le logarithme de référence dans le sens où tous les logarithmes peuvent s'écrire à partir de celui-ci. En effet, dire que $a^x = y$ revient à dire que $\log_a(y) = x$. D'autre part, si l'on applique la fonction ln à l'égalité $a^x = y$, on trouve :

$$\begin{aligned} \ln(a^x) = \ln(y) &\Leftrightarrow x.\ln(a) = \ln(y) \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}. \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout $y > 0$, on a

$$\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}.$$

4.2.4 Changement de base d'exponentielle

On vient de voir comment on pouvait exprimer n'importe quel logarithme à l'aide du logarithme népérien. On peut faire de même pour les fonctions exponentielles. Précisément, pour toute base a, on a

$$y = a^x \qquad \Leftrightarrow \qquad \ln(y) = x.\ln(a).$$

En appliquant la fonction exp (de base e) à cette égalité, on obtient

$$e^{\ln(y)} = e^{x.\ln(a)} \qquad \Leftrightarrow \qquad y = e^{x.\ln(a)}.$$

Autrement dit, pour toute base a et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$a^x = e^{x.\ln(a)}.$$

Autrement dit, n'importe quelle fonction exponentielle peut s'écrire en fonction de e.

4.3 Dérivée des fonctions exponentielles et logarithmes

Comme on l'a vu plus haut, la fonction exponentielle de référence, notée exp est la seule fonction à être égale à sa dérivée. Ainsi,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x).$$

On peut alors calculer la dérivée de n'importe quelle fonction exponentielle. En effet, soit $a > 0$. D'après ce que l'on a vu plus haut, on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad a^x = e^{x.\ln(a)} = \exp(x.\ln(a)).$$

En appliquant la formule de dérivation des fonctions composées, on obtient donc

$$\exp_a'(x) = \ln(a).\exp'(x) = \ln(a).\exp(x) = \ln(a).e^x.$$

D'autre part, à l'aide des formules, on peut également obtenir la dérivée d'une fonction réciproque. Cela nous donne la dérivée de la fonction ln :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

et de toutes les fonctions logarithmes :

$$\forall\, a > 0, \quad \log_a'(x) = \frac{1}{x.\ln(a)}.$$