Cours de Mathématiques

ISA BTP, 1° année

27 juin 2017

Table des matières

Chapitre 1

Logique et ensembles

Introduction

Les mathématiques ont pour but d'étudier les différentes propriétés de nombreux objets théoriques qui représentent les éléments, les principes et les idée permettant de modéliser le monde réel. Ces objets sont dans un premier temps décrits à l'aide de définitions précises qui servent de base à un raisonnement logique. Ce raisonnement logique permet alors de valider des propositions (affirmations pouvant être vraies ou fausses) vérifiées par ces objets. Les propositions les plus importants sont appelées *théorèmes*.

Pour étudier ces outils, les mathématiciens disposent d'un langage précis, permettant de définir des objets et des concepts très pointus et d'un ensemble de règles basées sur la logique élémentaire.

L'objectif de ce premier chapitre est d'effectuer un rapide survol des outils élémentaires des sciences mathématiques.

1.1 Notations

Le langage mathématique est avant tout basé sur un ensemble de symboles et notations précises, qui permettent de nommer les différents objets et de représenter leurs interactions.

Ces notations utilisent les caractères de l'alphabet latin, majuscules et minuscules, ainsi que, souvent, ceux de l'alphabet grec :

Minuscule	Majuscules	Nom	Minuscule	Majuscule	Nom
α	A	alpha	ν	N	nu
β	B	bêta	ξ	Ξ	xi
γ	Γ	gamma	o	O	omicron
δ	Δ	delta	π	Π	pi
ϵ	E	epsilon	ρ	P	rhô
ζ	Z	zêta	σ	Σ	sigma
η	H	êta	τ	T	tau
θ	Θ	thêta	υ	Υ	upsilon
ι	I	iota	φ	Φ	phi
κ	K	kappa	ψ	Ψ	psi
λ	Λ	lambda	χ	X	khi
μ	M	mu	ω	Ω	omega

D'autre part, outre les symboles de base ($+$, $\times$, $=$, etc), d'autres symboles et abréviations sont utilisés pour permettre plus de concision dans les énoncés ainsi que certains symboles particuliers pour représenter les ensembles de nombres :

Symbole	Signification
$\forall$	quelque soit
$\exists$	il existe
$\in$	appartient
$/$	tel que
$\Rightarrow$	implique
$\Leftrightarrow$ (ou ssi)	si et seulement si
Σ	somme
$\prod$	produit
i.e.	c'est à dire (*id est*)
cqfd ou $\square$	ce qu'il fallait démontrer
$\mathbb{N}$	les entiers naturels ($\geqslant 0$)
$\mathbb{N}^*$	les entiers naturel non nuls
$\mathbb{Z}$	les entiers relatifs
$\mathbb{Q}$	les rationnels (fractions d'entiers)
$\mathbb{R}$	les réels
$\mathbb{R}^*$	les réels non nuls
$\mathbb{C}$	les complexes

Enfin, pour symboliser un nombre important voire indéterminé d'objets, on les distingue à l'aide d'indices : $x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n$ et pour les éléments d'un tableau, on a recours aux doubles indices x_{ij}, le premier donnant le numéro de la ligne, le second celui de la colonne.

Par ailleurs, on appelle proposition toute affirmation possédant une valeur de vérité (vrai ou faux) : “la terre est ronde”, “les vaches volent”, “ce triangle est isocèle”. Si une proposition $\mathcal{P}$ dépend d'un élément x, on la notera $\mathcal{P}(x)$.

Ainsi, s'il existe un élément x pour lequel cette propriété est vraie, on note

$$\exists x \ / \ \mathcal{P}(x)$$

D'autre part, si cette propriété est vraie pour toutes les valeurs de x d'un ensemble E, on note

$$\forall x \in E, \quad \mathcal{P}(x)$$

1.2 Méthodes de raisonnement

Formellement, démontrer une propriété à partir d'une définition, c'est considérer une propriété $\mathcal{P}$ (l'hypothèses) et vérifier par des raisonnement logiques qu'alors la propriété $\mathcal{Q}$ (la proposition) est vraie. On note

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$$

Il existe différentes méthodes de démonstration permettant d'établir une telle implication.

1.2.1 La démonstration directe

Le raisonnement direct est le plus naturel (mais pas toujours le plus efficace). Il consiste à établir la propriété $\mathcal{Q}$ directement à partir de $\mathcal{P}$.

Exemple : soit $(ABCD)$ un quadrilatère. J'affirme que si $(ABCD)$ possède trois angles droits, alors c'est un rectangle. Il me faut donc démontrer la propriété

$$\mathcal{Q} \ = \text{“ce quadrilatère est un rectangle.”}$$

à partir de l'hypothèse

$$\mathcal{P} \ = \text{“un quadrilatère possède 3 angles droits.”}$$

Or on sait que la somme des angles d'un quadrilatère est égale à 360°. Ainsi, en notant α, β et γ les trois angles droits de $(ABCD)$ et δ le quatrième, on a

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360 \ \Rightarrow \ \delta = 360 - \alpha - \beta - \gamma = 360 - 3 \times 90 = 90^\circ.$$

Notre quadrilatère a donc 4 angles droits, et c'est un rectangle.

1.2.2 Raisonnement par l'absurde

Pour raisonner par l'absurde, on commence par supposer le contraire de ce que l'on veut démontrer. On utilise ensuite un raisonnement logique avec pour objectif d'arriver à une contradiction. Précisément, on suppose que $\mathcal{P}$ et vrai, et que $\mathcal{Q}$ est faux. Si à l'aide de ces hypothèses (et toujours les raisonnements logiques) on obtient une contradiction, c'est que $\mathcal{Q}$ ne peut être faux quand $\mathcal{P}$ est vrai.

Exemple : pour démontrer le résultat précédent, on peut supposer que la proposition

$$B \,:\, (ABCD) \text{ est un rectangle}$$

est fausse. Ainsi, son quatrième angle δ ne vaut pas 90°. Alors

$$\exists \varepsilon \neq 0 \;/\; \delta = 90 + \varepsilon$$

Or, puisque la somme des angles d'un quadrilatère vaut 360°, on a

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360 \Leftrightarrow 3 \times 90 + 90 + \varepsilon = 360 \Leftrightarrow \varepsilon = 4 \times 90 - 360 = 0$$

ce qui contredit notre proposition précédente. Cette proposition est donc fausse : $\delta = 90°$ et $(ABCD)$ est un rectangle.

1.2.3 Raisonnement par contraposition

Pour démontrer que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ par contraposition, on montre que non $\mathcal{Q} \Rightarrow$ non $\mathcal{P}$.

Exemple : soit

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+1} \end{array}$$

Montrons que deux réels ne peuvent être la racine carrée d'un même nombre. En langage mathématique, cela se dit

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; \sqrt{x_1+1} \neq \sqrt{x_2+1}.$$

Or il est plus facile de travailler avec des égalités qu'avec des inégalités. Ainsi, on va plutôt démontrer la contraposée de l'implication précédente :

$$\sqrt{x_1+1} = \sqrt{x_2+1} \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 :$$

si $\sqrt{x_1+1} = \sqrt{x_2+1}$, en élevant au carré, on obtient $x_1 + 1 = x_2 + 1$ et en ôtant 1 de chaque côté, on obtient $x_1 = x_2$.

Remarque : on prendra bien soin de ne pas confondre contraposition et réciproque. La réciproque de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ dont la valeur de vérité n'a aucun lien avec la valeur de vérité de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

1.2.4 Raisonnement par récurrence

La démonstration par récurrence permet de démontrer une propriété $\mathcal{P}(n)$ pour tout nombre entier $n \in \mathbb{N}$. Elle se déroule en deux étapes :

1. *Initialisation.* On montre que pour un entier fixé (souvent 0 ou 1), la propriété est vraie.
2. *Hérédité.* On suppose que pour un entier n donné, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et l'on montre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie également.

Si l'on parvient à réaliser ces deux étapes, on peut conclure que pour tout entier à partir de l'entier initial, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple : montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Notons donc $\mathcal{P}(n) =$ “ $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ”.

1. *Initialisation.* $\mathcal{P}(1)$ se vérifie assez vite, puisque $\dfrac{1(1+1)}{2} = 1$.
2. *Hérédité.* Supposons qu'il existe un entier n tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et calculons $1 + 2 + \ldots + n + (n+1)$: comme $\mathcal{P}(n)$ est vraie, on a

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

   On retrouve l'expression de la propriété, au rang $(n+1)$ et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
3. *Conclusion.* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

1.3 Théorie élémentaire des ensembles

1.3.1 Notion d'ensemble, d'élément

Un *ensemble* est une collection d'objets ayant une propriété en commun. Pour symboliser un ensemble, on utilise les accolades ({...}). Dans un ensemble, l'ordre n'importe pas. (Ainsi, les ensembles $\{1, 2, 3\}$ et $\{1, 3, 2\}$ sont égaux.)

Exemples.

- L'ensemble des triangles isocèles.
- L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
- L'ensemble des nombres positifs réels $\{x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}$.
- L'ensemble $\{1, 2\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Les objet d'un ensemble sont appelés ses *éléments*. Pour indiquer qu'un objet donné est ou n'est pas un élément d'un ensemble donné, on utilise le symbole $\in$. Ainsi, si x est un élément de l'ensemble E, on note $x \in E$. Sinon, on note $x \notin E$.

Exemples.
- $5 \in \mathbb{N}$.
- $-2 \notin \mathbb{N}$ mais $-2 \in \mathbb{Z}$.
- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$, mais $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$.

Si E est un ensemble fini, on appelle *cardinal de* E le nombre d'éléments qu'il contient. On le note $\mathrm{Card}(E)$ ou $|E|$. On verra dans le chapitre suivant comment on peut définir le cardinal d'un ensemble infini...

Exemples.
- L'ensemble vide, que l'on note $\emptyset$ est de cardinal 0.
- Un ensemble de cardinal 1 est appelé *singleton*. (Attention à ne pas confondre le singleton $\{a\}$ et l'élément a).
- Un ensemble à deux éléments est un doublon, ou une paire. (Attention à ne pas confondre la paire $\{a, b\}$ avec le couple (a, b)).

1.3.2 Les différentes façons de définir un ensemble

La forme étendue

La façon la plus simple de définir un ensemble est de donner explicitement tous les éléments de cet ensemble entre accolades. C'est le plus pratique, quand l'ensemble en question ne contient pas trop d'éléments (en particulier, lorsque l'ensemble contient un nombre fini d'éléments...). C'est ce que l'on appelle la représentation étendue.

Exemples
- $E = \{2, 3, 5, 7, 9\}$.
- $E = \{a, b, c, d\}$.

La forme implicite

La forme explicite rend difficile la représentation des ensembles infinis. On peut par exemple représenter l'ensemble des entiers naturels sous la forme $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, mais l'utilisation des "..." est imprécise. D'autre part, il est des ensembles (comme $\mathbb{R}$ ou les intervalles de $\mathbb{R}$) que l'on ne peut même pas donner à l'aide des "...". Pour de tels ensembles, on utilise alors la propriété commune à tous les éléments de cet ensemble. Ainsi, l'ensemble des éléments qui vérifient une propriété $\mathcal{P}$ donnée est

$$E = \{x \,/\, \mathcal{P}(x)\}.$$

Exemples

- L'ensemble $E_1 = \{$les entiers naturels qui sont plus petits que 11$\}$.
- L'ensemble $E_2 = \{$les entiers naturels qui sont des nombres premiers$\}$.

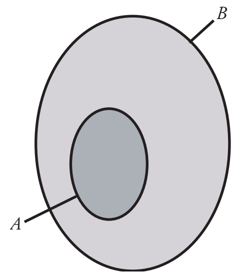
1.3.3 Inclusion

Définitions

Considérons deux ensembles A et B. On dit que A est inclus dans B si tous les éléments de A appartiennent également à B. On le note $A \subset B$. Ainsi,

$$(A \subset B) \iff (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Si A est inclus dans B, on dit que A est *un sous ensemble* ou *une partie* de B.



Remarques :

- N'importe quel ensemble contient l'ensemble vide et se contient lui même : Ainsi,

$$\forall A, \quad \emptyset \subset A \text{ et } A \subset A.$$

- Deux ensembles A et B sont égaux s'ils chacun est inclus dans l'autre. Ainsi,

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A).$$

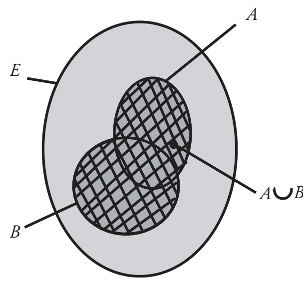
Pour démontrer que deux ensembles sont égaux, on résonne donc en deux étapes : on montre que le premier ensemble est inclus dans le second, puis que le second est inclus dans le premier.

1.3.4 Opération sur les ensembles

Soit E un ensemble et soient A et B deux sous-ensembles de E. On peut effectuer des opérations sur les ensembles A et B pour construire d'autres parties de E :

• L'*union* (ou *reunion*) des ensembles A et B est l'ensemble de tous les éléments appartenant à A **ou** à B. On le note $A \cup B$. Ainsi,

$$A \cup B = \{x \ / \ x \in A \textbf{ ou } x \in B\}.$$

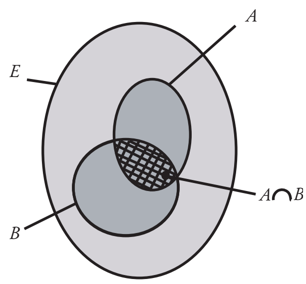


Remarques :

- La réunion de deux ensemble contient chacun de ces deux ensembles.

• L'*intersection* des ensembles A et B est l'ensemble de tous les éléments appartenant à la fois à A **et** à B. On le note $A \cap B$. Ainsi,

$$A \cap B = \{x \ / \ x \in A \textbf{ et } x \in B\}.$$

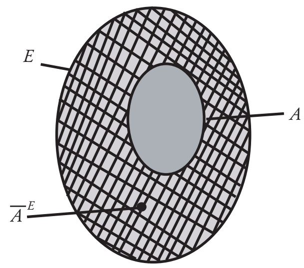


Remarques :

- L'intersection de deux ensembles est toujours contenue dans chacun des ensembles.
- Deux ensembles A et B tels que $A \cap B = \emptyset$ sont dits *disjoints*.

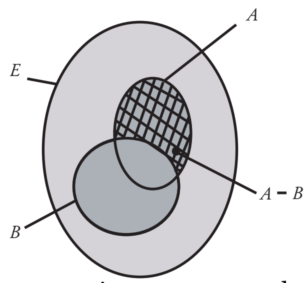
• Le *complémentaire* de A est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à l'ensemble A. On le note $\overline{A}$ ou A^c. Ainsi,

$$\overline{A} = \{x \ / \ x \notin A\}$$



• La *différence* de A et B est l'ensemble des élément de A qui ne sont pas dans B. On le note $A \backslash B$ ou $A - B$. Ainsi,

$$A \backslash B = \{x \ / \ x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$



Note : il existe des règles de calcul permettant de manipuler ces notions comme des opérations. Ainsi, on peut démontrer que l'inclusion ($\cap$) est distributive sur l'union ($\cup$) :

$$\forall A, B, C \subset E, \qquad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

On peut également déterminer un ensemble minimal de symbole à partir desquels on peut exprimer tous les autres. Ainsi

$$\forall A, B \subset E, \quad A \backslash B = A \cap \overline{B}$$

1.3.5 Les parties d'un ensemble

Étant donné un ensemble E, on peut considérer l'ensemble de ses parties. On le note $\mathscr{P}(E)$. Il contient (comme son nom l'inique) tous les sous ensembles de E.

$$\mathscr{P}(E) = \{X \,/\, X \subset E\}.$$

Remarque : les éléments de $\mathscr{P}(E)$ sont des ensembles !

Les opérations que l'on vient de voir sont donc des opérations dans $\mathscr{P}(E)$. Elle permettent de construire un élément de $\mathscr{P}(E)$ à partir d'autres éléments de $\mathscr{P}(E)$.

De plus que l'ensemble des parties d'un ensemble E contient toujours au moins deux éléments : l'ensemble vide et l'ensemble E lui-même.

1.3.6 Cardinal d'un ensemble fini

Formule du crible

Soient A et B deux parties de E. Il est claire que si A et B sont deux ensembles finis inclus l'un dans l'autre, alors $\mathrm{Card}(A) \leqslant \mathrm{Card}(B)$. Ainsi on a $\mathrm{Card}(A \cup B) \geqslant \mathrm{Card}(A)$ et $\mathrm{Card}(B)$. D'autre part, si A et B sont disjoints, alors

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

La *formule du crible* donne le cas général :

Formule du crible

Soient A et B deux parties de E.

$$\mathrm{Card}(A \cup B) \;=\; \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Cardinal de $\mathscr{P}(E)$

Soit E un ensemble fini de cardinal n. L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ est encore un ensemble fini. Pour calculer le cardinal de $\mathscr{P}(E)$, il compter le nombre d'ensembles différents que l'on peut construire à l'aide de n éléments. Or pour construire un sous ensemble de E, on considère un à un les éléments de E, et pour chacun, on a 2 possibilités :

- soit on le prend,
- soit on ne le prend pas.

Cela nous donne donc 2^n possibilités. Ainsi,

$$\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E)) \;=\; 2^{\mathrm{Card}(E)}.$$

1.3.7 Produit cartésien d'ensembles

À partir de deux ensembles E et F donnés, on peut construire l'ensemble produit $E \times F$ qui est l'ensemble des couples (e, f) tels que e est un élément de E et f est un élément de F.

Par exemple, si $E = \{1, 2, 3\}$ et $F = \{a, b\}$, l'ensemble produit $E \times F$ est l'ensemble

$$E \times F \;=\; \{(1, a),\ (1, b),\ (2, a),\ (2, b),\ (3, a),\ (3, b)\}.$$

Attention : un couple (e, f) n'est pas un ensemble. En particulier, l'ordre est fondamental. Ainsi, $(e, f) \neq (f, e)$. On dit alors que le produit cartésien n'est pas commutatif (car les ensembles $E \times F$ et $F \times E$ ne sont pas les mêmes).

Si les deux ensembles E et F sont donnés sous forme étendue ($E = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ et $F = \{b_1, \ldots, b_m\}$), le produit cartésien $E \times F$ peut être représenté par le diagramme cartésien ci-contre. (Les éléments de l'ensemble $E \times F$ sont les cases du tableau.)

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
\multicolumn{2}{c}{} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_m}}^{F}} \\
\cline{2-6}
 & \times & b_1 & b_2 & \cdots & b_m \\ \cline{2-6}
 & a_1 & & & \cdots & \\ \cline{2-6}
E & a_2 & & & \cdots & \\ \cline{2-6}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cline{2-6}
 & a_n & & & \cdots & \\ \cline{2-6}
\end{array}
$$

D'après le tableau ci-dessus, on voit que si E et F sont deux ensembles finis, alors

$$\mathrm{Card}(E \times F) \;=\; \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F).$$

On peut généraliser ce que l'on vient de voir à plus de deux ensembles. Ainsi, si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont n ensembles, on peut construire le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ dont les éléments sont tous les n-uplets $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ tels que $e_1 \in E_1$, $e_2 \in E_2$,. . ., $e_n \in E_n$.

$$E_1 \times \ldots \times E_n \;=\; \{(e_1, \ldots, e_n) \,/\, e_i \in E_i \text{ pour } i = 1..n\}.$$

Si tous les ensembles E_i sont un même ensemble E, on note E^n pour le produit $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n\ fois}$

Cas particuliers : les ensembles $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$

D'après ce que l'on vient de voir, on peut définir l'ensemble $\mathbb{R}^2$ des couples de réels :

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Si l'on munit le plan d'un repère, on peut alors représenter tout élément (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par le point de coordonnées x et y dans ce repère. Cela nous donne une représentation graphique de $\mathbb{R}^2$ (et de tous ses sous ensembles.

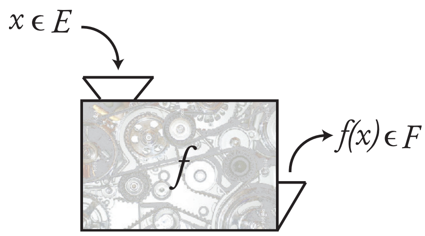
De même, l'ensemble $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}$ peut être représenté par l'espace 3D, muni d'un repère.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut définir l'ensemble $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R}\}$. Cet ensemble joue un rôle très particulier en mathématiques (car c'est un espace vectoriel). On sera amené à le retrouver dans la suite.

1.4 Applications

1.4.1 Définitions

Si E et F sont deux ensembles, une application (ou fonction) f de E dans F est une opération qui permet d'associer certains éléments de F à des éléments de E, telle que pour tout x de E il existe un unique élément $y \in F$ qui lui soit associé. On peut également voir une fonction comme une machine transformant les éléments de E en éléments de F.



Ensembles remarquables

Quelque soit la représentation que l'on choisit, une fonction f met en relation deux ensembles. Elle met en relation ses éléments, ses sous-ensembles, etc...

Ainsi, soit f une application de E dans F.

1. L'ensemble E est *l'ensemble source*, ou l'ensemble de départ. L'ensemble F est *l'ensemble but*, ou l'ensemble d'arrivée.
2. Si un élément x de E est transformé en un élément y de F, on dit que y est *l'image* de x par f, et l'on note $y = f(x)$.
3. Si pour un élément $y \in F$ il existe un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on dit que x est *un antécédent* de y. (Un élément $y \in F$ peut avoir plusieurs antécédents dans E).
4. L'ensemble des éléments de F qui peuvent s'écrire comme l'image d'un élément de E est *l'image de* f, notée $\mathrm{Im}(f)$. Ainsi,
$$\mathrm{Im}(f) \ = \ \{y \in F \,/\, \exists\, x \in E \text{ tq } y = f(x)\}.$$
De façon générale, si A est une partie de E, le sous ensemble de F contenant les images des éléments de A est appelé l'image de A par f. On le note $f(A)$:
$$f(A) = \{y \in F \,/\, \exists\, x \in E \ \text{ tq } \ y = f(x)\}.$$

Exercice : Soient $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $F = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. On considère la fonction f définie par
$$\begin{array}{rccc} f & : & E & \longrightarrow & F \\ & & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

1. Déterminer l'image de chaque élément de E (et vérifier que c'est bien un élément de F).
2. Déterminer l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f dans F.
3. Pour chaque élément de $\mathrm{Im}(F)$, donner ses antécédents.
4. Donner l'image du sous ensemble $A = \{-2, 0\}$.

Représentation d'une fonction

Dans certains cas, on peut représenter une fonction f à l'aide d'un dessin, d'un schéma.

Diagramme de Venn. Si les ensembles E et F sont des ensembles finis, on peut représenter une fonction $f : E \to F$ à l'aide d'un diagramme sagittal. Ainsi, si $E = \{a, b, c, d, e, , g, h\}$ et $F = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu\}$, la fonction f définie par

$$f(a) = \alpha, \quad f(c) = \delta, \quad f(d) = \beta, \quad f(e) = \mu, \quad f(g) = \delta, \quad f(h) = \gamma.$$

peut être représentée par le diagramme suivant.

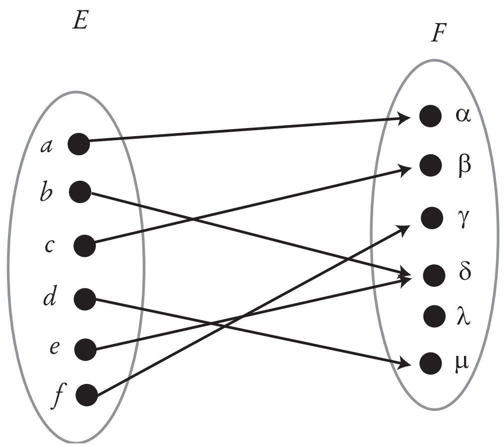


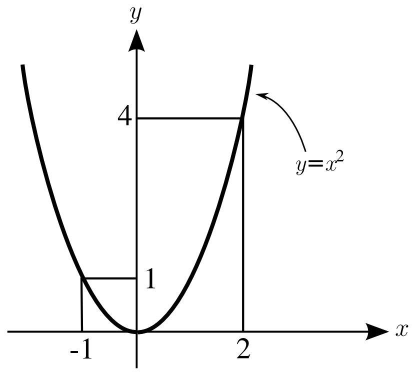
Diagramme cartésien. De même, si E et F sont des ensembles finis, on peut représenter toute fonction de E dans F à l'aide d'un tableau à double entrée. Par exemple, la fonction précédente est peut être représentée par le tableau suivant :

$E \backslash F$	α	β	γ	δ	λ	μ
a	$\times$					
b				$\times$		
c		$\times$				
d						$\times$
e				$\times$		
f			$\times$			

Représentation graphique. Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on peut la représenter dans un plan muni d'un repère. La fonction f est alors représentée par les points de coordonnées $(x, f(x))$. Par exemple, la fonction f définie par

$$\begin{array}{rccl} f : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

peut être représentée par



1.4.2 Quelques fonctions particulières

Voici une liste de fonctions, ou de types de fonctions que l'on pourra rencontrer régulièrement.

Les fonctions constantes. Une fonction constante est une fonctions qui à tous les éléments de l'ensemble de départ associe un même élément de l'ensemble d'arrivée.

La fonction Identité. La fonction Identité d'un ensemble E (que l'on note Id_E est la fonction d'un ensemble E dans lui même qui à tout élément $x \in E$ associe x lui-même. (C'est une fonction "qui ne fait rien").

$$\forall\, x \in E, \qquad \mathrm{Id}_E(x) = x.$$

Les fonctions caractéristiques. Soit E un ensemble et A un sous ensemble de E. La fonction caractéristique de A, que l'on note χ_A est la fonction qui va de E dans $\{0,1\}$ et qui, à chaque élément $x \in E$ associe

- 1 si x est dans A,
- 0 si x n'est pas dans A.

Ainsi,

$$\begin{array}{rccl} \chi_A\ : & E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases} \end{array}$$

Exercice : exprimer les fonctions caractéristiques $\chi_{A\cup B}$, $\chi_{A\cap B}$, $\chi_{\overline{A}}$ à l'aide de χ_A et χ_B.

La projection canonique. Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles. La projection canonique sur l'ensemble E_i est la fonctions qui va du produit cartésien $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans l'ensemble E_i et qui à tout n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ associe sa i-ème coordonnée.

$$\begin{array}{rccl} P_i\ : & E_1 \times \ldots \times E_i \times \ldots \times E_n & \longrightarrow & E_i \\ & (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Les suites. Si E est un ensemble, une suite d'éléments de E est une numérotation d'une partie (finie ou non) des éléments de E. On peut le voir comme une fonction u de $\mathbb{N}$ dans E :

$$\begin{array}{rccc} u & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & E \\ & & i & \longmapsto & u(i). \end{array}$$

En règle générale, on écrira u_i plutôt que $u(i)$.

Si u est une suite finie (à n éléments), on a $\mathrm{D}_u = \{0, 1, \ldots, n\}$. On pourra alors donner u sous forme étendue, en mettant entre parenthèses les termes successifs de la suite, séparés par une virgule. (C'est la norme pour la plupart des logiciels de programmation). Dans le cas particulier où $E = \{0, 1\}$, on pourra omettre les parenthèses et les virgules (on obtient ainsi les mot en binaire...).

On peut définir une suite de deux façons différentes :

- en donnant l'expression de chaque élément en fonction de sa place (donc de n). Par exemple
$$u_n = \frac{n(n-1)}{2},$$
- en définissant un terme à l'aide des précédents. Dans ce cas, il faut donner suffisamment de termes de départ. Par exemple
$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1}. \end{cases}$$

1.4.3 Fonctions composées

Définition. Soient E, F et G trois ensembles. Si l'on a une fonction $f : E \to F$ et une fonction $g : F \to G$ telle que $\mathrm{Im}(f)$ soit une partie de D_g, on peut construire la *fonction composée* $g \circ f : E \to G$:

$$\begin{array}{rccc} g \circ f & : & E & \longrightarrow & G \\ & & x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

On peut résumer cela par le digramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "gof"] & F \arrow[r, "g"] & G \\ x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, mapsto, bend right] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

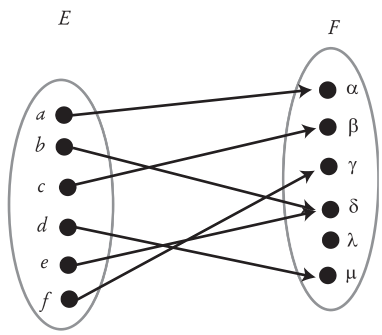
Composée itérée. Si f est une fonction de $E \to E$ telle que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{D}_f$, on peut composer plusieurs fois f avec elle même. (Cela revient à appliquer plusieurs fois la fonction f à un même élément). On note

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

1.4.4 Injections, surjections, bijections

Si l'on regarde le diagramme sagittal ci-contre, on peut faire plusieurs remarques sur la fonction f :

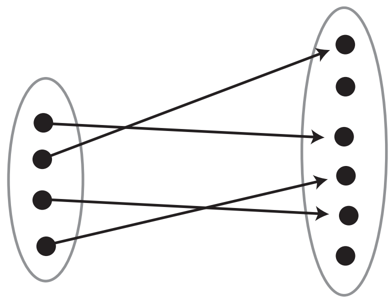
- Il y a des éléments de E qui n'ont pas d'image par dans F.
- Il y a des éléments de F qui ne sont pas atteints.
- Il y a deux flèches différentes qui arrive sur le même élément de F .



Ces remarque illustrent différents types de fonctions, selon qu'elles vérifient ou non ces propriétés. En l'occurrence, celle ci n'est ni totale, ni injective, ni surjective, ni bijective.

Fonction injective. Une fonction $f : E \to F$ est dite injective si tous les éléments de E sont envoyés sur des éléments différents de F. La non-injectivité de la fonction donnée par le diagramme ci-dessus est montrée par les deux flèches qui arrivent sur l'élément δ.

On peut traduire cette propriété en logique formelle et l'illustrer par le diagramme ci-dessous



Propriété

Une fonction $f : E \to F$ est injective si

$$\forall\, x, y \in E \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

ou sa contraposée

Propriété

Une fonction $f : E \to F$ est injective si

$$\forall\, x, y \in E \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Exemples :
- La fonction La fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

  est injective. En effet, soient $x_1, x_2 \geqslant 0$ tels que

$$\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}.$$

  Alors,

$$(\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{x_2})^2$$

  et finalement,

$$x_1 = x_2.$$

- La fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

  n'est pas injective car certains réels ont la même image (par exemple -1 et 1).
  Remarque : en réduisant l'ensemble de départ, il est possible de transformer une fonction en une fonction injective. En effet, la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

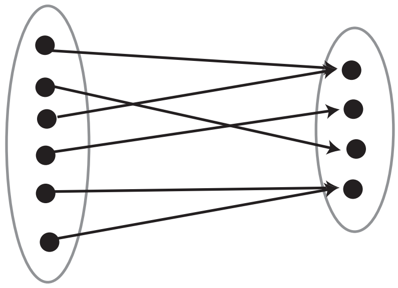
  est bien une fonction injective.

Fonction surjective. Une fonction $f : E \to F$ est surjective si tous les éléments de l'espace d'arrivée sont atteints. La fonction ci-dessus n'est pas surjective car λ n'est atteinte par aucune flèche.

En logique formelle, cela se traduit par la propriété suivante :

Propriété
Une fonction $f : E \to F$ est <u>surjective</u> si $$\forall\, y \in F,\ \exists\, x \in E \,/\, y = f(x).$$

et l'illustrer par le diagramme ci-dessous



Exemples :

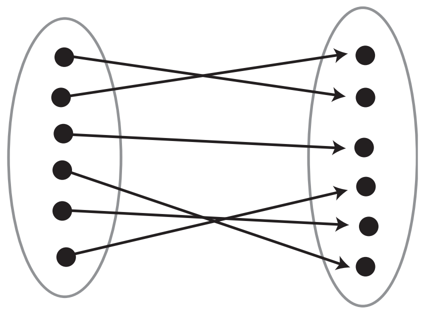
- La fonction
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$
est surjective. En effet, tout nombre $y \in [-1,1]$ est le sinus d'un angle.
- La fonction
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$
n'est pas surjective, car certains nombres de l'espace de d'arrivée ne sont pas atteints (touqs les nombres négatifs). Cependant, il est possible de "rendre" cette application surjective, en modifiant son ensemble d'arrivée. Ainsi, la fonction
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$
est surjective.

Fonction bijective. Une fonction $f : E \to F$ est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

En logique formelle, cela se traduit par la propriété suivante :

Propriété
Une fonction $f\,:\,E\to F$ est <u>bijective</u> si $$\forall\, y\in F,\ \exists\,!\,x\in E\,/\,y=f(x).$$

et l'illustrer par le diagramme ci-dessous



Si f est une fonction bijective de $E\to F$, chaque élément de F admet un et un seul antécédent. On peut donc construire une application de $F\to E$ qui à chaque élément de F associe son antécédent par f. C'est ce que l'on appelle la *fonction réciproque* de f que l'on note f^{-1}. Si l'on compose f et f^{-1} (vérifier rapidement que cela a un sens), alors on obtient la fonction identité. Précisément,

$$f\circ f^{-1}\;=\;\mathrm{Id}_F \qquad \text{et} \qquad f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}_E.$$

Exemples :

- La fonction
$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+\\ x & \longmapsto & x^2\end{array}$$
est une bijection. Sa fonction réciproque est la fonction
$$\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+\\ x & \longmapsto & \sqrt{x}\end{array}$$
- La fonction $\exp\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R}_*^+$ est une bijection. Sa fonction réciproque est la fonction $\ln\,:\mathbb{R}_*^+\to\mathbb{R}$.

1.4.5 Applications et cardinaux

Si E et F sont des ensembles finis, le caractère injectif ou surjectif d'une application de E dans F nous renseigne sur les cardinaux de chacun de ces ensembles. Précisément, si l'on peut construire une fonction injective de $E\to F$, alors E contient moins d'éléments que F (puisque chaque élément de E doit avoir une image distincte). De même, si l'on peut construire une application surjective entre E et F, alors l'ensemble E contient plus d'éléments que F. Enfin, si l'on peut construire une bijection entre E et F, c'est que E et F sont de même cardinal.

Grâce à cela, on peut maintenant parler du cardinal d'un ensemble infini. En effet, si E et F sont deux ensembles infinis, on dira qu'ils sont de même cardinal si l'on peut construire une application bijective entre E et F. Ainsi, les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont de même cardinal.
(Considérer l'application

$$\begin{array}{ccr} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ 0 & \longmapsto & 0 \\ 1 & \longmapsto & 1 \\ 2 & \longmapsto & -1 \\ 3 & \longmapsto & 2 \\ 4 & \longmapsto & -2 \\ \vdots & & \vdots \end{array})$$

Il a par ailleurs été démontré que l'on ne peut pas construire de bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. C'est deux ensembles sont donc de cardinal différents, et il existe donc différentes tailles d'infinis. On les notes $\aleph_0$, $\aleph_1, \ldots$

Chapitre 2

Calcul élémentaire

Introduction

Les mathématiques sont l'outil principal de toutes les sciences exactes. L'un des objectifs des mathématique est de fournir aux différentes sciences des outils d'études et de résolution pour les équations issues de la modélisation. Il existe de nombreux types d'équations, portant sur tous types d'objets mathématiques. Les équations les plus courants sont *les équations algébriques*, liant des variables réelles ou complexes.

La résolution des équations algébriques compte parmi les plus anciens problèmes sur lesquels se sont penchés les mathématiciens. Cette recherche a produit des méthodes de résolution basées sur les propriétés élémentaires et les manipulations qu'elles autorisent des opérations spécifiques aux nombres réels et complexes : l'addition et la multiplication.

2.1 Propriétés des opérations

2.1.1 Propriétés élémentaires

L'addition ("$+$") et la multiplication ("$\times$" ou "$.$") ont trois propriétés élémentaires :

- *La commutativité* :

$$\forall x, y \in \mathbb{C}, \qquad x + y = y + x, \qquad x \times y = y \times x$$

- *L'associativité* (qui permet de donner un sens à l'addition et la multiplication de trois nombres ou plus) :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{C}, \qquad (x + y) + z = x + (y + z), \qquad (x \times y) \times z = x \times (y \times z)$$

- *La distributivité de la multiplication sur l'addition* :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{C}, \qquad (x + y) \times z = x \times z + y \times z$$

Elles possèdent également quelques propriétés plus élaborées :

- *Les éléments neutres* : pour les deux opérations sur $\mathbb{C}$, on appelle élément neutre les nombres “qui ne font rien”. Ainsi,

  — L'élément neutre de l'addition est le nombre 0 :
$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad x + 0 = x$$
  — L'élément neutre de la multiplication est le nombre 1 :
$$\forall x \in \mathbb{C}, \qquad 1.x = x$$

- *La notion d'inverse* : pour chaque opération, on appelle inverse d'un nombre x tout nombre qui, combiné à x ramène à l'élément neutre. Ainsi,

  — Pour tout $x \in \mathbb{C}$, il existe un nombre x' tel que $x + x' = 0$. Ce nombre est alors noté $-x$ et est en général appelé *l'opposé*.
  — Pour tout $x \in \mathbb{C}$ **non nul**, il existe un nombre x'' tel que $x.x'' = 1$. Ce nombre est alors noté x^{-1} ou $\frac{1}{x}$.

Ce sont en particulier ces notions d'inverses qui permettent, dans une équation, d'isoler la variable inconnue et de l'exprimer ainsi en fonction des autres : dans la résolution de l'équation $a.x + b = 0$, les étapes sont

$$\begin{aligned} a.x + b = 0 \;&\Leftrightarrow\; a.x + \underbrace{b + (-b)}_{0} = 0 + (-b) \;\Leftrightarrow\; a.x + 0 = -b \;\Leftrightarrow\; a.x = -b \\ &\Leftrightarrow\; \frac{1}{a}.(a.x) = \frac{1}{a}.(-b) \;\Leftrightarrow\; \underbrace{\left(\frac{1}{a}.a\right)}_{1}.x = -\frac{b}{a} \;\Leftrightarrow\; 1.x = -\frac{b}{a} \\ &\Leftrightarrow\; \boxed{x = -\frac{b}{a}} \end{aligned}$$

Notons enfin que le nombre 0 est dit *absorbant* pour la multiplication. Cela traduit le fait que le produit de tout nombre par 0 donne 0.

On a en outre une propriété supplémentaire concernant le nombre 0 et la multiplication : dans l'ensemble des nombres (réels ou complexes), le produit de deux nombres non nuls ne peut être nul. Sa contraposées est alors un outil puissant pour la résolution de certaines équations : un produit de nombres (réels ou complexes) est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul.

2.1.2 Développer, factoriser

Selon les calculs que l'on a effectuer, il peut être utile de travailler sur des sommes ou sur des produits. Le passage d'une expression à l'autre est l'une des bases du calcul algébrique, exploitant la distributivité de la multiplication sur l'addition. Ainsi :

- Développer une expression algébrique consiste à transformer un produit en somme en distribuant l'un des facteurs sur l'autre, le second étant donné sous forme de somme :
$$a.(x+y) = a.x + a.y$$
- Factoriser une expression algébrique consiste à transformer une somme en produit. La factorisation passe le plus souvent par l'identification d'un facteur commun à tous les termes de la somme que l'on souhaite factoriser. On peut alors le mettre en facteur de la somme des termes dans lesquels on a supprimé le facteur commun :
$$a.x + a.y = a.(x+y)$$

2.1.3 Identités remarquables

Outre l'observation et la recherche de facteurs communs, la factorisation peut également se faire à l'aide d'identités remarquables (directement issues des règles de calcul ci dessus). Ainsi, pour tout $a, b \in \mathbb{C}$, on a

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

On verra plus loin que ces formules ne sont que quelques cas particulier d'une classe plus générale de formules.

2.2 Le signe Σ

2.2.1 Définitions

Le symbole Σ est utilisé pour symboliser des sommes constituées d'un grand nombre voire d'un nombre indéterminé de termes. Ainsi étant donnés n nombres complexes $a_1,\ a_2, \dots,\ a_n$, on note

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i$$

Dans cette somme, a_i est appelé *le terme général* et i est appelé *l'indice de sommation.*

Exemples :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $1 + 2 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} k$.
- Pour tout $x \in \mathbb{C}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{i=0}^{n} x^i$.

Notes :

- De façon générale, l'indice de sommation peut parcourir n'importe quel type d'ensemble I. On note alors
$$\sum_{i\in I} a_i$$
Dans la suite, il s'agira toujours de sous ensembles de $\mathbb{N}$, mais il pourra arriver que le premier indice ne soit pas 1...
- Par convention, on pose $\sum\limits_{i\in\emptyset} a_i = 0$.

2.2.2 Transformations d'écriture

Le signe Σ représentant une somme, il possède certaines propriétés directement issues des propriétés de l'addition. Ainsi

- l'addition étant commutative
$$\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \left(\sum_{i\in I} a_i\right) + \left(\sum_{i\in I} b_i\right)$$
- du fait de la distributivité de la multiplication sur l'addition,
$$\forall\lambda \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{i\in I}(\lambda.a_i) = \lambda.\left(\sum_{i\in I} a_i\right)$$

ATTENTION : en règle générale,
$$\sum_{i\in I}(a_i.b_i) \neq \left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{i\in I} b_i\right)$$

D'autre part, l'indice de sommation i est une variable dite *muette* car la somme ainsi symbolisée ne dépend pas de i :
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + \cdots + a_n$$
Outre le symbole utilisé pour l'indice de sommation, il est également possible d'effectuer des décalages d'indices :
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{\ell=2}^{n+1} a_{\ell-1} = a_1 + \cdots + a_n$$

Enfin, il peut être parfois utile de calculer des sommes par paquets (en séparant par exemple les indices pairs des indices impairs). Formellement, si I est la réunion disjointe de deux sous ensembles I_1 et I_2, on a
$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I_1} a_i + \sum_{i\in I_2} a_i$$

2.2.3 Sommes remarquables

Sommes des puissances de i

- Somme des premiers entiers :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_1 = \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Preuve : en doublant la somme S_1 et en la réorganisant, on a

$$\begin{array}{rcccccccccc} 2S_1 & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\ & + & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) \\ & = & n \times (n+1) & & & & & & & & \end{array}$$

D'où $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

- Somme des premiers carrés : on peut également montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

De façon générale, il est possible d'établir des formules analogues pour toutes les sommes $\sum_{i=1}^{n} i^k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Somme arithmétique

Les nombres $a_0, \ldots, a_n$ forment une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}, a_i = a_0 + i \times r$$

On peut alors montrer que

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} (a_0 + i.r) = (n+1)\frac{a_0 + a_n}{2}$$

Somme géométrique

Les nombres $a_0, \ldots, a_n$ forment une suite géométrique s'il existe un réel q tel que

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}, a_i = a_0 \times q^i$$

Si $q \neq 1$, on peut alors montrer que

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} (a_0.q^i) = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Note : que dire de cette somme si $q = 1$?

Sommes télescopiques

On appelle *somme télescopique* toute somme du type

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)$$

En développant cette somme et en simplifiant l'expression obtenue, on montre que

$$\sum_{i=1}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = a_n - a_1$$

2.3 Le signe $\prod$

2.3.1 Définitions

Si $a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres complexes, on note

$$a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

De façon générale, on note $\prod\limits_{i \in I} a_i$ le produit des tous les nombres a_i, l'indice i parcourant l'ensemble I des indices.

Notes : par convention, on pose

$$\prod_{i \in \emptyset} a_i = 1$$

2.3.2 Transformation d'écriture

Les propriétés de la multiplication induisent des transformations d'écriture spécifiques au signe $\prod$:

$$\prod_{i \in I} (a_i . b_i) = \left(\prod_{i \in I} a_i \right) . \left(\prod_{i \in I} b_i \right) \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I} (a_i^\alpha) = \left(\prod_{i \in I} a_i \right)^\alpha$$

Notes :

- À l'aide des formules précédentes, on peut en particulier montrer que

$$\prod_{i=1}^{n} (\lambda . a_i) = \lambda^n . \left(\prod_{i \in I} a_i \right)$$

- De façon générale,

$$\prod_{i \in I} (a_i + b_i) \neq \left(\prod_{i \in I} a_i \right) + \left(\prod_{i \in I} b_i \right)$$

2.3.3 Factoriel

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *factoriel* n (noté $n!$) le produit de tous les entiers jusqu'à n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n = \prod_{i=1}^{n} i$$

Note : avec la convention établie plus haut, on a $0! = 1$.

Il est alors possible d'exprimer à l'aide du factoriel le produit de plusieurs entiers consécutifs :

$$\forall m, n \in \mathbb{N}^*, \quad m \times (m+1) \times \cdots \times (m+n) = \prod_{i=0}^{n} (m+i) = \frac{(m+n)!}{(m-1)!}$$

2.4 Formule du binôme et factorisation de $a^n - b^n$

2.4.1 Coefficients binomiaux

Pour tout couple (n, p) d'entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on note

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

le coefficient binomiale associé aux entiers n et p.

Exemples :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

On peut étendre cette notation à l'ensemble des couples d'entiers $p \in \mathbb{Z}$ à l'aide des conventions suivantes : si $p < 0$ ou $p > n$, alors $\binom{n}{p} = 0$.

Intuitivement, ces coefficients binomiaux comptent le nombre de familles à p éléments que l'on peut former à partir de n éléments distincts.

Les coefficients binomiaux vérifient deux propriétés fondamentales :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$,

  $$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

  qui traduit algébriquement le fait que choisir p élément parmi n, c'est aussi choisir $n - p$ éléments que l'on ne choisit pas.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$, on a

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Cette dernière propriété permet un calcul itératif des coefficients binominaux à l'aide du *triangle de Pascal* :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	...
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	$\boxed{3}$ +	$\boxed{3}$	1		
			$\Vert$			
4	1	4	$\boxed{6}$	4	1	
$\vdots$	$\vdots$					$\ddots$

2.4.2 Binôme de Newton

Le nom des coefficients binomiaux vient de leur présence dans la formule du Binôme de Newton donnant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le développement du produit $(a+b)^n$. Ainsi, soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n\end{aligned}$$

Exemples :

- Pour $n = 2$, on retrouve, à l'aide de la troisième ligne du triangle de Pascal, les premières identités remarquable :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} a(-b) + \binom{2}{2} (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

2.4.3 Factorisation de $a^n - b^n$

Il est de même possible de généraliser la dernière identité remarquable

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

à toute différence de la forme $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Précisément, on peut montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^k \\ &= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + \cdots + a b^{n-2} + b^{n-1}) \end{aligned}$$

2.5 Résolution d'équations (une inconnue)

Formellement, une équation est une égalité liant entre elles deux expressions (le membre de gauche et le membre de droite) dépendant chacune d'un certain nombre de variables dites inconnues. Chaque équation peut être vue comme une contrainte. Si un ensemble de variables est lié par une équation, on ne peut choisir librement la valeur de chacune d'entre elles.

Note : toute équation peut être réécrite de sorte que le membre de droite soit nul :

$$(E)\ :\ f(x) = 0$$

où f est une fonction connue de x.

En pratique, les méthodes de résolution d'une équation donnée dépend de la nature de celle-ci, la caractéristique première déterminant la méthode de résolution étant donnée par le nombre d'inconnues.

2.5.1 Équations inversibles

Une équation de la forme $f(x) = 0$ est dite inversible si elle admet une unique solution. C'est formellement le cas lorsque la fonction f réalise une bijection à valeur dans un intervalle contenant 0. L'existence de la bijection réciproque f^{-1} permet alors d'exprimer l'unique solution de (E) sous la forme

$$f(x) = 0 \iff x = f^{-1}(0)$$

Exemple : une équation linéaire, de la forme

$$ax + b = 0$$

admet une unique solution si $a \neq 0$. On a vu comment, dans ce cas, les propriétés des opérations $+$ et $\times$ permettent d'isoler x pour obtenir cette unique solution :

$$ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{a}$$

Lorsque cela est possible, les opérations élémentaires ainsi que la théorie des fonctions permet de construire explicitement la réciproque f^{-1} de f et de donner l'unique solution cherchée. Cependant, il n'est pas rare que, bien que la théorie nous assure de l'existence d'une telle solution, il ne soit pas possible de l'exprimer explicitement. On est alors réduit à la recherche d'une solution approchée. Nous verrons plus loin différentes techniques permettant de construire des solutions approchées à une équation de la forme $f(x) = 0$, basées sur les suites numériques.

2.5.2 Cas général

Pour les équations de la forme $f(x) = 0$ admettant plusieurs solutions, la méthode générale de résolution consiste à factoriser au maximum l'expression $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \prod_{k=1}^{s} f_k(x)$$

où chaque fonction f_k est une bijection. Ainsi, étant donné qu'un produit de nombres réels (ou complexes) est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul, on peut associer à l'équation de départ un ensemble d'équations de la forme $f_k(x) = 0$ admettant chacune une unique solution. L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est alors la réunion de l'ensemble des solutions des équations $f_k(x) = 0$.

Là encore, la factorisation se fait à l'aide des règles de calculs évoqués plus haut, notamment via les identités remarquables et leurs différentes généralisations.

Parmi ces équations, on distingue les équations *polynomiales* $P(x) = 0$ où $P(x)$ est un polynôme :

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$$

On peut en effet montrer que tout polynôme $P(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$P(x) = A \prod_{k=1}^{n} (x - \alpha_k)$$

Les nombres comples α_k sont appelés *les racines de* P et forment l'ensemble des solutions de l'équation $P(x) = 0$ et résoudre l'équation $P(x) = 0$ consiste à déterminer les racines du polynôme $P(x)$.

Dans le cas d'une équation polynomiale de degré 2

$$ax^2 + bx + c = 0$$

la mise sous forme canonique de l'équation permet d'exploiter l'identité remarquable $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$ et d'établir le protocole de résolution suivant, uniquement basé sur les coefficients a, b et c de l'équation : la mise sous forme canonique consiste à voir la partie $ax^2 + bx$ comme le début du carré $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. On peut alors exprimer l'ensemble du polynôme $ax^2 + bx + c$ comme une différence de carrés. La factorisation produit alors deux polynômes de degré 1, dont l'annulation produit deux solutions à l'équation de départ : en notant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

et

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

on a alors

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \iff x = x_1 \text{ ou } x = x_2$$

Notes :

- Si $\Delta = 0$, on a $x_1 = x_2$. On parle alors de solution double.
- Si $\Delta < 0$, le terme $\sqrt{\Delta}$ est alors un nombre complexe, ainsi que les deux solutions x_1 et x_2.

Il est possible d'établir des stratégies et des formules analogues pour les équations de degré 3 et 4. Cependant, la lourdeur des formules les rend peu usitées en pratique. D'autre part, il est prouvé qu'il n'existe aucune formule donnant les solutions d'une équation de degré supérieur ou égal à cinq en fonction des coefficients du polynôme à annuler.

En pratique, la résolution exacte de telles équations passe donc, lorsque cela est possible par des méthodes de calcul consistant à "faire chuter le degré de l'équation étudiée".

Précisément, on peut montrer que pour tout polynôme $P(x)$ de degré n, s'il existe un nombre $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$, alors il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n - 1$ tel que

$$P(x) = (x - \alpha).Q(x)$$

Ainsi, si $P(x)$ est un polynôme de degré $n \geqslant 3$, une technique de factorisation consiste à chercher $n - 2$ solutions "évidentes" $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-2}$ de sorte que

$$P(x) = Q(x).\prod_{k=1}^{n-2}(x - \alpha_k)$$

où $Q(x)$ est un polynôme de degré $n - (n - 2) = 2$. On peut alors terminer la factorisation en appliquant la méthode spécifique aux équations de degré 2.

Note : en pratique, le calcul du polynôme $Q(x)$ peut se faire par identification.

Chapitre 3

Fonctions d'une variable réelle

Introduction

Les fonctions réelles sont un outil indispensable à la modélisation et l'étude de tout phénomène (physique, biologique, économique, etc).

Elles permettent en particulier de modéliser l'évolution de quantités numériques en fonction de certains paramètres. Dans ce chapitre, on s'intéresse précisément aux fonctions dépendant d'une seule variable réelle x.

Les mathématiques proposent alors des outils permettant l'étude détaillée de ce type de fonction, l'un des objectifs premiers étant d'étudier les variations d'une fonction donnée.

La plupart de ces outils sont basées sur deux propriétés fondamentales de l'ensemble des nombres réels :

- la représentation géométrique de l'ensemble $\mathbb{R}$ sous la forme d'une droite, qui permet une représentation géométrique des fonctions d'une variable réelle,
- la continuité de l'ensemble $\mathbb{R}$, qui permet le développement d'outils particulièrement fins.

Rappels : on appelle *intervalle de* $\mathbb{R}$ tout sous ensemble $I \subset \mathbb{R}$ continu (i.e. sans trou). On dira que I est non trivial s'il est non vide et non réduit à un point.

On rappelle également que toute partie de $\mathbb{R}$ peut être décrite par une réunion disjointe d'intervalles (éventuellement réduits à un point).

On appelle *intervalle fermé* tout intervalle de $\mathbb{R}$ contenant ses bornes. On note $I = [a, b]$. Tout intervalle non fermé est dit ouvert.

3.1 Définitions

On appelle fonction d'une variable réelle toute application f définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, i.e. un procédé qui à chaque élément $x \in D$ associe un unique réel $f(x)$.

On note
$$f \;:\; \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Le réel $f(x)$ est *l'image* de x par f ou la valeur de f en x. Réciproquement, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on appelle *antécédent de y par f* tout réel $x \in D$ tel que $y = f(x)$.

L'ensemble D est appelé *domaine de définition* de f. Il peut être défini par le modèle étudié mais peut également être restreint par les règles de calcul dans $\mathbb{R}$.

Exemples :

- Si x représente la position d'un point sur une poutre de longueur L, on a $D = [0, L]$.
- La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $D = \mathbb{R}^*$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie sur $D = \mathbb{R}^+$.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ est définie sur $[-1, 1]$.

Réciproquement, on note $\mathrm{Im}(f)$ ou $f(D)$ le sous ensemble de $\mathbb{R}$ rassemblant l'ensemble des réels admettant au moins un antécédent par f.

Note : en général, $f(D) \subsetneq \mathbb{R}$. En restreignant l'ensemble d'arrivée de f à $\mathrm{Im}(f)$, on construit alors une application *surjective*.

Définition 3.1.1 *On appelle* graphe de f *l'ensemble de* $\mathbb{R}^2$ *défini par*

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)), \quad x \in D\}$$

En assimilant $\mathbb{R}^2$ au plan muni d'un repère orthonormé, on peut représenter le graphe de f par un ensemble de points. Les différentes propriétés d'une fonction réelle f, établies à l'aide des outils analytiques ci-dessous peuvent alors s'interpréter en termes de propriétés géométriques vérifiées par le graphe $\mathcal{G}_f$.

Si D est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est continue (c.f. plus loin pour une définition précise de la continuité), l'ensemble des points du graphe de f forment alors une courbe.

3.2 Premières propriétés

Soit $f \;:\; D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle.

3.2.1 Parité, périodicité

Parité

Définition 3.2.1 • *f est dite* paire *si*

$$\forall x \in D, \qquad -x \in D \quad \textit{et} \quad f(-x) = f(x)$$

• *f est dite* impaire *si*

$$\forall x \in D, \qquad -x \in D \quad \textit{et} \quad f(-x) = -f(x)$$

Si f est paire ou impaire, son domaine de définition est centré en 0. De plus, on peut alors réduire l'ensemble d'étude de moitié en ne considérant que $D \cap \mathbb{R}^+$ (ou $D \cap \mathbb{R}^-$), l'autre moitié étant obtenue par symétrie.

D'un point de vue géométrique, le graphe d'une fonction paire ou impaire possède certaines propriétés de symétrie. Précisément :

- Si f est paire, son graphe $\mathcal{G}_f$ dans un repère (xOy) est symétrique par rapport à l'axe (Oy).
- Si f est impaire, son graphe $\mathcal{G}_f$ dans un repère (xOy) est symétrique par rapport au centre O du repère.

Attention : certaines fonctions ne sont ni paires ni impaires !

Exemples :
- Toute fonction de la forme $x \mapsto x^{2p}$ $(p \in \mathbb{N})$ est paire.
- Toute fonction de la forme $x \mapsto x^{2p+1}$ $(p \in \mathbb{N})$ est impaire.
- La fonction $x \mapsto 2x + 1$ n'est ni paire ni impaire.

Périodicité

Définition 3.2.2 *Un nombre réel $T > 0$ est* une période de f *si*

$$\forall x \in D, \qquad x + T \in D \quad \textit{et} \quad f(x+T) = f(x)$$

Note : si $T > 0$ est une période de f, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, nT est également une période de f. f est dite T-périodique si T est la plus petite période strictement positive de f.

D'un point de vue géométrique, si f est une fonction T-périodique, son graphe est constitué d'un motif élémentaire de “longueur” T répété de proche en proche. L'étude d'une fonction T-périodique peut alors être réduite à n'importe quel intervalle de D de longueur T (par exemple $[0, T[$ si $0 \in D$).

Exemples : les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente sont 2π-périodiques.

3.2.2 Fonctions bornées

Définition 3.2.3 *f est dite*

- *majorée sur D s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que*
$$\forall x \in D, \qquad f(x) \leqslant M$$
- *minorée sur D s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que*
$$\forall x \in D, \qquad f(x) \geqslant m$$
- *bornée sur D si elle est à la fois majorée et minorée.*

Note : on peut montrer que f est bornée si et seulement s'il existe $A \geqslant 0$ telle que
$$\forall x \in D, \qquad |f(x)| \leqslant A$$

Exercice : à démontrer.

3.2.3 Monotonie

Définition 3.2.4 *Soit I un intervalle de D non vide et non réduit à un point (i.e. non trivial). f est dite*

- croissante sur I *(resp.* strictement *croissante sur I) si*
$$\forall a, b \in I, \qquad a < b \ \Rightarrow \ f(a) \leqslant f(b) \qquad (\textit{resp. } f(a) < f(b))$$
- décroissante sur I *(resp.* strictement *décroissante sur I) si*
$$\forall a, b \in I, \qquad a < b \ \Rightarrow \ f(a) \geqslant f(b) \qquad (\textit{resp. } f(a) > f(b))$$
- monotone sur I *(resp. strictement monotone sur I) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) sur I.*

Certaines fonctions ne sont bien sur ni croissantes ni décroissantes. Il est possible, pour certaines, de définir des sous ensembles de D sur lesquelles elles sont monotone, mais on peut également construire des fonctions que ne sont monotones sur aucun intervalle...

D'autre part, on a une propriété importante des fonctions strictement monotones :

Proposition 3.2.5 *Si f est strictement monotone sur I, alors elle est injective.*

Exercice : à démontrer. On rappelle que f est injective sur I si
$$\forall a, b \in I, \qquad f(a) \neq f(b) \ \Rightarrow a \neq b$$

Ainsi, si f est une fonction strictement monotone sur son domaine D, en restreignant l'ensemble d'arrivée à $f(D)$, on obtient une application *bijective*.

3.2.4 Extrema

Extrema globaux

Définition 3.2.6 • *Un point* $x_0 \in D$ *est un* maximum global *(resp.* minimum global*) de* f *sur* D *si*

$$\forall x \in D, \qquad f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (resp.\ f(x) \geqslant f(x_0))$$

On note alors $f(x_0) = \max\limits_I f$ *(resp.* $f(x_0) = \min\limits_I f$*).*

- $x_0 \in D$ *est un extremum global de* f *sur* D *si c'est un maximum ou un minimum global.*

Extrema locaux

Définition 3.2.7 *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$ *on appelle voisinage de* x_0 *toute partie de* $\mathbb{R}$ *contenant un intervalle de la forme* $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ *pour un* $\delta > 0$*. On note* $V(x_0)$ *ou* V_{x_0} *un tel ensemble.*

Définition 3.2.8 • $x_0 \in D$ *est un* maximum local *(resp.* minimum local*) de* f *s'il existe un voisinage* $V(x_0)$ *tel que*

$$\forall x \in V(x_0) \cap D, \qquad f(x) \leqslant f(x_0) \qquad (resp. f(x) \geqslant f(x_0))$$

- $x_0 \in D$ *est un extremum local de* f *si c'est un maximum ou un minimum local.*

Fin séance 1 *16-17 : inclure la section 3.3*

3.3 L'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ (ou $\mathbb{R}^I$) l'ensemble des fonctions réelles définies sur I. On peut alors définir un ensemble d'opérations sur cet ensemble (inspirées pour la plupart des opérations définies sur $\mathbb{R}$). Ainsi, soient f et g deux fonctions de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

- La fonction $f + g$ est la fonction définie par

$$\forall x \in I, \qquad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

- La fonction $f \times g$ est la fonction définie par

$$\forall x \in I, \qquad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

- La fonction $\frac{f}{g}$ est la fonction définie par

$$\forall x \in I \ / \ g(x) \neq 0, \qquad \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

D'autre part, si f est définie sur I et g est définie sur l'ensemble $f(I) = \{f(x),\ x \in I\}$, on appelle composée de f et g la fonction $g \circ f$ définie sur I par

$$\forall x \in I, \qquad g \circ f(x) = g\left(f(x)\right)$$

Note : on peut généraliser la somme de fonctions aux *combinaisons linéaires* :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad \alpha.f + \beta.g \ : \ x \longmapsto \alpha.f(x) + \beta.g(x)$$

3.4 Limites

3.4.1 Limite en un point

La notion de limite, basée sur la notion de voisinage et la propriété de continuité de l'ensemble $\mathbb{R}$ permet de mettre en place des outils très fins d'étude *locale* des fonctions réelles. Précisément, cela permet d'étudier le comportement d'une fonction f au voisinage d'un point a où f n'est pas nécessairement définie.

Définition 3.4.1 (adhérence) *Soient D une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. a est dit* adhérent *à D si tout voisinage de a rencontre D. On note alors $\overline{D}$ l'ensemble des points adhérents à D, appelé* adhérence de D. *Ainsi :*

$$a \in \overline{D} \ \Leftrightarrow \ \forall V(a), \quad V(a) \cap D \neq \emptyset$$

Exemples :
- Tout élément de D est adhérent à D car tout voisinage $V(a)$ de a contient a.
- L'adhérence d'un intervalle $I =]a, b[$ est $\overline{I} = [a, b]$.

Définition 3.4.2 (limite infinie) *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, b]$ (resp. $[b, a[$). On dit que f tend vers l'infini en a à droite (resp. à gauche) si*

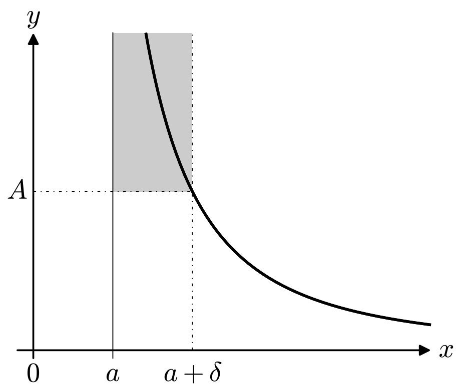
$$\forall A > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ x \in]a, a+\delta[\ \Rightarrow \ f(x) > A$$

$$(\textit{resp.}\ \forall A > 0,\ \exists \delta > 0 \ / \ x \in]a-\delta, a[\ \Rightarrow \ f(x) > A)$$

On note

$$\lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = +\infty \qquad (\textit{resp.}\ \lim_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = +\infty)$$

Géométriquement, si f admet une limite infinie en $a \in \mathbb{R}$, le graphe de f admet la droite d'équation $x = a$ comme asymptote verticale (c.f. ci-contre).



Exercice :

1. Écrire les définitions analogues pour

$$\lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = -\infty$$

2. Illustrer graphiquement les différents cas.

Définition 3.4.3 (limite finie) *Soient $a \in \mathbb{R}$ et f définie au voisinage de a (f peut ici être définie ou non en a).*

1. *On dit que f admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$ à droite (resp. à gauche) en a si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ /\ x \in]a, a+\delta[\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

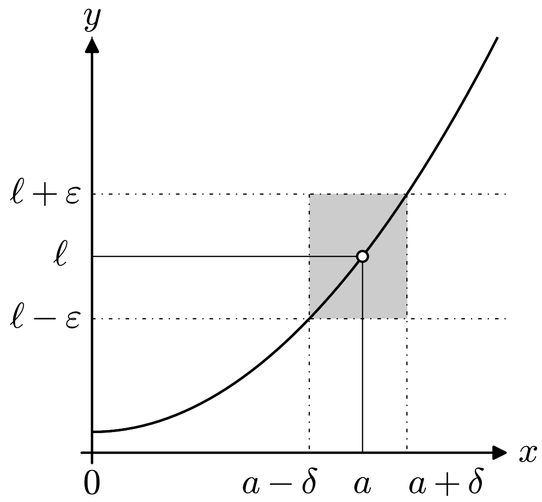
$$(\textit{resp.}\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ /\ x \in]a-\delta, a[\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon)$$

On note alors

$$\lim_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = \ell \qquad (\textit{resp.}\ \lim_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = \ell)$$

2. *f admet une limite finie en a si elle admet une limite commune ℓ à droite et à gauche. On note alors*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$$



3.4.2 Limite en l'infini

La notion de limite permet également d'étudier le comportement d'une fonction au voisinage de l'infini.

Définition 3.4.4 *Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.*

- **Limite finie** *: f admet une limite finie ℓ en $+\infty$ si et seulement si*

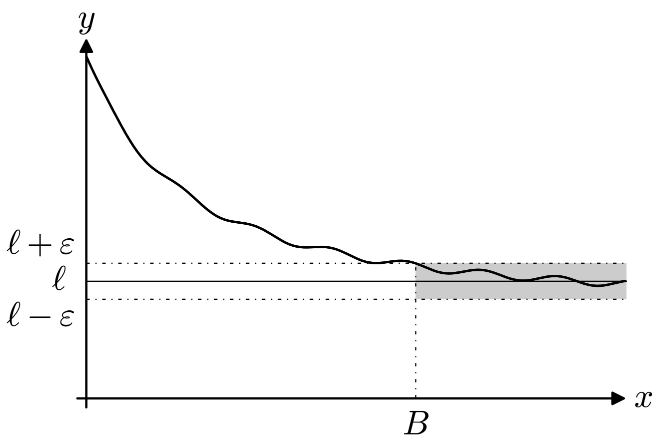
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists B > 0 \ / \ x \geqslant B \ \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

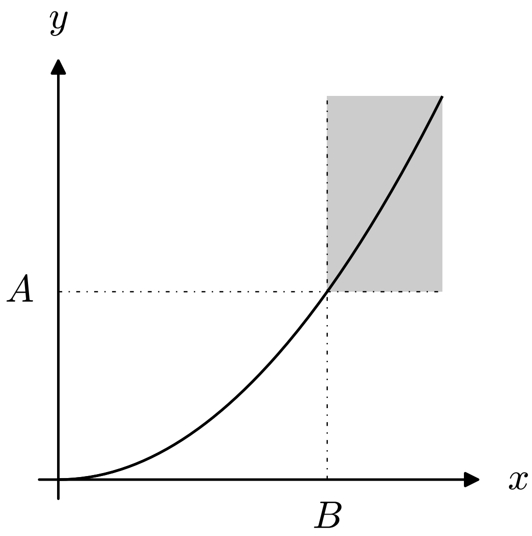
- **Limite infinie** *: f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si*

$$\forall A > 0,\ \exists B > 0 \ / \ x \geqslant B \ \Rightarrow \ f(x) > A$$

Si f admet une limite finie ℓ en $+\infty$, son graphe admet la droite d'équation $y = \ell$ comme asymptote horizontale à droite.



Si f admet une limite infinie en l'infini, on dit que le graphe de f admet une *branche infinie*.



3.4.3 Limites et inégalités

Proposition 3.4.5 *Soient $a \in \mathbb{R}$ et f et g deux fonctions définies sur un voisinage $V(a)$. On suppose que*

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}}$,
2. $\lim_{x\to a} g(x) = \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$,
3. $\forall x \in V(a), \quad f(x) \leqslant g(x)$.

Alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

Notes :
- D'après la propriété ci-dessus, il est claire que si f est une fonction bornée par m à gauche et M à droite sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et si f admet une limite finie ℓ en $a \in \overline{I}$, alors $m \leqslant \ell \leqslant M$.
- La conclusion de la proposition ci-dessus est optimale. En effet, même en remplaçant, dans l'hypothèse 3, l'inégalité large par une inégalité stricte, on ne peut avoir mieux que l'inégalité large dans la conclusion.

Théorème 3.4.6 (Théorème des gendarmes) *Soient* $a \in \mathbb{R}$ *et* f, g *et* h *trois fonctions définies dans un voisinage* $V(a)$ *telles que*

$$\forall x \in V(a), \qquad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, *alors* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

Cet (célèbre) théorème est souvent utilisé pour montrer qu'une limite est nulle. Précisément, pour montrer que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, on s'attache à établir une inégalité de la forme

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

où g est une fonction vérifiant $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Le théorème des gendarmes permet alors de conclure.

Exemple : montrer que $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$.

3.4.4 Limites et opérations

Via la définition, il est possible de démontrer des règles de calculs de limites compatibles avec les opérations de l'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Précisément,

Proposition 3.4.7 *Soient* f *et* g *deux fonctions de définies au voisinage d'un point* a *(fini ou non) admettant respectivement des limites finies* ℓ_1 *et* ℓ_2 *en* a. *Alors*

1. $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \ell_1 + \ell_2$
2. $\lim\limits_{x\to a}(f.g)(x) = \ell_1.\ell_2$
3. *Si* $\ell_2 \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$

Notes :
- L'item 1 de la propriété ci-dessus peut se généraliser aux *combinaisons linéaires* :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to a}(\alpha.f + \beta.g)(x) = \alpha.\ell_1 + \beta.\ell_2$$

- Dans l'item 3, l'étude de la limite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ nécessite en théorie de s'assurer que $g(x)$ ne s'annule pas au voisinage de a. Cependant, on peut montrer que cette propriété est vérifiée dès que $\ell_2 \neq 0$.

Proposition 3.4.8 *Soient f et g deux fonctions telles que*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad \text{et} \qquad \lim_{y \to b} g(y) = \ell$$

Alors

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = \ell$$

3.4.5 Formes indéterminées

Il est également possible de généraliser les résultats ci-dessus aux limites éventuellement infinies, certaines combinaisons produisant cependant des *formes indéterminées*, i.e. des limites pour lesquelles on ne peut donner de règle générale. Ainsi, soient f et g tendant respectivement vers ℓ_1 et ℓ_2 deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. L'ensemble des résultats généraux est résumé dans les tableaux ci-dessous.

limite d'une somme $f + g$

$\ell_1 \backslash \ell_2$	$-\infty$	$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.
$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$
$+\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$

limite d'un produit $f.g$

$\ell_1 \backslash \ell_2$	$-\infty$	$\ell_2 < 0$	$\ell_2 = 0$	$\ell_2 > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$
$\ell_1 < 0$	$+\infty$	$\ell_1.\ell_2$	0	$\ell_1.\ell_2$	$-\infty$
$\ell_1 = 0$	F.I.	0	0	0	F.I.
$\ell_1 > 0$	$-\infty$	$\ell_1.\ell_2$	0	$\ell_1.\ell_2$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$

limite d'un quotient $\frac{f}{g}$

$\ell_1 \backslash \ell_2$	$-\infty$	$\ell_2 < 0$	$\ell_2 = 0^-$	$\ell_2 = 0^+$	$\ell_2 > 0$	$+\infty$
$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	F.I.
$\ell_1 < 0$	0	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0
$\ell_1 = 0$	0	0	F.I.	F.I.	0	0
$\ell_1 > 0$	0	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{\ell_1}{\ell_2}$	0
$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.

Fin séance 2 *16-17 : inclure les croissances comparées*

Note : la notion de forme indéterminé traduit en général un "conflit" entre deux fonctions.

Par exemple, la forme indéterminée "$\frac{0}{0}$" correspond à l'étude d'un quotient $\frac{f}{g}$ tel que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

Or lorsque $f(x)$ tend vers 0, le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0. Réciproquement, quand $g(x)$ tend vers 0, ce quotient tend vers l'infini. Le comportement du quotient quand les deux parties tendent vers 0 dépend alors de la *vitesse* à laquelle chaque partie tend vers 0. Précisément :

- si f tend vers 0 plus vite que g, alors la fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers 0.
- si g tend vers 0 plus vite que f, alors la fraction $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $+\infty$.
- si les deux fonctions tendent vers 0 sensiblement à la même vitesse, le quotient tend vers un nombre fini non nul.

Lever une indétermination demande alors une étude plus poussée de chacune des fonctions f et g permettant de déterminer la vitesse de convergence de chacune des quantités $f(x)$ et $g(x)$. Nous verrons plus loin comment définir une échelle de vitesse ainsi que des outils permettant de placer les fonctions étudiées sur cette échelle.

Rappelons pour l'instant quelques résultats classiques concernant les fonctions de références :

Proposition 3.4.9 (croissances comparées)

1. *En $+\infty$,*
   (a) *n'importe quelle puissance de x l'emporte sur n'importe quelle puissance du log :*
   $$\forall \alpha, \beta > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\alpha(x)}{x^\beta} = 0$$
   (b) *n'importe quelle puissance de l'exponentielle l'emporte sur n'importe quelle puissance de x :*
   $$\forall \alpha, \beta > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$$
2. *En 0, n'importe quelle puissance de x l'emporte sur n'importe quelle puissance du log :*
   $$\forall \alpha, \beta > 0, \quad \lim_{x \overset{>}{\to} 0} x^\alpha . \ln^\beta(x) = 0$$

Exemple : on a en particulier

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty \qquad c)\ \lim_{x\overset{>}{\to}0} x\ln(x)=0$$

Exercice : déterminer les limites ci-dessous :

$$a)\ \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{\ln x} \qquad c)\ \lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{x\ln x}$$

3.5 Continuité

3.5.1 Définitions

La notion de continuité formalise la caractérisation des fonctions dont le graphe est une courbe continue. Ainsi,

Définition 3.5.1 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.*

1. **Continuité en un point.**
Soit $x_0 \in I$.
(a) f est dite continue en x_0 à gauche *si et seulement si*

$$\lim_{x\overset{<}{\to}x_0} f(x)=f(x_0)$$

(b) f est dite continue en x_0 à droite *si et seulement si*

$$\lim_{x\overset{>}{\to}x_0} f(x)=f(x_0)$$

(c) f est dite continue en x_0 *si et seulement si*

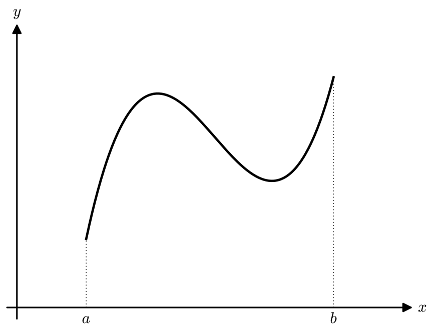
$$\lim_{x\overset{<}{\to}x_0} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}x_0} f(x)=f(x_0)$$

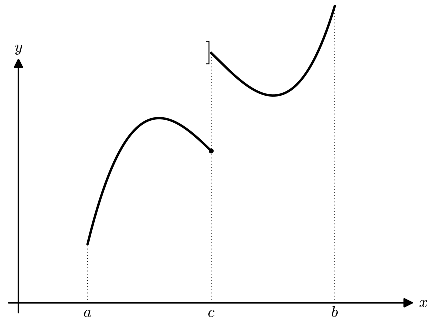
2. **Continuité sur un intervalle.**
f est dite continue sur I *si et seulement si elle est continue en tout point $x\in I$.*

Exemples

1. La plupart des fonctions usuelles sont continues sur leurs domaines de définition.

2. Ci dessous :
   - À gauche, une fonction continue sur $[a,b]$.
   - À droite, une fonction non continue en c. Cette fonction n'est donc pas continue sur $[a,b]$. Cependant, elle est continue sur $[a,c[$ et sur $]c,b]$ et continue à gauche en c.





3. Pour tout nombre réel x, on appelle *partie entière de* x le plus grand entier $E(x)$ inférieur ou égal à x. On peut montrer que E est continue en tout réel *non entier.* On peut en outre montrer que E est continue à gauche en tout point $x_0 \in \mathbb{Z}$.

Proposition 3.5.2 (Opérations et continuité) *La somme, le produit, le quotient, la composée de deux fonctions continues sont continues partout où elles sont définies.*

3.5.2 Prolongement par continuité

Exemple : la fonction ln étant définie sur $]0,+\infty[$, la fonction $f\ :\ x \mapsto x\ln(x)$ est donc également définie sur I. Cependant, on a vu plus haut que

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

On dit alors que f *se prolonge par continuité* en 0. On construit ainsi la fonction

$$\begin{array}{cccc} \tilde{f} & : & [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} x\ln(x) & \text{si} \quad x>0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases} \end{array}$$

Définition 3.5.3 *Soit f une fonction réelle, définie sur un intervalle de la forme $I=]a,b]$. f est dite* prolongeable par continuité *en a si elle admet une limite finie ℓ en a. On pourra alors noter $\tilde{f}$ la fonction continue sur $[a,b]$ prolongent f en a :*

$$\begin{array}{cccc} \tilde{f} & : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & si \quad x\in]a,b] \\ \ell & si \quad x=a \end{cases} \end{array}$$

Fin séance 3 *16-17*

3.5.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.5.4 *Soit f une fonction continue définie sur un intervalle I.*

1. *L'image $f(I)$ de I par f est encore un intervalle de $\mathbb{R}$.*
2. *Si I est un intervalle fermé borné (i.e. de la forme $[a,b]$), alors $f(I)$ est également un intervalle fermé borné (de la forme $[m,M]$).*

Corollaire 3.5.5 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si a et b sont deux éléments de I, alors pour tout réel β compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $\alpha \in [a,b]$ tel que $f(\alpha) = \beta$.*

Application : résolution d'une équation de la forme $f(x) = 0$.

Théorème 3.5.6 (Théorème de la bijection) *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Pour tout réel $y \in f(I)$, il existe un* unique *$x \in I$ tel que $f(x) = y$.*

Si les hypothèses du théorème ci-dessus sont vérifiées, on dit que f *réalise une bijection* de l'intervalle I vers $J = f(I)$. La bijection réciproque de f est la fonction notée f^{-1} qui à chaque élément $y \in J$ associe l'unique élément $x \in I$ dont l'image par f est y.

Le lien existant entre f et f^{-1} se traduit également de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in I, & f^{-1} \circ f(x) = x \\ \forall y \in J, & f \circ f^{-1}(y) = y \end{array}$$

Note : en pratique, on peut également déterminer J et l'expression de $f^{-1}(y)$ en résolvant l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x.

Exemples :

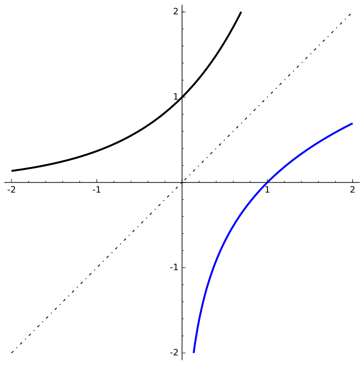
- $(\exp, \ln)$, $(\frac{1}{x}, \frac{1}{x})$, $(x^2, \sqrt{x})$ (exercice : détermine les domaines I et J dans chaque cas).
- On peut construire les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques sinus cosinus et tangente en se restreignant aux bons intervalles de $\mathbb{R}$:

  — La fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1,1]$. Sa bijection réciproque est arcsin : $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
  — La fonction cosinus réalise une bijection de $[0,\pi]$ dans $[-1,1]$. Sa bijection réciproque est arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$.
  — La fonction tangente réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

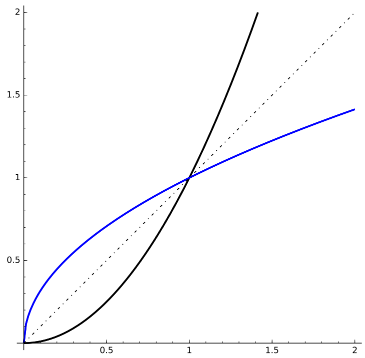
Note : il existe également un lien entre le graphe d'une fonction f bijective et celui de f^{-1}. Précisément, on peut montrer que $\mathcal{G}_f$ et $\mathcal{G}_{f^{-1}}$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice du repère (xOy) (i.e. la droite d'équation $y = x$).

Exemples :

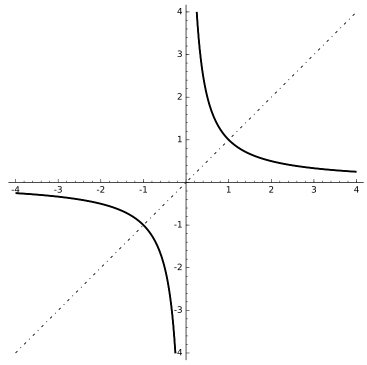
exponentielle / logarithme



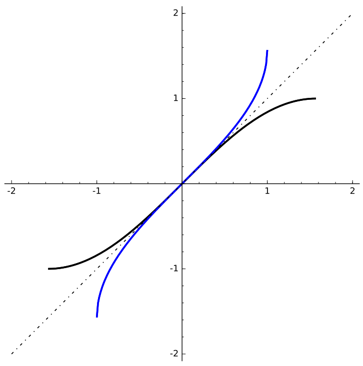
carré / racine carrée



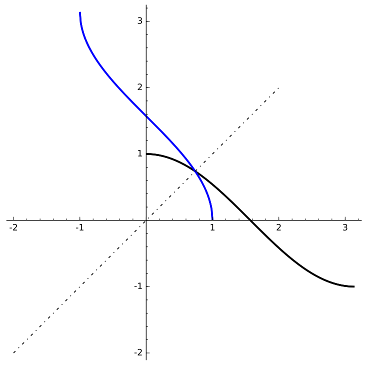
fonction inverse



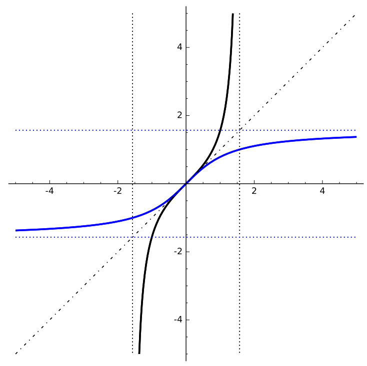
sin / arcsin



cos / arccos



tan / arctan



3.6 Dérivabilité

3.6.1 Dérivée en un point

La notion de dérivée constitue la pierre angulaire d'une théorie parmi les plus importantes développées par les mathématiciens : le calcul différentiel.

Définition 3.6.1 (dérivée en un point) *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si le taux d'accroissement*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie quand x tend vers x_0. Si cette limite existe, on note

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

le nombre dérivé de f en x_0.

Note : la notion de dérivée est basée sur une petite variation de la variable x autour du point x_0 : la différence $x - x_0$. En notant $h = x - x_0$, on obtient une écriture équivalente du nombre dérivé :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

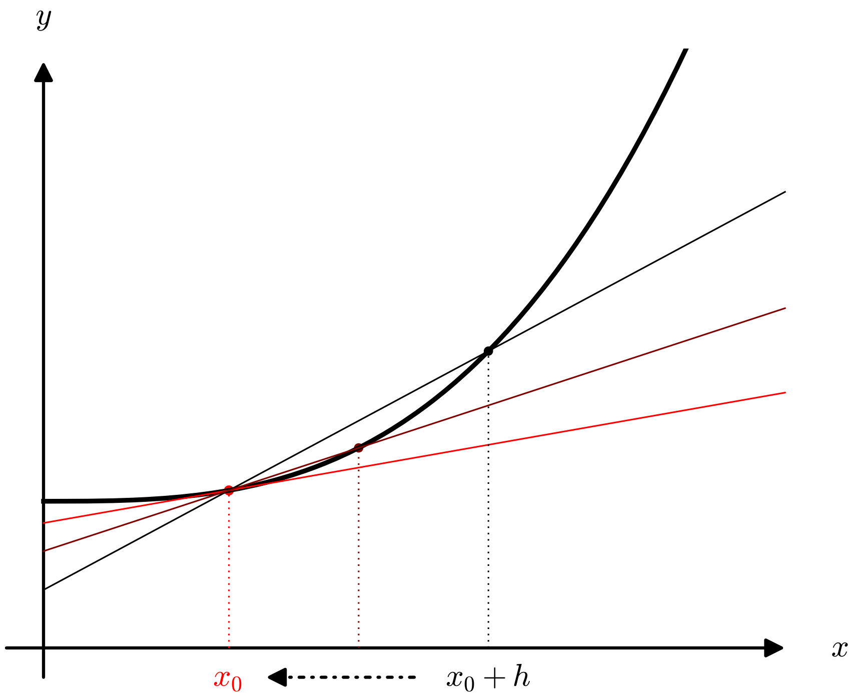
3.6.2 Dérivée et tangente

Il existe une interprétation fondamentale du nombre dérivé en un point d'un point de vue géométrique. Précisément, le taux d'accroissement

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

correspond à la pente de la droite du plan liant les points de $\mathcal{G}_f$ de coordonnées $(x, f(x))$ et $(x_0, f(x_0))$. Lorsque x tend vers x_0, cette droite tend vers la tangente à $\mathcal{G}_f$ au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$. Le nombre dérivé est donc, quand il existe, le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{G}_f$ au point d'abscisse x_0 lorsque cette tangente existe (on peut notamment démontrer que l'existence de cette tangente est directement liée à l'existence du nombre dérivé $f'(x_0)$). Ainsi, la tangente à $\mathcal{G}_f$ au point d'abscisse x_0 est l'unique droite du plan, de pente $f'(x_0)$ et passant par le point $(x_0, f(x_0))$. Il s'agit donc de la droite d'équation

$$\boxed{T_{x_0} \ : \ y \ = \ f'(x_0).(x - x_0) + f'(x_0)}$$



Or l'étude de cette tangente est en général la première étape (et une étape fondamentale) dans l'étude locale de la fonction f au voisinage de x_0.

Ainsi, notons dans un premier temps qu'au point d'abscisse x_0, la courbe $\mathcal{G}_f$ et la tangente T_{x_0} varient dans le même sens. Or le sens de variation de la tangente T_{x_0} est donné par le signe de son coefficient directeur $f'(x_0)$.

Dans un second temps, notons que la vitesse de variation de f au point d'abscisse x_0 correspond là encore à l'intensité de la pente de la tangente T_{x_0}. Cette vitesse de variation est donc donnée par la quantité $|f'(x_0)|$.

Enfin, notons que, de façon générale, si l'on reste proche de x_0, on peut assimiler le graphe de f et sa tangente en x_0. D'un point de vue analytique, cela se traduit par une égalité du type

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + e(x - x_0)$$

où $e(x-x_0)$ est une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers x_0 et qui devient négligeable lorsque x est assez proche de x_0. Nous verrons par la suite qu'il est possible de préciser et de généraliser cette écriture.

Note : en note $h = x - x_0$, la formule ci-dessus devient

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h.f'(x_0) + e(h)$$

où $e(h) \underset{h \to 0}{\to} 0$.

Fin séance 4 *16-17*

3.6.3 Fonction dérivée et dérivées successives

Comme la notion de continuité, la notion de dérivée est avant tout une notion *locale*. Cependant, on dira que f est dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ si elle admet un nombre dérivé $f'(x)$ pour tout $x \in I$. On peut alors définir la *fonction dérivée* f' :

Définition 3.6.2 *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I et admettant un nombre dérivé en chaque point $x \in I$. On appelle* fonction dérivée de f sur I *la fonction f' définie par*

$$\begin{array}{rcl} f' : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \end{array}$$

Exemples :

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés et $f : x \mapsto ax+b$. Montrer que f admet un nombre dérivé $f'(x_0)$ en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et que la fonction dérivée f' est une constante à déterminer.
2. Soit $g : x \mapsto x^2$.
   (a) Calculer le nombre dérivé $g'(1)$.
   (b) Calculer le nombre dérivé $g'(x_0)$ pour $x_0 \in \mathbb{R}$.
   (c) En déduire la fonction g'.
3. Montrer que la fonction $h : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0.

Enfin, on dira que f est *de classe* $\mathcal{C}^1$ sur I si sa fonction dérivée f' est continue sur I.

Si f' est à son tour dérivable sur I, on peut construire *la fonction dérivée seconde de* f, notée $f'' = (f')'$. On dira alors que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I si la fonction f'' existe sur I et est continue.

De façon générale, on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de f quand celle ci existe et on dira que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si $f^{(k)}$ existe et est continue sur I. f sera en particulier dite de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On note également $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ définies sur I.

3.6.4 Applications : étude de variations

Si f admet plusieurs dérivées successives, l'étude de ces fonctions dérivées permet d'obtenir de l'information sur les variations de la fonction f. Ainsi,

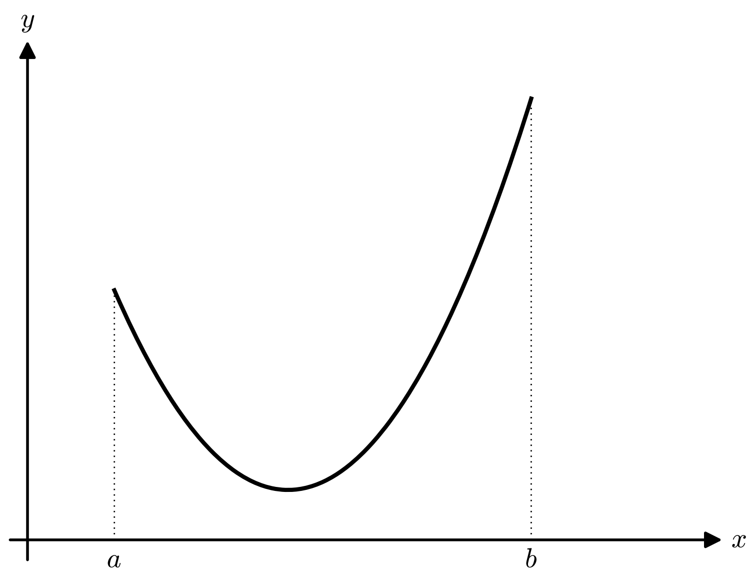
- si f' est positive sur un intervalle I, alors f est croissante sur I,
- si f' est négative sur un intervalle I, alors f est décroissante sur I,
- si f' est nulle sur un intervalle I, alors f est constante sur I.

De façon plus précise, en tout point $x \in I$ tel que $f'(x) = 0$, la fonction f "marque un palier". Les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont appelés *points fixes* ou *points critiques* de f. C'est parmi ces points critiques que se trouvent en particulier les extrema locaux de f situés à l'intérieur de l'intervalle I.

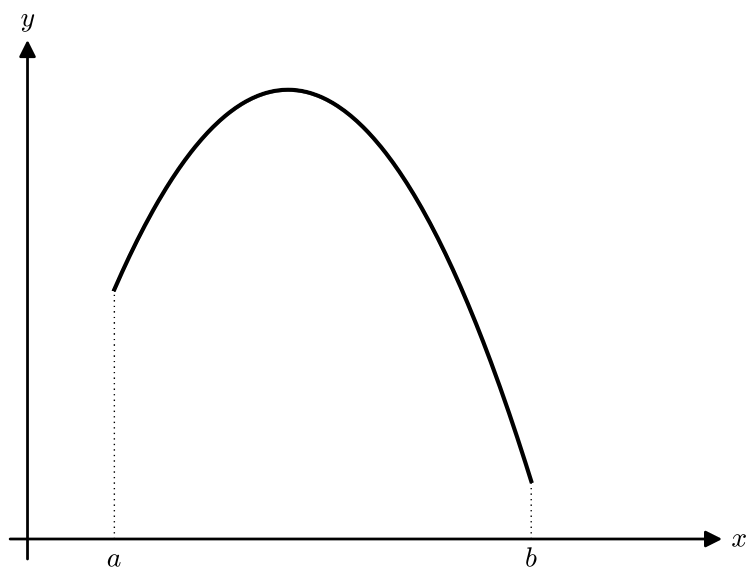
Attention : si les extrema locaux de f situés à l'intérieur de I sont tous des points critiques, tous les points critiques ne sont pas des extrema locaux. Précisément, les extrema admettant une dérivée nulle sont les points auxquels la dérivée de f s'annule *en changeant de signe*. Une fois déterminé l'ensemble des points critiques d'une fonction, il faut donc faire le tri entre les points trouvés.

Enfin, l'étude de la dérivée seconde f'' de f permet d'accéder aux variations de la fonction f' et d'étudier *la concavité* de la fonction f. Bien qu'il existe une définition de la concavité indépendante de la représentation géométrique d'une fonction, on peut en faire une illustration ci-dessous :

Fonction convexe sur $[a, b]$



Fonction concave sur $[a, b]$



D'un point de vue analytique, la concavité peut être associée au sens de variation de la fonction dérivée f' et donc au signe de f'' sur l'intervalle $[a, b]$. En effet, on peut montrer que pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$,

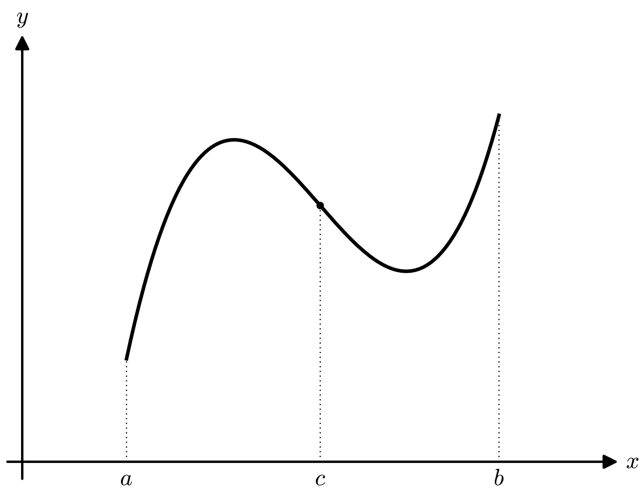
1. f est convexe sur $[a,b]$ si et seulement si $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a,b]$,
2. f est concave sur $[a,b]$ si et seulement si $f''(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

Il est également possible d'exploiter la dérivée seconde de f pour faire le tri dans les points critiques. En effet, étant donné un point critique x_0 de f, on peut montrer que

- si $f''(x_0) > 0$, alors x_0 est un minimum,
- si $f''(x_0) < 0$, alors x_0 est un maximum.

Enfin, la résolution de l'équation $f''(x) = 0$ constitue la première étape dans la recherche des *points d'inflexion* de f, i.e. les points de $\mathbb{R}$ auxquels le graphe de f change de concavité. Ainsi, sur le graphe ci-dessous, on a

- $f''(x) < 0$ pour tout $x \in [a,c[$,
- $f''(c) = 0$,
- $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]c,b]$.



Attention : les points d'inflexion sont les points auxquels la dérivée seconde s'annule *en changeant de signe*. Comme lors de la recherche d'extrema, un fois déterminées les solutions de l'équation $f''(x) = 0$, il faut faire le tri parmi les points trouvés.

3.6.5 Dérivées usuelles et opérations

Le calcul des fonctions dérivées des fonctions usuelles a été fait une fois pour toutes. D'autre part, la plupart des fonctions étudiées étant construites à partir des fonctions usuelles et des opérations de l'ensemble $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, on peut déterminer la fonction dérivée de toute fonction à l'aide des tableaux ci-dessous (sans avoir à repasser par la définition du nombre dérivé).

Dérivées des fonctions usuelles

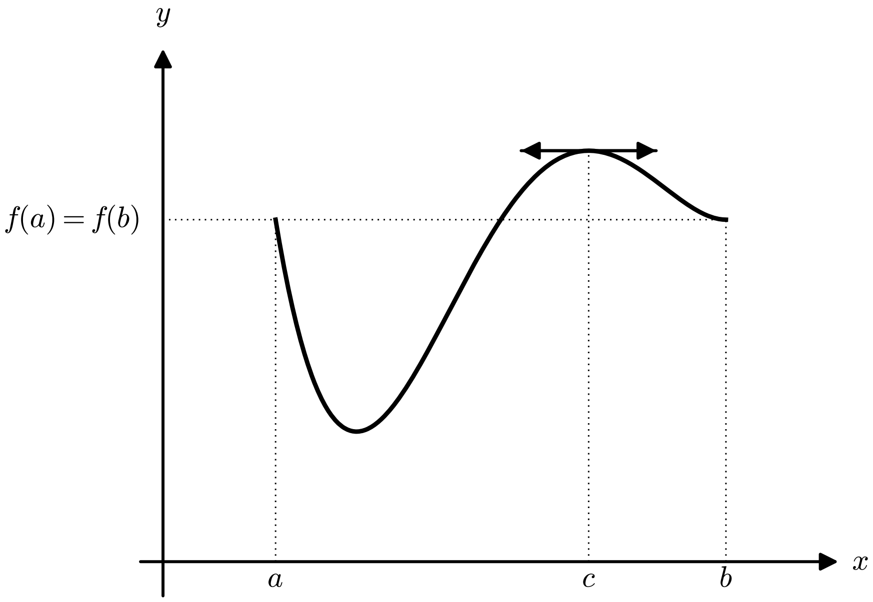
Fonctions	Dérivées	Domaine de dérivabilité
$k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$ax+b$	a	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^{*}$
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$	$n.x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha.x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{*+}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$	$\mathbb{R} - \{k\frac{\pi}{2}\}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Opérations et dérivées

Opérations	Dérivées
$a.u(x)+b.v(x)$	$a.u'(x)+b.v'(x)$
$u(x).v(x)$	$u'(x).v(x)+u(x).v'(x)$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'(x).v(x)-u(x).v'(x)}{v(x)^2}$
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'(x)}{u(x)^2}$
$\exp(u(x))$	$u'(x).\exp(u(x))$
$\ln(u(x))$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
$v(a.x) \quad a \in \mathbb{R}$	$a.v'(ax)$
$v(u(x))$	$u'(x).v'(u(x))$
$f^{-1}(x)$	$\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

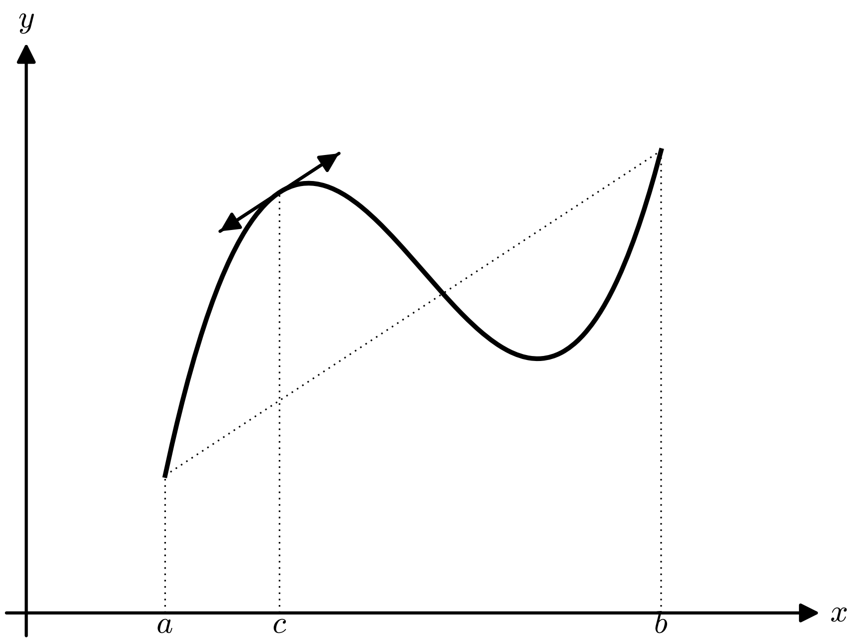
3.6.6 Théorème de Rolle et Théorème des Accroissements finis

Théorème 3.6.3 (Théorème de Rolle) *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ non trivial et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a)=f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.*



Théorème 3.6.4 (Théorème des accroissements finis) *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ non trivial et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



Corollaire 3.6.5 (Inégalité des accroissements finis) *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ non trivial et dérivable sur $]a, b[$. S'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall x \in]a, b[, \quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$$

alors

$$m.(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M.(b-a)$$

3.7 Comparaison locale de fonctions

Dans cette section, nous mettons en place des outils de comparaison locale pour les fonctions réelles.

Ainsi, dans toute la suite, I désigne un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est un élément de I ou une borne de I, appartenant à I ou non et f et g sont deux fonctions réelles définies sur I (et donc en particulier au voisinage de a).

3.7.1 Domination

Définition 3.7.1 *On dira que f est dominée par g au voisinage de a s'il existe un voisinage $V(a)$ et une constante $k > 0$ telle que*

$$\forall x \in V(a) \cap I, \qquad |f(x)| \leqslant k.|g(x)|$$

On note alors

$$f \underset{a}{=} O(g)$$

Ainsi, d'après la définition ci-dessus, g domine f au voisinage de a si et seulement si le quotient $\frac{f}{g}$ est borné au voisinage de a. Dans ce cas, il est alors possible de comparer les comportement respectifs des quantités $f(x)$ et $g(x)$ quand x tend vers a. En particulier :

- Si $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a, d'après le théorème des gendarmes, on a également $\lim_{x \to a} f(x) = 0$. D'autre part, $f(x)$ tend alors vers 0 *au moins aussi vite que g.*
- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a, alors $\lim_{x \to +\infty} |g(x)| = +\infty$. Là encore, la divergence de $g(x)$ vers l'infini se fait au moins aussi vite que celle de $f(x)$.

Exemples :
- Montrer que $x^3 \underset{0}{=} O(x^2)$.
- Montrer que $x^3 \sin(x) \underset{+\infty}{=} O(x^3)$.
- Montrer que $x^2 \underset{0}{=} O(x^2 + x^3)$. A-t-on $x^3 \underset{0}{=} O(x^2 + x^3)$?

3.7.2 Négligeabilité

Définition 3.7.2 *On dira que f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulement s'il existe une fonction ε et un voisinage $V(a)$ tels que*

$$\forall x \in V(a) \cap I, \qquad f(x) = \varepsilon(x).g(x)$$

avec $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

On note alors

$$f \underset{a}{=} o(g)$$

Notons en particulier que si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a), alors

$$f \underset{a}{=} o(g) \iff \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Là encore, il est alors possible de comparer le comportement des fonctions f et g au voisinage de a. Notons tout d'abord que si f est négligeable devant g en a, alors f et dominée par g en a. Ainsi, si g tend vers 0 en a, il en va de même pour f. Mais dans ce cas, le quotient $\frac{f}{g}$ tendant vers 0, il est clair que f tend vers 0 significativement plus vite que g.

Exemples

- Montrer que $x^3 \underset{0}{=} o(x)$.
- Montrer que $x \underset{+\infty}{=} o(x^3)$.
- On a $f \underset{a}{=} o(1)$ si et seulement si $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Proposition 3.7.3 *Soient f_1, f_2, g_1, g_2 et h des fonctions définies sur un même intervalle I et a un élément ou une borne de I (finie ou non). Alors :*

- *Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $g_1 \underset{a}{=} o(h)$, alors $f_1 \underset{a}{=} o(h)$.*
- *Si $f_1 \underset{a}{=} o(h)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(h)$, alors $(f_1 + f_2) \underset{a}{=} o(h)$.*
- *Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_1 \underset{a}{=} o(\lambda g_1)$.*
- *Si $f_1 \underset{a}{=} o(g_1)$ et $f_2 \underset{a}{=} o(g_2)$, alors $f_1.f_2 \underset{a}{=} o(g_1.g_2)$.*

Exercices :

1. Démontrer ces quatre propriétés à l'aide de la définition.
2. Interpréter les différents résultats sur les croissances comparées en termes de négligeabilité.

3.7.3 Équivalence

Définition 3.7.4 *Les fonctions f sont dites équivalentes au voisinage de a s'il existe une fonction ε et un voisinage $V(a)$ tel que*

$$\forall x \in V(a) \cap I, \qquad f(x) = (1+\varepsilon(x)).g(x) = g(x) + \varepsilon(x).g(x)$$

On note alors

$$f \underset{a}{\sim} g$$

Notons que si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors

$$f \underset{a}{\sim} g \iff \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

C'est cette dernière définition que l'on utilise en pratique.

Exemple :

1. Montrer que $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$.
2. Montrer que $x^2 + x \underset{0}{\sim} x$.
3. Montrer que $1 + \frac{1}{x} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$.

Proposition 3.7.5 *Soient f, g et h trois fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

1. *Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $g \underset{a}{\sim} f$.*
2. *Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$, alors $f \underset{a}{\sim} h$.*
3. *Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $f_1.f_2 \underset{a}{\sim} g_1.f_2$.*
4. *Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $\frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}$ (sous réserve d'existence des quotients).*
5. *Deux fonctions équivalentes en a ont la même limite en a si cette limite existe.*
6. *Si $\lim af = \ell \neq 0$, alors $f \underset{a}{\sim} \ell$.*
7. *Si $f \underset{a}{=} o(g)$, alors $f + g \underset{a}{\sim} g$.*

Proposition 3.7.6 (Équivalents usuels) *Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$, alors*

$$f(x) - f(a) \underset{a}{\sim} f'(a)(x-a)$$

On en déduit les équivalents usuels suivants :

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad \frac{1}{1-x} - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$$

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x \qquad \tan(x) \underset{0}{\sim} x \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$$

3.8 Développements limités

3.8.1 Définitions

Les développement limités (développement limité) donnent une méthode rigoureuse permettant d'approcher *localement* les fonctions réelles par des polynômes.

Définition 3.8.1 *Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en 0 (noté $\d{e}veloppementlimit_n(0)$) s'il existe un polynôme*

$$P_f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

de degré n tel que

$$f(x) = P_f(x) + o(x^n) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + o(x^n)$$

Le polynôme $P_f(x)$ est appelé la partie principale ou régulière *du développement limité d'ordre n de f en 0 (ou* le *développement limité) d'ordre n de f en 0 et le terme $o(x^n)$ est* le reste *ou l'erreur qui doit être négligeable devant la partie principale $P_f(x)$.*

Exemples :

- Si f est continue en 0, alors $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$. Donc

$$f(x) = f(0) + o(1)$$

La fonction f admet donc un développement limité d'ordre 0 en 0 dont la partie régulière est le polynôme constant

$$P_f(x) = f(0)$$

et le reste est négligeable devant 1 ($= x^0$).

- Si f est dérivable en 0, alors

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

Autrement dit, il existe une fonction ε telle que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) + \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$. Mais alors

$$f(x) = f(0) + f'(0).x + x\varepsilon(x) = f(0) + f'(0).x + o(x)$$

La fonction f admet donc un développement limité à l'ordre 1 en 0 dont la partie principale est le polynôme de degré 1

$$P_f(x) = f(0) + f'(0).x$$

et le reste est négligeable devant x.

- Si $f(x) = 1 + x - x^2 + x^2 \sin(x)$, puisque $\lim\limits_{x \to 0} \sin(x) = 0$, on a

$$x^2 \sin(x) \underset{0}{=} o(x^2)$$

Donc

$$f(x) = 1 + x - x^2 + o(x^2)$$

et f admet un développement limité d'ordre 2 en 0 dont la partie principale est

$$P_f(x) = 1 + x - x^2$$

et dont le reste est négligeable devant x^2.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$1 + x + x^2 + \dots x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$

Donc

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$

Puisque

$$\frac{x^{n+1}}{1 - x} = x^n . \frac{x}{1 - x} \underset{0}{=} o(x^n)$$

la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1 - x}$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie principale est

$$P_f(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

3.8.2 Propriétés des développements limités

Unicité

Proposition 3.8.2 *Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0, alors celui-ci est unique*

Autrement dit, une fonction f ne peut avoir deux développements limités du même ordre avec des parties principales différentes.

ATTENTION : la réciproque est fausse : deux fonctions différentes peuvent avoir le même développement limité à un ordre donné (chercher des exemples dans les exemples ci-dessus).

Parité

Proposition 3.8.3 *Soit f une fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0.*
- *Si f est paire, la partie principale de f ne contient que des puissances paires de x.*
- *Si f est impaire, la partie principale de f ne contient que des puissances impaires de x.*

3.8.3 Formule de Taylor-Young

Brook Taylor (Anglais, 1685 - 1731) a trouvé au début du XVIIème siècle la formule générale donnant la partie principale d'un développement limité à l'ordre n en 0 d'une fonction f. Comme à l'ordre 1, cette formule fait intervenir les dérivées successives de la fonction f en 0. Il faut donc en particulier que ces dérivées existent. Il faut donc que f soit de classe $\mathcal{C}^n$.

Théorème 3.8.4 *Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0 alors f admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \\ &= f(0) + f'(0).x + \frac{f''(0)}{2}.x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \end{aligned}$$

Cette formule a en particulier permis de déterminer les développements limités des fonctions usuelles en 0 :

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ a^x &= 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + o(x^n) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots+(\alpha-n+1)x^n}{n!} + o(x^n) \\ \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \cdots + x^n + o(x^n) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \end{aligned}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \quad \text{ATTENTION : ordre } 2n+2$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n\, x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{ATTENTION : ordre } 2n+1$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o(x^8)$$

3.8.4 Développements limités et opérations

La notion de développement limité est compatible avec les différentes opérations définies sur l'ensemble des fonctions.

Addition et multiplication

La somme et le produit de deux polynômes étant encore des polynômes, il est possible de définir le développement limité de la somme et du produit de deux fonctions admettant des développements limités.

Proposition 3.8.5 *Soient f et g deux fonction admettant un développement limité d'ordre n en 0 donné par*

$$f(x) = P_f(x) + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) = P_g(x) + o(x^n)$$

Alors

- *$f + g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie régulière est $P_f + P_g$.*
- *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda.f$ admet un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie régulière est $\lambda.P_f$.*

Exemple : soit $\varphi : x \mapsto 3\sin(x) + 2\cos(x)$. Les fonctions sin et cos vérifient :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

Donc

$$\varphi(x) = 2 + 3x - x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

Proposition 3.8.6 *Soient f et g deux fonctions admettant un développement limité d'ordre n en 0 de partie régulière P_f et P_g respectivement. Le produit $f.g$ admet également un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie régulière est obtenue en tronquant à l'ordre n le produit $P_f \times P_g$.*

Exemple : déterminer le développement limité en 0 du produit $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$.

Composée et quotient

Il est également possible de déterminer le développement limité d'un quotient et/ou d'une composée de fonctions admettant des développements limités. Cependant, l'opération est plus délicate que pour la somme et le produit et certaines hypothèses doivent être vérifiées par les fonctions impliquées.

Ainsi, si f est une fonction réelle admettant un développement limité d'ordre n en 0 sous la forme

$$f(x) = P_f(x) + o(x^n)$$

Alors pour toute fonction u telle que $\lim_{x \to 0} u(x) = 0$, on a

$$f \circ u(x) = P_f(u(x)) + o(u(x)^n)$$

Si u admet à son tour un développement limité à l'ordre n en 0 de la forme

$$u(x) = P_u(x) + o(x^n)$$

la fonction $f \circ u$ admet également un développement limité d'ordre n en 0, dont la partie principale est obtenue en tronquant le polynôme $P_f(P_u(x))$ à l'ordre n.

Exemple : déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f(x) = e^{\sin(x)}$.

Cette propriété permet également de déterminer le développement limité d'un quotient de fonctions admettant des développement limité. Précisément, d'après la propriété précédente, si u est une fonction vérifiant $\lim_{x \to 0} u(x) = 0$, alors

$$\frac{1}{1 + u(x)} = u(x) - u(x)^2 + \ldots + (-1)^n u(x)^n + o(u(x)^n)$$

Ainsi, si g est une fonction admettant une limite finie $\ell \neq 0$ en 0, on peut écrire

$$g(x) = \ell + \varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. On a alors

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\ell + \varepsilon(x)} = \frac{1}{\ell} . \frac{1}{1 + u(x)}$$

avec $u(x) = \dfrac{\varepsilon(x)}{\ell} \to 0$ quand $x \to 0$.

Donc

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\ell}(1 - u(x) + u^2(x) + \ldots + (-1)^n u(x)^n + o(u(x)^n))$$

Si u (et g) admet un développement limité $P_u(x) + o(x^n)$, il est possible d'approcher le quotient $\frac{1}{g}$ en tronquant à l'ordre n le polynôme

$$P(x) = \frac{1}{\ell}(1 - P_u(x) + (P_u(x))^2 + \ldots + (-1)^n (P_u(x))^n)$$

Exemple : déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{2\cos(x)}$.

Note : si g tend vers 0 en 0, le terme constant de son développement limité est nul. En factorisant g par la bonne puissance de x, on peut revenir au cas précédent. Il est alors possible que la partie principale du développement limité contienne des puissances négatives de x.

Exemple : déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{3\ln(1+x)}$.

3.8.5 Développement limité hors de 0

Développement limité en un point $x_0 \in \mathbb{R}^*$

Il est possible de généraliser la notion de développement limité en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$:

Définition 3.8.7 *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie au voisinage de x_0. La fonction f admet un développement limité d'ordre n en a si et seulement s'il existe un polynôme $P_{f,x_0}(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que*

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{f,x_0}(x - x_0) + o((x - x_0)^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \end{aligned}$$

Notes :

- En notant $x = x_0 + h$, on ramène le problème en 0. Précisément, la fonction f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 si et seulement si la fonction $g : h \mapsto f(x_0 + h)$ admet un développement limité à l'ordre n en 0. On a alors

$$g(h) = f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} a_k . h^k + o(h^n)$$

- On peut alors généraliser la formule de Taylor vue en 0 à n'importe quel point x_0 : si f est de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de x_0, alors

$$\begin{aligned} & f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) \\ \Longleftrightarrow \quad & f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + o(h^n) \end{aligned}$$

Exemple : pour déterminer le développement limité de la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ au voisinage de 1, on pose $x = 1 + h$. On a donc $x \to 1$ quand $h \to 0$ et

$$\begin{aligned} f(x) = f(1-h) = \ln(1-h) &= -h + \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} + o(h^3) \\ &= -(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3} + o((x-1)^3) \end{aligned}$$

Développements asymptotiques

Il est également possible d'étendre la notion de développement limité en l'infini. Formellement, une fonction f admet un développement limité en $\pm\infty$ si la fonction $g : x \mapsto \left(\frac{1}{x}\right)$ admet un développement limité en 0. En pratique, le changement de variable $t = \frac{1}{x}$ peut faire apparaître dans le résultat final des puissances négatives de x.

Exemple : déterminer le comportement asymptotique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$.

3.8.6 Applications

Calcul de limites et équivalents

Les développements limités permettent de déterminer des équivalents sous la forme d'une puissance de x. Cela permet en particulier d'estimer et de comparer des vitesses de convergence ou de divergence.

Précisément, on peut montrer que si f admet un développement limité en 0 de partie principale $P_f(x)$, alors f est équivalente en 0 au monôme de plus bas degré de $P_f(x)$.

Exemples :

- Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$.
- Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$.

Position relatives courbes - tangentes - asymptotes

Le développement limité à l'ordre 1 d'une fonction f étant une approximation affine de la fonction étudiée, il renseigne en particulier sur les tangentes à la courbe de f. Précisément, la partie principale du développement limité d'ordre 1 en 0

$$f(x) = f(0) + f'(0).x + o(x)$$

donne l'équation de la tangente en 0. En poussant le développement limité à l'ordre 2, on peut accéder au signe de la différence

$$f(x) - (f(0) + f'(0).x)$$

qui permet d'étudier la position relative du graphe de f et de sa tangente en 0.

Exemple : étudier la fonction arctan en 0.

En l'infini, la notion de tangente est remplacée par la notion de droite asymptote. Là encore le développement asymptotique permet d'accéder à l'équation de la droite asymptote éventuelle et aux positions relatives de la courbe et de la droite.

Enfin, de façon plus générale, les développements asymptotiques permettent de préciser les branches infinies d'une fonctions donnée.

Exemple : étudier le comportement asymptotique des fonctions

$$f\,:\,x \mapsto \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} \qquad \text{et} \qquad g\,:\,x \mapsto \sqrt{\frac{x^4+1}{x-1}}$$

Chapitre 4

Suites numériques

Introduction

Une suite, une suite de nombres, est la donnée d'une série de nombres dans un ordre précis. En les choisissant les uns après les autres, on peut construire n'importe quelle suite de nombres. Une suite construite au hasard est une suite aléatoire. Dans ce chapitre, on va étudier des suites de nombre construites sur la logique. On va commencer par voir quelles sont les différentes façons de définir une suite de façon logique, puis on étudiera des outils permettant de déterminer le comportement d'une suite donnée ; c'est-à-dire la façon dont évoluent les différents termes de la suite quand on les parcours un à un ou encore ses variations et/ou sa limite.

4.1 Généralités

4.1.1 Définition d'une suite

Formellement, une suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une fonction de l'ensemble des entiers ($\mathbb{N}$) dans l'ensemble des réels ($\mathbb{R}$) :

$$\begin{array}{rcccl} u & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & n & \longmapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

On a l'habitude de mettre n en indice plutôt qu'entre parenthèses. On dit que $\mathbb{N}$ est l'ensemble des indices. Il peut arriver qu'une suite commence à $n = 1$ (si par exemple u_0 ne peut exister). L'ensemble des indices est alors $\mathbb{N}^*$. De façon générale, on peut faire commencer une suite de n'importe quel entier.

Si l'ensemble des indices est $\mathbb{N}$, u_0 est le premier terme de la suite, u_1 le deuxième, etc... On notera u_n le terme général, ou terme de rang n, et l'on notera $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des termes de la suite.

Il y a deux façons de construire une suite de façon logique :

1. En définissant chaque terme en fonction de sa place dans la suite ; c'est-à-dire en donnant explicitement u_n en fonction de n. C'est la forme explicite. Par exemple

   - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ :\ u_n = n^2 + 1.$
   - $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\ :\ v_n = e^{\left(\frac{1}{n}\right)}.$
   - $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\ :\ w_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$
   - $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\ :\ z_n = \frac{n!}{n^n}.$

2. En donnant une règle logique pour passer d'un terme au suivant ; c'est à dire en donnant u_n en fonction du ou des termes précédents $(u_{n-1}, u_{n-2}, \ldots)$. C'est la forme récurrente. La relation liant u_n aux termes précédents est la relation de récurrence. Pour définir complètement une suite de façon récurrente, il faut également donner le point de départ, autrement dit le premier terme u_0 (ou u_1 si la suite commence à $n = 1$). Par exemple

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ :\ \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + 2, & \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\ :\ \begin{cases} v_0 = 0, v_1 = 1 \\ v_n = v_{n-1} + v_{n-2}, & \forall n \geqslant 2 \end{cases}$$

   Note : comme on le voit sur le second exemple, si l'on définit v_n en fonction des deux termes précédents, il faut donner les deux premières valeurs. De façon générale, il faut suffisamment de premiers termes pour pouvoir amorcer la suite.

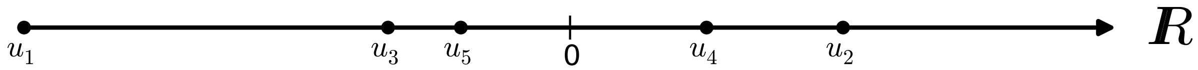
Notes : la forme explicite est de loin la plus pratique puisque pour l'étudier, on peut se baser sur les outils d'analyse des fonctions réelles. Cependant, la forme récurrente est souvent la plus adaptée pour modéliser des systèmes dynamiques (l'état d'un système à un instant donné dépend de ses états aux instants précédents).

4.1.2 Représentation graphique

Il existe différentes façons de représenter une suite numérique donnée dans le plan.

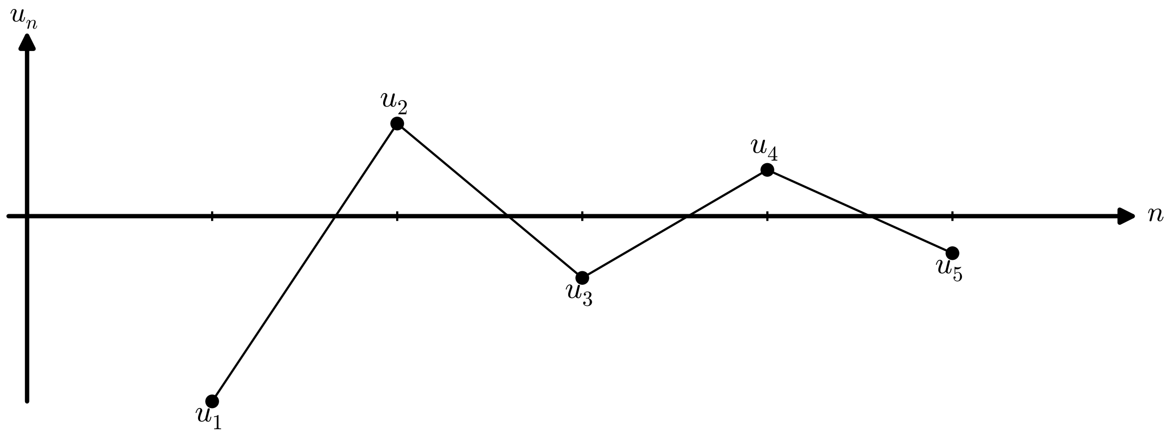
Pour une suite réelle , il est possible de placer les différents termes de la suite sur la droite réelle :

$$(u_n)\ :\ u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$



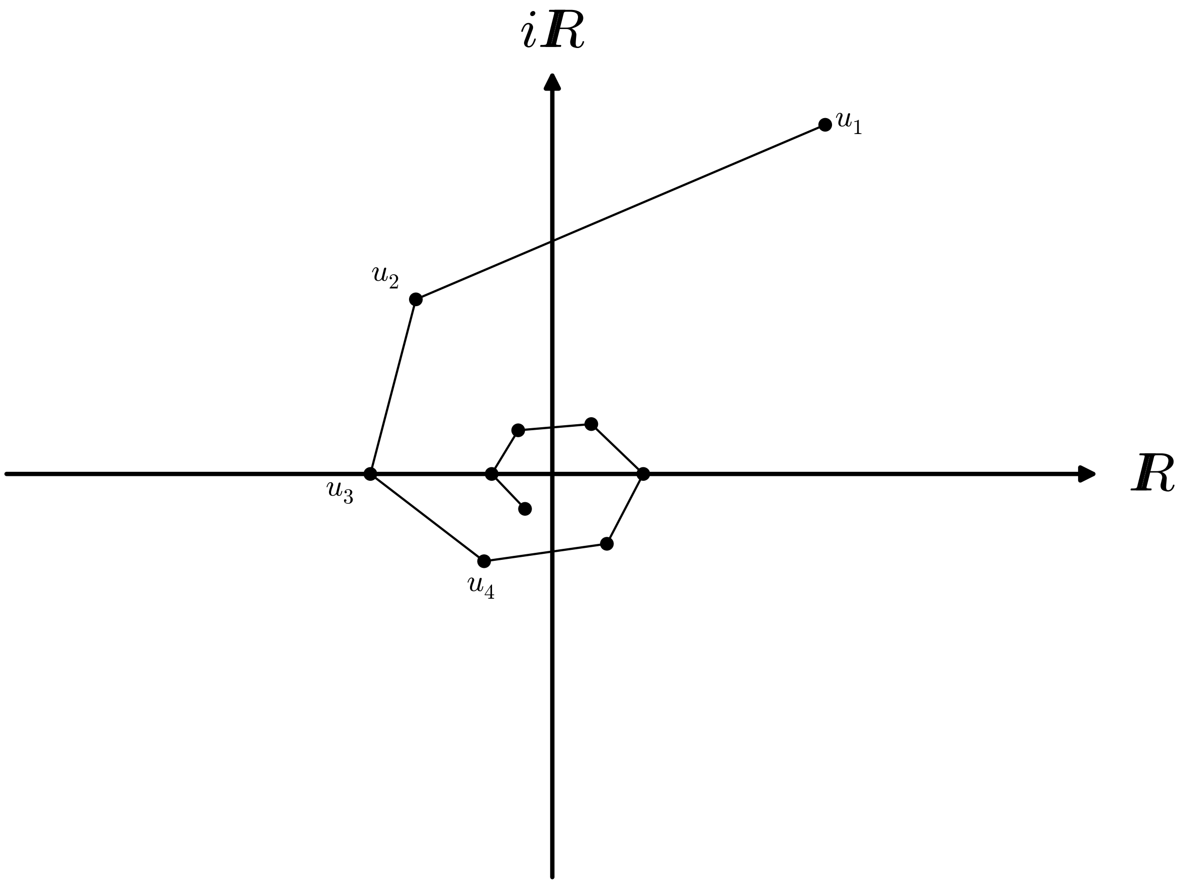
Il est également possible de représenter une suite (u_n) réelle par les points de coordonnées (n, u_n) dans un repère orthonormé.

$$(u_n) \, : \, u_n = \frac{(-1)^n}{n}$$



Pour une suite complexe , il est possible de placer les différents termes de la suite dans le plan complexe :

$$(z_n) \, : \, z_n = \frac{1}{n} e^{\frac{in\pi}{3}}$$



4.1.3 Convergence d'une suite

Soient (u_n) une suite de nombres réels et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) converge vers ℓ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ /\ n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Autrement dit, la suite (u_n) converge vers le réel ℓ si l'on peut toujours trouver un rang à partir duquel les termes u_n sont tous aussi proches que l'on veut de ℓ.

On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ ou $\lim u_n = \ell$ ou $u_n \to \ell$ quand $n \to +\infty$.

Si (u_n) admet une limite finie, on dit qu'elle est convergente. Dans tous les autres cas, elle est dite divergente. L'objectif de ce cours est essentiellement d'établir, à partir de la définition ci-dessus, des critères et des méthodes permettant de déterminer la nature d'une suite donnée (convergente ou divergente).

Exemples :

- La suite (u_n) : $u_n = \frac{1}{n}$, $\quad n \in \mathbb{N}^*$ converge vers 0.

- La suite (u_n) : $u_n = n^2$ diverge (elle tend vers $+\infty$).
- La suite (u_n) : $u_n = (-1)^n$ diverge (elle n'admet pas de limite).

4.2 Propriétés des suites réelles

4.2.1 Suites bornées

Une suite (u_n) sera dit

- *majorée* s'il existe un nombre M (indépendant de n) tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_n \leqslant M.$$
- *minorée* s'il existe un nombre m (indépendant de n) tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ u_n \geqslant M.$$
- *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée ; autrement dit s'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \ m \leqslant u_n \leqslant M.$$
Pour des raisons pratiques, on utilisera plutôt la définition suivante :
$$(u_n) \text{ est bornée } \iff \exists A > 0 \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leqslant A.$$

Exemples :

- La suite (u_n) : $u_n = n$ est minorée mais non majorée.
- La suite (v_n) : $v_n = -e^n$ est majorée mais non minorée.
- Les suites (w_n) : $w_n = \dfrac{1}{n}$, (x_n) : $x_n = (-1)^n$ et (y_n) : $y_n = \sin(n^2 - n + 1)$ sont bornées.
- La suite (z_n) : $z_n = n(-1)^n$ n'est ni majorée ni minorée.

4.2.2 Suites monotones

Une suite (u_n) est dite

1. croissante (resp. strictement croissante) si et seulement si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \geqslant u_n \qquad (\text{resp. } u_{n+1} > u_n)$$
2. décroissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} \leqslant u_n \qquad (\text{resp. } u_{n+1} < u_n)$$
3. monotone si elle est soit croissante, soit décroissante.

4. stationnaire s'il existe un rang à partir duquel $u_{n+1} = u_n$.

L'étude de la monotonie d'une suite passe naturellement par l'étude du signe de la différence $u_{n+1} - u_n$. Dans le cas des suites à termes strictement positifs, il sera également possible de passer par l'étude du quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (que l'on comparera alors à 1).

Attention : toutes les suites ne sont pas monotones. Certaines sont ni croissantes, ni décroissantes.

4.2.3 Suites extraites

Soit (u_n) une suite réelle. Une suite extraite (ou sous-suite) de (u_n) est une suite construite à partir de certains éléments de (u_n). On peut par exemple ne prendre que les termes d'indices pairs, ou les termes dont l'indice est un nombre premier. Cependant, l'extraction ne peut pas se faire n'importe comment. Il faut en particulier respecter l'ordre donné par la suite (u_n). Une fois que l'on a extrait un terme, le suivant doit être pris parmi les termes suivants. On ne peut pas revenir en arrière. Formellement, une suite extraite est la donnée d'une fonction

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & & n & \longmapsto & \varphi(n) \end{array}$$

qui doit être strictement croissante. La suite extraite correspondant est alors la suite

$$(v_n) \ : \ v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Ainsi, la sous-suite donnée par les termes d'indices pairs correspond à la fonction $\varphi \ : \ n \mapsto 2n$.

Exemple : soit (u_n) la suite définie par $u_n = (-1)^n$. De (u_n) on peut extraire les suites d'indices pairs et d'indices impairs :

$$(v_n) \ : \ v_n = u_{2n} = 1 \quad \text{et} \quad (w_n) \ : \ w_n = u_{2n+1} = -1$$

Remarque : ce sont toutes deux des suites constantes, alors que (u_n) ne l'est pas.

La notion de suite extraite peut être un outil efficace pour étudier une suite donnée, mais il faut être très rigoureux dans son utilisation.

Ainsi, à l'image de l'exemple précédent, certaines propriétés peuvent être vérifier par des suites extraites de (u_n) mais pas par (u_n) elle même.

4.3 Critères de convergence

Comme on l'a dit plus haut, l'étude d'une suite donnée a pour but premier de déterminer sa nature et la valeur de sa limite éventuelle.

La théorie des suites numériques consiste donc essentiellement à établir des critères assurant (ou non) la convergence d'une suite donnée et d'obtenir un maximum d'informations sur la valeur de la limite éventuelle.

Ces critères sont de plusieurs types. On verra en particulier que pour les suites explicites ($u_n = f(n)$), il est possible d'adapter et d'exploiter les outils que l'on connaît pour l'étude des fonctions réelles.

On verra également certains critères intrinsèques, essentiellement basés sur les variations d'une suite donnée.

Enfin, on verra qu'il existe des critères de comparaison, permettant de comparer une suite donnée à un catalogue de suites dont on connaît le comportement. On verra également qu'à l'aide de ce catalogue, il est possible d'établir une échelle de vitesse de convergence et que les critères de comparaison permettent de placer une suite donner sur cette échelle.

4.3.1 Suites explicites

Soit (u_n) une suite explicite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = f(n)$$

où f est une fonction réelle connue. Les outils d'analyse des fonctions réelles (équivalents, D.L., etc) permettent souvent de déterminer la nature de la suite (u_n) et la valeur de sa limite éventuelle. Ceci se fait notamment grâce au résultat suivant :

- Si la fonction f admet une limite finie ℓ en $+\infty$, alors la suite (u_n) converge vers ℓ.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$, alors (u_n) diverge vers $\pm\infty$.

En pratique, il est souvent possible de travailler directement avec la variable entière n, sans passer par la variable réelle x. Cependant, il peut arriver que la fonction f n'admette pas de limite en $+\infty$ mais que la suite (u_n) converge tout de même :

$$(u_n)\ :\ u_n = \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right)$$

Dans les cas de ce type, il est alors nécessaire d'exploiter pleinement le fait qu'une suite est à variable entière.

Exemples : déterminer la nature et la limite éventuelle des suites ci-dessous.
- $(u_n)\ :\ u_n = n^2 - 1$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- $(v_n)\ :\ v_n = e^{-n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- $(w_n)\ :\ w_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- $(x_n)\ :\ x_n = \frac{n^2+1}{n^2}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4.3.2 Opérations sur les limites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes et soient ℓ_1 et ℓ_2 leurs limites respectives. On peut montrer facilement les suites (s_n), (p_n) et (q_n) définies par

$$s_n = u_n + v_n, \quad p_n = u_n \times v_n, \quad q_n = \frac{u_n}{v_n}$$

sont également convergentes (avec quelques condition évidentes pour (q_n)). De plus, les limites de ces suites se déduisent facilement de ℓ_1 et ℓ_2 :

$$\begin{array}{rcl} \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lim_n (\lambda.u_n + \mu.v_n) & = & \lambda.\ell_1 + \mu.\ell_2 \\ \lim_n (u_n \times v_n) & = & \ell_1 \times \ell_2 \\ \text{si } \ell_2 \neq 0, \qquad \lim_n \dfrac{u_n}{v_n} & = & \dfrac{\ell_1}{\ell_2} \end{array}$$

Remarque : la suite (q_n) n'est définie qu'à partir du moment où $v_n \neq 0$. Or si $\ell_2 \neq 0$, on est sur qu'il existe un rang à partir duquel $v_n \neq 0$.

Enfin, de façon générale, on peut exploiter les limites de fonctions et les règles de composition.

Ces règles permettent de déterminer les limites de suites formées de somme, produits, quotients de suites connues ; il est cependant parfois nécessaire de travailler un peu sur les expressions que l'on souhaite étudier pour lever des indéterminations.

Attention : les résultats énoncés plus haut concernent des suites (u_n) et (v_n) *convergentes*. Comme pour les fonctions, il est également possible d'établir des résultats quand ces suites divergent vers $\pm\infty$, mais on voit alors apparaître certaines formes indéterminées. On peut résumer ces résultats supplémentaires par les formules ci dessus :

$$\frac{\ell}{0} = \pm\infty \ (\ell \neq 0), \quad \pm\infty + \ell = \pm\infty, \quad \infty \times \ell = \text{signe}(\ell) \times \infty, ...$$

D'autre part, les formes indéterminées sont :

$$\infty - \infty, \ \ \frac{0}{0}, \ \ \frac{\infty}{\infty}, \ \ 0 \times \infty, \ \ 1^\infty, ...$$

Les techniques de calculs permettant de lever ces indéterminations sont alors les mêmes que pour l'étude des fonctions réelle, c'est-à-dire essentiellement les résultats de croissances comparées et la mise en facteur du terme “le plus fort”.

Exemples :

- Limite de $\dfrac{n^2+1}{n^2-1}$.
- Limite de $n \sin \frac{1}{n}$.
- Limite de $\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{n}$.

4.3.3 Comparaison

Relations d'ordres et limites

Les résultats ci-dessous formalisent des propriétés importantes des suites numériques, issues des relations d'ordre ($\leqslant$, $<$, $\geqslant$, $>$) que l'on peut établir entre plusieurs suites. Ainsi, soient (u_n), (v_n), (w_n) trois suites et soient ℓ, ℓ'.

1. Si (u_n) converge vers ℓ et s'il existe deux réels a et b tels que $a \leqslant u_n \leqslant b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou à partir d'un certain rang), alors $a \leqslant \ell \leqslant b$.

   Note : même si on a $a < u_n < b$, on ne peut être plus précis que $a \leqslant \ell \leqslant b$.

   Construire une suite (u_n) telle que $0 < u_n < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et telle que $\lim u_n = 1$.

2. Si $u_n \to \ell$, $v_n \to \ell'$ et $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

   Note : là encore, même si $u_n < v_n$, on ne peut avoir mieux que l'inégalité large pour les limites.

3. *Théorème des gendarmes.* Si (u_n) et (w_n) convergent vers ℓ et $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors (v_n) converge également vers ℓ.

   Note : une application courante de ce théorème est la suivante : si (u_n) et (a_n) sont deux suites telles que $a_n \to 0$ et $|u_n| \leqslant a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \to 0$.

Comparaison locale

Comme pour les fonctions d'une variable, il est possible de comparer les suites numériques qui sont à termes positif. Cependant, comme pour les limites, les comparaisons se font ici pour $n \to +\infty$. Ainsi, soient (u_n) et (v_n) deux suites positives.

- Elles sont dites équivalentes (en $+\infty$) si

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

  et on note $u_n \underset{\infty}{\sim} v_n$.

- On dit que (v_n) domine (u_n) si
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$
et on note $u_n = o_\infty(v_n)$.

Exemples

1. Les suites (u_n) et (v_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n^2+1}$$
sont équivalentes.
2. Les suites (u_n) et (v_n) définies par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = e^{-n}$$
vérifient $u_n = o(v_n)$.

À l'aide de ces critères de comparaison locale, on peut traiter de nombreuses suites explicites, notamment les suites définies par des fractions rationnelles.

On peut ainsi montrer que deux suites équivalentes ont le même comportement : si l'une converge, l'autre aussi et elles ont même limite.

De même, on peut montrer que si une suite (v_n) tend vers 0 alors toute suite positive dominée par (v_n) tend également vers 0.

4.3.4 Suites monotones

Suites monotones bornées

À l'aide de la définition de la convergence, on peut montrer les propriétés suivantes :

1. Toute suite croissante et majorée est convergente.
2. Toute suite décroissante et minorée est convergente.
3. Toute suite croissante, non majorée tend vers $+\infty$.
4. Toute suite décroissante, non minorée tend vers $-\infty$.

Attention : bien que ces résultats permettent souvent de déterminer la nature d'une suite donnée, ils ne permettent pas, en général, de déterminer la valeur de la limite. En effet, si l'on parvient à déterminer un majorant M pour tous les termes d'une suite (u_n) croissante, le seul résultat que l'on obtient concernant la valeur de la limite ℓ de (u_n) est $\ell \leqslant M$.

Suites adjacentes

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dite adjacentes si

- (u_n) est croissante,
- (v_n) est décroissante,
- la différence $u_n - v_n$ tend vers 0.

On peut alors énoncer le théorème suivant : si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, alors elles convergent toutes les deux et ont la même limite.

4.3.5 Suites extraites et convergence

De façon générale, les suites extraites d'une suite donnée héritent du comportement de la suite globale. Précisément, si (u_n) est une suite convergente, alors toute suite extraite de (u_n) est convergente et a la même limite de (u_n).

Ce résultat permet surtout de déterminer la nature divergente d'une suite. En effet, si l'on peut extraire d'une même suite (u_n) deux suites au comportement différent, alors (u_n) diverge.

Exemple : $(u_n)\ :\ u_n = (-1)^n$.

Attention : il est rarement possible de déterminer la convergence d'une suite donnée à partir de l'étude de certaines suites extraites. Ainsi, si $(u_n)\ :\ u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$. Les suites (u_{4n}) et (u_{4n+2}) convergent vers 0 (elles sont même constantes), mais la suite (u_n) diverge.

On a cependant le résultat suivant : si l'on peut extraire de (u_n) un ensemble de suites telles que

- toutes ces suites convergent vers la même limite ℓ,
- l'ensemble de ces suites recouvrent l'ensemble des termes de la suite (u_n).

Alors la suite (u_n) converge vers ℓ.

4.4 Suites récurrentes

4.4.1 Définitions

Intuitivement, une suite récurrente est une suite que l'on construit terme à terme, chaque terme étant calculé à l'aide des précédents. Pour construire une telle suite, il faut donc

1. une série de valeurs de départ (suffisamment pour initialiser la suite) appelées conditions initiales,

2. une relation permettant de calculer chaque terme en fonction des précédents, appelée relation de récurrence de la suite.

Formellement, on a donc

$$(u_n)\ :\ (u_n)\ :\ \begin{cases} u_0, u_1, \dots \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n, u_{n-1}, \dots) \end{cases}$$

Par ailleurs, *l'ordre* d'une suite récurrente donnée est le nombre de termes nécessaires au calcul d'un terme supplémentaire. Cet ordre correspond également au nombre de conditions initiales nécessaire à l'initialisation de la suite.

En pratique, les suites récurrentes offrent un outil idéal de modélisation de certains dispositifs dynamiques (i.e. évoluant dans le temps). En effet, l'état d'un tel dispositif à un instant donné (caractérisé par une ou plusieurs variables) dépend en partie de l'état de ce système (et donc de la valeurs des variables étudiées) aux instants précédents. L'étude d'une telle suite permet alors de connaître l'état du système étudié au bout d'un grand nombre de modifications.

Si l'on souhaite étudier une suite récurrente (i.e. trouver ses variations, sa limite éventuelle,...) l'idéal est de trouver une forme explicite. Mais hormis pour certains types de suites récurrentes, il n'est en général pas possible d'en obtenir une forme explicite. On verra alors comment les outils que l'on vient de voir (et d'autres, basés sur l'étude de la fonction f donnant la relation de récurrence) permettent de construire des protocoles d'étude efficaces.

4.4.2 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence est une méthode de raisonnement permettant d'établir des propriétés portant sur des entiers. Précisément, si $P(n)$ est une propriété que l'on souhaite démontrer pour tout $n \in \mathbb{N}$, on procède en deux étapes :

1. *l'initialisation*, pour laquelle on doit trouver un entier explicite n_0 pour lequel $P(n_0)$ est vraie,
2. *l'hérédité*, pour laquelle on suppose qu'il existe **un** entier n pour lequel $P(n)$ est vraie et on montre qu'alors $P(n+1)$ est vraie également.

Exemple : montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad -1 \leqslant \frac{1}{(-2)^n} \leqslant 1.$$

Par nature, les suites récurrent se prêtent parfaitement au raisonnement par récurrence. En effet, si l'on connaît les propriétés des premiers termes (l'initialisation étant en général donnée par les conditions initiales), on peut espérer démontrer l'hérédité aux termes suivants à l'aide de la relation de récurrence.

Exemple : soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ u_{n+1} & = & 1 + \dfrac{1}{2u_n} \end{cases}$$

Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n > 1$$

4.4.3 Les suites arithmétiques et géométriques

Les suites arithmétiques et géométriques sont les suites récurrentes les plus simples que l'on puisse imaginer. Elles font partie des suites récurrentes pour lesquelles on sait trouver une forme explicite. Ainsi,

- Une suite (a_n) est dite *arithmétique* si elle vérifie une relation de récurrence de la forme

  $$a_{n+1} = a_n + r$$

  où r est un réel fixé. Autrement dit, une suite arithmétique est une suite que l'on construit terme à terme en ajoutant à chaque étape une même quantité r, appelée *la raison.*

  Exercice :

  1. Montrer par récurrence qu'une suite arithmétique (a_n) de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme $a_0 \in \mathbb{R}$ vérifie :

     $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = a_0 + n.r$$

  2. En déduire la nature et la limite de (a_n) en fonction de r.

- Une suite (g_n) est dit *géométrique* si elle vérifie une relation de la forme

  $$g_{n+1} = q.g_n$$

  où g est un réel fixé, encore appelé la raison.

  Exercice :

  1. Montrer par récurrence si (g_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme g_0, elle vérifie

     $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad g_n = g_0.q^n$$

  2. En déduire la nature et la limite éventuelle de (g_n) en fonction de q.

4.4.4 Suites récurrentes linéaires à coefficients constants

Les suites récurrentes linéaires à coefficients constants sont les suites récurrentes (u_n) dont la relation de récurrence est linéaire en les (u_i).

Elles font partie des rares suites récurrentes pour lesquelles on sait (au moins en théorie) en obtenir une forme explicite.

Suites d'ordre 1 Une suite récurrente linéaire d'ordre 1 est une suite (u_n) vérifiant

$$u_{n+1} = au_n + b,$$

pour $a, b \in \mathbb{R}$ donnés. On remarque que les suites arithmétiques et géométriques ne sont qu'un cas particulier de ce type de suites (pour $a = 1$, on retrouve les suites arithmétiques, et pour $b = 0$, on retrouve les suites géométriques). Ces suites sont parfois appelées suites *arithmético-géométriques.*

Si (u_n) n'est pas une suite arithmétique, il est possible d'associer à (u_n) une suite (v_n) de la forme $(v_n) = (u_n + \alpha)$ telle que (v_n) soit une suite géométrique de raison a. En donnant une forme explicite pour la suite (v_n), on obtient rapidement une forme explicite pour la suite (u_n).

Exemple : soit (u_n) une suite vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n + 1.$$

1. Montrer que la suite (v_n) : $v_n = u_n + \frac{1}{2}$ est une suite géométrique de raison 3.
2. Donner la forme explicite de (v_n) et en déduire la forme explicite de (u_n).

Suites d'ordre 2 Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est une suite (v_n) vérifiant

$$v_{n+2} = \alpha v_{n+1} + \beta v_n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

ou plus généralement

$$av_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Remarque : pour définir complètement une telle suite, il faut donner également les deux premiers termes v_0 et v_1.

Exemple : la suite de Fibonacci est par exemple une suite récurrente d'ordre 2 dont les coefficients sont $a = b = 1$ et les premiers termes sont $F_0 = 0$, $F_1 = 1$.

Il existe une méthode permettant d'obtenir la forme explicite d'une telle suite en fonction de a et b. On pourra noter que la démarche et les conclusions sont très proches de ce que l'on fait et obtient lors de la résolution d'une équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants. Ainsi, soit (u_n) vérifiant $au_{n+2} + bv_{n+1} + cv_n$. On appelle *l'équation caractéristique* de (v_n) l'équation

$$(E)\ :\ aX^2 + bX + c = 0$$

En notant alors $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de (E), on a

- Si $\Delta > 0$, alors (E) possède deux racines réelles α_1 et α_2 et la forme explicite de (v_n) est
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = A.\alpha_1^n + B.\alpha_2^n$$
où A et B sont des constantes fixe, déterminées par les conditions initiales (i.e. la donnée de v_0 et v_1).

- Si $\Delta = 0$, alors (E) possède une racine double α_0 et la forme explicite de (v_n) est
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \alpha_0^n(A + n.B).$$

- Si $\Delta < 0$, (E) possède deux racines complexes $\alpha_{1,2} = re^{\pm i\theta}$. La forme explicite de (v_n) est alors de la forme
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad v_n = A.r^n\cos(n\theta) + B.r^n\sin(n\theta).$$

Dans tous les cas, pour déterminer les coefficients A et B, on utilise les conditions initiales v_0 et v_1. Si par exemple $\Delta > 0$, on a

$$v_n = A.\alpha_1^n + B.\alpha_2^n.$$

En posant $n = 0$ puis $n = 1$, on obtient un système 2×2 dont les inconnues sont A et B :

$$\begin{cases} u_0 = A + B \\ u_1 = A.\alpha_1 + B.\alpha_2 \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve A et B.

Exemple : la suite de Fibonacci

$$(F_n)\ :\ \begin{cases} F_0 = 1,\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \end{cases}$$

L'équation caractéristique de (F_n) est

$$X^2 - X - 1 = 0$$

dont le discriminant est

$$\Delta = 1 + 4 \times 1 = 5$$

et les solution sont

$$\text{le nombre d'or } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \text{son inverse } \varphi^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

La suite de Fibonacci est donc de la forme

$$F_n = A\varphi^n + B\varphi^{-n}.$$

Pour déterminer les coefficients A et B, on utilise les conditions initiales :

$$\begin{aligned} F_0 = 0 \quad &\Rightarrow \quad A + B = 0 \\ F_1 = 1 \quad &\Rightarrow \quad A.\varphi + \frac{B}{\varphi} = 1 \end{aligned}$$

D'où

$$A = -B = \frac{\varphi}{\varphi^2 - 1}.$$

On peut en particulier vérifier que si $Q_n = F_{n+1}/F_n$, la suite (Q_n) tend vers φ. (Exercice : à faire).

4.4.5 Suites récurrentes d'ordre 1

Soit (u_n) une suite récurrente d'ordre 1 :

$$(u_n) \; : \; \begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Comme on l'a dit plus haut, l'étude de la suite (u_n) se fait via l'étude de la fonction f.

On supposera dans un premier temps que f est *croissante.*

Variations de (u_n). Voyons comment les variations de f permettent de déterminer les variations de (u_n). Puisque f est croissante, on a par définition

$$\forall a, b \qquad a \leqslant b \;\Rightarrow\; f(a) \leqslant f(b).$$

En appliquant cela à deux termes consécutifs de la suite (u_n), on a :

$$u_{n+1} \leqslant u_n \;\Rightarrow\; f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \;\Rightarrow\; u_{n+2} \leqslant u_{n+1}.$$

De même,

$$u_{n+1} \geqslant u_n \;\Rightarrow\; f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n) \;\Rightarrow\; u_{n+2} \geqslant u_{n+1}.$$

En raisonnant par récurrence, on peut alors montrer la propriété suivante :

Proposition 4.4.1 *Si f est une fonction croissante, alors toute suite récurrente (u_n) associée à f est monotone et le sens de variation de (u_n) est donné par le signe de la différence $u_1 - u_0$.*

Exercice : à faire.

ATTENTION : la croissance de f impose la *monotonie* de (u_n), mais de détermine pas le sens de variation de (u_n).

Exemple : déterminer le sens de variation des suites suivantes :

$$(u_n) \ : \left\{ \begin{array}{l} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^3 \end{array} \right. \quad ; \quad (v_n) \ : \left\{ \begin{array}{l} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = v_n^3 \end{array} \right.$$

Point fixe et intervalle stable. On appelle *point fixe* de f toute solutions x^* de l'équation $f(x) = x$ car on peut montrer que si (u_n) est une suite récurrente associée à f dont le point de départ est $u_0 = x^*$, alors (u_n) est constante égale à x^*.

(Exercice : à faire)

D'autre part, on peut montrer que les points fixes de f jouent un rôle fondamental dans l'évolution de toute suite récurrente (u_n) associée à f (même celle dont le point de départ u_0 n'est pas un point fixe x^* de f). En effet, si au départ $u_0 < x^*$, puisque f est croissante, on a

$$u_1 = f(u_0) \leqslant f(x^*) = x^*$$

Par récurrence, on peut alors montrer que $u_n \leqslant x^*$ pour tout n. Autrement dit, si $u_0 \leqslant x^*$, alors (u_n) est majorée par x^*.

On peut évidement montrer à l'inverse que si $u_0 > x^*$, alors $u_n \geqslant x^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Formellement, on peut alors définir la notion *d'intervalles stables* pour une suite récurrente (u_n) associée à une fonction f.

Précisément, on appelle intervalle stable de (u_n) tout intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ tel que si $u_0 \in [a, b]$ alors tous les termes de (u_n) sont également dans $[a, b]$.

Or les informations précédente se traduisent par le fait que les intervalles stables d'une suite récurrente (u_n) associée à une fonction f sont les intervalles définis par les points fixes de f. Autrement dit, si l'on note

$$x_1^* < x_2^* < \cdots < x_p^*$$

les solutions de l'équation $f(x) = x$, alors pour toute suite récurrente (u_n) associée à f, on a

$$u_0 \in [x_k^*, x_{k+1}^*] \ \Rightarrow \ u_n \in [x_k^*, x_{k+1}^*] \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

On peut alors déterminer la nature de (u_n) dans certains cas particuliers en se basant uniquement sur les deux premiers termes u_0 et u_1 :

- Si $u_1 \geqslant u_0$ et $u_0 \leqslant x^*$, alors (u_n) est croissante et majorée par x^*. Elle est donc convergente.
- Si $u_1 \leqslant u_0$ et $u_0 \geqslant x^*$, alors (u_n) est décroissante et minorée par x^*. Elle est donc convergente.
- S'il existe deux points fixes x_1^* et x_2^* de f tels que $x_1^* \leqslant u_0 \leqslant x_2^*$, alors (u_n) est monotone et bornée, donc elle converge.

ATTENTION : les résultats précédents permettent de déterminer éventuellement la nature de (u_n) mais ne permettent pas de calculer la valeur de la limite éventuelle.

Cependant, en poussant l'étude de (u_n), on peut, après avoir établi sa nature convergente, en déduire la valeur de sa limite. En effet, si l'on sait que (u_n) converge et que l'on note ℓ sa limite, on a :

$$u_n \to \ell \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} \to \ell.$$

En passant alors à la limite $n \to +\infty$ dans la relation

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

on a, si f est continue

$$f(\ell) = \ell.$$

Autrement dit, si (u_n) est convergente, alors sa limite ℓ est nécessairement un point fixe de f. Cela restreint donc les limites possibles, et une étude un peu plus poussée doit nous permettre de conclure.

Exemple : soit $f \,:\, x \mapsto x^3$.

1. Déterminer les variations et les points fixes de f.
2. Soient

$$(u_n) \,:\, \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n^3 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (v_n) \,:\, \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = v_n^3 \end{cases}$$

   (a) Montrer que (u_n) est minorée. En déduire qu'elle converge et donner sa limite.

   (b) Montrer que (v_n) ne peut être convergente.

Résumé : à partir des observations faites ci-dessus, on peut mettre en place à protocole d'étude pour toutes les suites récurrentes associées à une fonction f croissante basé sur l'étude du signe de la quantité $f(x) - x$: la première étape consiste à dresser le tableau de signe de $f(x) - x$. Cette étude produit en particulier la liste des points fixes $x_1^*, \ldots, x_p^*$ de f. Si l'on note alors

$$(u_n) \,:\, \begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

on peut énoncer les résultats suivants :

1. *Sens de variation.*
   - Toute suite (u_n) dont le point de départ u_0 est un point fixe de f est constante.
   - Toute suite (u_n) dont le point de départ u_0 est dans un intervalle où $f(x)-x \geqslant 0$ est croissante.
   - Toute suite (u_n) dont le point de départ u_0 est dans un intervalle où $f(x)-x \leqslant 0$ est décroissante.
2. *Convergence.*
   - Si la suite (monotone) (u_n) se rapproche d'un point fixe de f, alors elle converge vers ce point fixe.
   - Si (u_n) s'éloigne de tous les points fixes de f, alors elle diverge vers $\pm\infty$.

Exemple : déterminer le comportement de toutes les suites récurrentes vérifiant la relation $u_{n+1} = u_n^3$ en fonction du point de départ u_0.

Le cas des fonctions décroissantes. Dans toutes les études précédentes, on s'est restreint au cas où f est une fonction croissante. Or par une simple remarque, on va voir que l'on peut toujours se ramener à ce cas. En effet, si f est une fonction décroissante, en appliquant deux fois la fonction f, on obtient une fonction croissante.

(Exercice : à montrer).

Or si (u_n) est une suite récurrente associée à une fonction f décroissante, la suite récurrente définie par

$$(v_n) \ : \ \begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_{n+1} = f(f(v_n)) = f \circ f(v_n) \end{cases}$$

n'est autre que la suite extraite de (u_n) constituée des termes d'indices pairs :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{2n}.$$

(Exercice : à montrer par récurrence).

De même, la suite (w_n) définie par

$$(w_n) \ : \ \begin{cases} w_0 = u_1 \\ w_{n+1} = f \circ f(w_n) \end{cases}$$

est la suite extraite de (u_n) constituée des termes d'indices impairs.

Or ces deux suites étant associées à la fonction croissante $g = f \circ f$, on peut les étudier à l'aide du protocole établi plus haut. D'autre part, puisqu'à elles deux, elles recouvrent l'ensemble des termes de (u_n), leur étude permet la nature de (u_n) et sa limite éventuelle.

En poussant encore l'étude des ces suites, on peut montrer le résultat suivant :

Proposition 4.4.2 *Soit (u_n) une suite récurrente associée à une fonction f décroissante.*
Les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones et de sens de variation différents. D'autre part :
- *Si la distance $|u_{2n} - u_{2n+1}|$ diminue, alors ces deux suites sont adjacentes et (u_n) converge vers l'unique point fixe de f contenu entre u_{2n} et u_{2n+1}.*
- *Si la distance $|u_{2n} - u_{2n+1}|$ augmente, alors (u_n) diverge.*

Exemples :

1. Déterminer le comportement de toute suite (u_n) associée à la fonction
$$f\ :\ x \longmapsto 1 + \frac{1}{x}$$
2. Déterminer le comportement de toute suite (v_n) associée à la fonction
$$g\ :\ x \longmapsto \frac{1}{x^2}$$

4.5 Vitesse de convergence d'une suite récurrente

D'autre part, les outils d'analyse permettent également de mesurer la vitesse de convergence d'une suite récurrente en étudiant en détails la fonction f associée.

4.5.1 Critère de convergence

L'un des intérêts majeurs des suites récurrentes est qu'elles permettent d'obtenir des valeurs approchées pour n'importe quel nombre réel. Il suffit pour cela de déterminer une fonction dont la valeur que l'on cherche est un point fixe.

Cependant, comme on l'a vu plus haut, il existe, pour une fonction f donnée, certains points fixes qui ne peuvent être approchés par une suite récurrente : les points fixes instables.

Pour approcher une valeur donnée, il faut donc construire une fonction pour laquelle la valeur cherchée est un point fixe *stable*.

Question : comment distinguer les points fixes stables des points fixes instables ?

Une première approche graphique permet de faire la différence : pour qu'un point fixe x^* soit stable, il faut que toute suite dont le point de départ $u_0 < x^*$ soit croissante et que toute suite dont le point de départ $u_0 > x^*$ soit décroissante. Il faut donc que la quantité $f(x) - x$ soit

- positive si $x < x^*$,
- négative si $x > x^*$.

Il faut donc que la courbe de f coupe la première bissectrice "par au dessus". Autrement dit, autour de x^*, la croissance de f doit être moins rapide que celle de x.

D'un point de vue analytique, cela se traduit par le fait que la dérivée de f autour de x^* doit être inférieure à celle de $[x \mapsto x]$. On obtient alors le critère suivant :

Proposition 4.5.1 *Un point fixe x^* de f est*

- *stable si $f'(x^*) < 1$*
- *instable si $f'(x^*) > 1$.*

Note : si $f'(x^*) = 1$, on n'a pas de résultat, dans le sens ou tout peut se produire.

En conclusion, pour calculer une valeur approchée d'un nombre réel x^* donné, il faut construire une fonction f pour laquelle

1. $f(x^*) = x^*$
2. $f'(x^*) < 1$.

Exemples :

1. Déterminer la nature de chacun des points fixes de la fonction
$$f \, : \, x \mapsto \frac{1}{8}x^4 - x^3 + 2x^2.$$
2. Montrer que la fonction $f \, : \, x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ permet de construire des suites récurrentes qui convergent vers $\sqrt{2}$.

4.5.2 Échelle de vitesses

Une fois que l'on sait construire une suite pour approcher un nombre réel donné, on s'intéresse à *la vitesse de convergence* de la suite que l'on a construit. Intuitivement, on souhaite pouvoir estimer le nombre de termes que l'on doit calculer pour obtenir une valeur approchée du nombre cherché à une précision donnée.

Commençons par établir une échelle de vitesses :

Soit (u_n) une suite numérique qui converge et soit ℓ sa limite.

1. On dit que la suite (u_n) converge *lentement* vers ℓ si

$$\text{il existe } A \text{ et } \alpha\ > 0 \text{ tels que } |u_n - \ell| \geqslant \frac{A}{n^\alpha}.$$

   Intuitivement, cela signifie que (u_n) converge vers ℓ à une vitesse au plus polynomiale.

2. On dit que la suite (u_n) converge *géométriquement* vers ℓ si

$$\text{il existe } k \in]0,1[\text{ tel que } |u_n - \ell| \leqslant Ak^n$$

   (i.e. la quantité $|u_n - \ell|$ est dominée par k^n et tend vers 0 à la vitesse de k^n).

3. On dit que la suite (u_n) converge avec une *convergence quadratique* vers ℓ si $|u_n - \ell|$ est dominée par k^{2^n} avec $0 < k < 1$.

4. Plus généralement, on dit que la suite (u_n) converge avec une *convergence d'ordre* $r > 1$ vers ℓ si $|u_n - \ell|$ est dominée par k^{r^n} avec $0 < k < 1$.

<u>Question</u> : comment mesurer la vitesse de convergence d'une suite donnée ?

Un indicateur important pour l'étude de la vitesse de convergence est le quotient

$$q_n = \frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|}$$

et plus précisément la limite $k = \lim q_n$.

On peut alors définir une nouvelle échelle de vitesse, globalement équivalente à la première :

1. Si $k = 1$, alors la convergence de (u_n) est *lente.*
2. Si $0 < k < 1$, alors la convergence est géométrique, de raison k.
3. Si $k = 0$, alors la convergence est rapide.

Remarque : si $k > 1$, le quotient q_n est supérieur à 1 à partir d'un certain rang. À partir de ce rang, la suite (u_n) s'éloigne de ℓ. Elle ne peut donc converger vers ℓ.

4.5.3 Application aux suites récurrente

Dans le cas particulier où (u_n) est une suite récurrente vérifiant une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$, convergent vers un point fixe x^* de f, on constate rapidement que

$$\frac{|u_{n+1} - x^*|}{|u_n - x^*|} = \left|\frac{f(u_n) - f(x^*)}{u_n - x^*}\right| \longrightarrow |f'(x^*)|.$$

Ainsi, la valeur de $f'(x^*)$ déterminer la nature stable ou instable d'un point fixe, mais elle détermine également la vitesse de convergence des suites qui convergent vers x^* :

1. Si $|f'(x^*)| = 1$, la convergence vers x^* est lente.
2. Si $|f'(x^*)| = k \in]0, 1[$, alors la convergence est géométrique de raison k.
3. Si $|f'(x^*)| = 0$, la convergence est au moins quadratique.

4.6 Méthode de Newton

La méthode de Newton est une méthode basée sur les suites récurrentes permettant de résoudre de façon approchée une équation de la forme $\varphi(x) = 0$.

Le principe analytique est de construire une suite récurrente qui converge rapidement vers la solution cherchée.

Newton est parti d'une constatation géométrique : si l'on se place en un point x_n de l'axe des abscisses et si la fonction φ n'a pas de variations trop brusques entre x_n et la racine x^* cherchée, alors le point d'intersection entre la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_n est l'axe des abscisses est significativement plus près de x^* que x_n.

En posant cette construction d'un point de vue analytique, on construit une suite récurrente (x_n) définie par régie par la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\varphi(x_n)}{\varphi'(x_n)}.$$

La fonction f associée à cette suite récurrente est donc

$$f \,:\, x \mapsto x - \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}$$

On peut montrer rapidement que tout point fixe de f est bien une solution de $\varphi(x) = 0$. De plus,

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)\varphi''(x)}{\varphi'(x)^2}$$

donc $f'(x^*) = 0$. Toute suite convergente associée à cette fonction converge donc très rapidement.

Exemple : construire une suite récurrente qui converge rapidement vers la racine positive de $\varphi(x) = x^2 - 2$.

Chapitre 5

Matrices et systèmes linéaires

Introduction

De nombreux problème (physiques et mathématiques) peuvent se traduire sous forme d'équations linéaires ou de familles d'équations linéaires. Or les matrices et le calcul matriciel donnent un outil très efficace pour représenter ces types de problèmes et plus généralement tout problème ayant un caractère linéaire :

- des familles d'équations ou inéquations linéaires,
- des familles de vecteurs (exprimés dans une base),
- des applications linéaires,
- des équations différentielles...

L'objectif de ce cours est de présenter des méthodes algorithmiques de résolution de systèmes linéaires, rendues possibles par la représentation matricielle.

Après une étudie théorique des systèmes linéaires et de leurs solutions, nous verrons comment, en traduisant la résolution d'un système en termes d'opérations matricielles, on peut élaborer ces méthodes algorithmiques.

Nous étudierons essentiellement une méthode : le pivot de Gauss ; dont l'idée générale est de construire, à partir du système de départ, un système équivalent (i.e. qui admet les mêmes solutions), plus simple à résoudre. Dans le cas du pivot de Gauss, l'objectif est d'obtenir un système *triangulaire*.

Dans un second temps, nous étudierons quelques exemples de problème pouvant se ramener à des systèmes linéaires. Nous verrons ainsi comment résoudre des systèmes linéaires comportant plus de contraintes que de degrés de liberté.

5.1 Matrices

5.1.1 Définitions

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients réels est la donnée de $n \times p$ nombres réels, appelés termes ou coefficients rangés dans un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels. On peut également envisager des matrices contenant d'autres types de nombres ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, etc).

Si $n = 1$, on parle de *matrice ligne* ou *vecteur ligne* à p colonnes.
Si $p = 1$, on parle de *matrice colonne* ou *vecteur colonne* à n lignes.
Si $n = p$, on parle de *matrice carrée*. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

Notes :
- Les vecteurs à deux ou trois coordonnées permettent en particulier de représenter des vecteurs et des positions du plan ou de l'espace. Cette représentation permet de très nombreuses du calcul matriciel en géométrie (et permet également une généralisation des concepts géométriques aux dimensions supérieures).
- Si $n = p = 1$, on a simplement affaire à des nombres (on parle de matrice scalaire).

5.1.2 Indexation

Dans une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, le coefficient situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne ($1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$) sera noté a_{ij} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Exemple : toute matrice de $A \in \mathcal{M}_{24}(\mathbb{R})$ se note

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

5.1.3 Matrices particulières (carrées)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on distingue certaines matrices et certains types de matrices particulières :

- La matrice *identité* (ou matrice *unité*)

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les coefficients δ_{ij} de la matrice identité vérifient donc

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

- Dans toute matrice carrée $A = (a_{ij})$, on appelle termes diagonaux de A les éléments a_{ii} pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Une matrice carrée est dite *diagonale* si et seulement si tous ses termes non-diagonaux sont nuls :

$$D = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

Ainsi, une matrice $D = (d_{ij})$ est diagonale si et seulement si

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad i \neq j \;\Rightarrow\; d_{ij} = 0$$

- Une matrice carrée est dite *triangulaires supérieure* (resp. *triangulaire inférieure*) si elle est de la forme

$$T_1 = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \qquad \text{resp. } T_2 = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{pmatrix}$$

Ainsi, $T = (t_{ij})$ est triangulaire supérieure si et seulement si

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad i > j \;\Rightarrow\; t_{ij} = 0$$

et T est triangulaire inférieure si et seulement si

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad i < j \;\Rightarrow\; t_{ij} = 0$$

5.1.4 Opérations matricielles

Outre la possibilité de stocker un ensemble de valeurs, il est également possible de définir des opérations sur l'ensemble des matrices. À l'aide de ces opérations, il devient alors possible d'étendre les notions de calculs et d'équations à l'ensemble des matrices

Opérations linéaires

Étant données deux matrices de même taille $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice $A + B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

(on dit que l'addition se fait *terme à terme*).

Étant intimement liée à l'addition des nombres réels, l'addition des matrices hérite des propriétés principale de cette addition des réels. Ainsi

- L'addition des matrices est associative :

$$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad (A + B) + C = A + (B + C)$$

- L'addition des matrices est commutative :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad A + B = B + A$$

- En notant $\mathbb{O}_{n,p}$ la matrice nulle de taille $n.p$ (i.e. la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls), on a

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad A + \mathbb{O}_{n,p} = A$$

- Toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ admet une matrice opposée : la matrice $-A = (-a_{ij})$.

Il est également possible de définir une multiplication extérieure sur l'ensemble des matrices, i.e. une multiplication par un réel. Ainsi, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $\lambda.A$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par

$$\lambda.A = (\lambda.a_{ij})$$

Ce produit extérieur est alors distributif sur l'addition des matrices et compatible avec la multiplication des réels. Autrement dit,

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda.(A + B) = \lambda.A + \lambda.B$$

et

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad \lambda.(\mu.A) = (\lambda\mu).A = \mu.(\lambda.A)$$

Multiplication des matrices

Il est également possible de définir une multiplication sur l'ensemble des matrices. Précisément, soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Le produit $A \times B$ est la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \ \forall j \in \{1, \ldots, q\}, \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Notons en particulier que, contrairement au deux opérations précédentes, le produit de matrices ne se fait pas terme à terme. D'autre part, il n'est pas toujours possible de multiplier entre elles deux matrices quelconques. Pour que le produit $A \times B$ existe, il faut en particulier que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Le produit $A \times B$ a alors autant de lignes que A et autant de colonnes que B. On peut résumer le produit de matrice par le schéma suivant :

$$\begin{array}{cccc} & & B & \\ & & \| & \\ & & \begin{pmatrix} & & & b_{1j} & \\ & & & b_{2j} & \\ & & & \vdots & \\ & & & b_{pj} & \end{pmatrix} & \\ A = & \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & & \vdots & \\ & & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & c_{ij} & \\ & & & & \end{pmatrix} & = A \times B \end{array}$$

Ainsi, même si le produit $A \times B$ existe, il n'est pas dit que le produit $B \times A$ existe. Et même dans le cas où les deux produits AB et BA existent, les matrices obtenues ne sont pas toujours de la même taille. Seul cas particulier : le cas des matrices carrées. Précisément, si A et B sont deux matrices carrées à n lignes, les produits $A \times B$ et $B \times A$ existent toujours et produisent encore des matrices carrées à n lignes. Cependant, même dans ce cas, on a en général $A \times B \neq B \times A$ (i.e. le produit de matrices n'est pas commutatif).

Hormis le défaut de commutativité, la multiplication des matrices possèdes tout de même quelques propriétés : soient A, B et C trois matrices telles que toutes les opérations envisagées soient possibles.

- *Associativité* : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.
- *Distributivité* : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(\lambda.A) \times B = A \times (\lambda.B) = \lambda.(A \times B)$.
- *Matrice unité.* Pour toute matrice A à n colonnes, on a $A \times I_n = A$ et pour toute matrice B à n lignes, on a $I_n \times B = B$.

Transposée

Étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on appelle *transposée* de A la matrice notée ${}^tA$, appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, dont les lignes sont les colonnes de A (et dont les colonnes sont alors les lignes de A). Ainsi, si $A = (a_{ij})$, alors ${}^tA = (a_{ji})$.

Exemples :

- Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.
- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Notons que dans le cas d'une matrice carrée, la transposée est obtenue par symétrie par rapport à sa diagonale.

Enfin, on appelle *matrice symétrique* toute matrice A vérifiant ${}^tA = A$. Ainsi, une matrice symétrique est nécessairement carrée et est symétrique par rapport à sa diagonale.

Exemple : la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique 3×3.

On peut montrer que ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ (à faire) et que ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA \neq {}^tA \times {}^tB$ (plus dur).

Trace

La *trace* d'une matrice carrée A est le nombre réel obtenu en sommant ses termes diagonaux : si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

On verra que la trace est une caractéristique importante de toute matrice carrée. On peut en particulier montrer que pour toutes matrices A et B carrées de même taille, on a

$$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$

On peut également montrer que, même si $A \times B \neq B \times A$, on a $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

5.1.5 Matrices inversibles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times B = I_n$. La matrice B ainsi définie est appelée *inverse de* A et est notée A^{-1}.

On peut montrer que si l'inverse d'une matrice A existe, alors elle est unique. De plus, si $A \times B = I_n$, on peut montrer qu'alors $B \times A = I_n$.

Par ailleurs, on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles à n lignes. On peut alors montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $(A^{-1})^{-1} = A$.

De même, on peut montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A \times B$ est encore dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1} \neq A^{-1} \times B^{-1}$.

Décider du caractère inversible d'une matrice donnée et calculer son inverse le cas échéant font partie des problèmes les plus complexes à traiter, même à l'aide d'un ordinateur.

En effet, même si la théorie donne des outils de décision ainsi que des méthodes théoriques pour le calcul d'inverse, aucune de ces méthodes n'est réellement efficace lorsque la taille de la matrice étudiée augmente.

5.1.6 Déterminants

Le déterminant d'une matrice carrée est un nombre, calculé à partir des coefficients de la matrice en question est permettant de mettre en évidence un certain nombre de propriétés de la matrice étudiée. Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\det(A)$ ou $|A|$ son déterminant. Sous forme étendue, si $A = (a_{ij})$, on note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

L'une des principales application du déterminant est lié à l'inversibilité d'une matrice donnée. Précisément, on peut montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ (i.e. } A \text{ est inversible)} \iff \det(A) \neq 0$$

Cependant, la notion de déterminant trouve également des applications en géométrie via la notion de déterminant d'une famille de vecteurs.

Nous verrons également dans la section suivante que la notion de déterminant permet de mettre en place des propriétés théoriques importantes dans le domaine des systèmes d'équations linéaires.

Calcul d'un déterminant

Étant donnée une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

où S_n représente l'ensemble des permutations possibles de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Cette représentation permet de mettre en évidence certaines propriétés du déterminant, mais ne permet pas en pratique de calculer celui ci, notamment du fait du nombre important ($n!$) de termes à calculer.

En pratique, le calcul d'un déterminant se fait par “récurrence”.

Précisément, pour $n = 2$, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

On constate ici que

$$\det(A) = 0 \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Autrement dit, les matrices 2×2 inversibles sont celles dont les lignes (et donc les colonnes) ne sont pas proportionnelles.

Pour $n = 3$, la formule générale produit la formule de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + dhc + gbf) - (gec + ahf + dbi)$$

Cependant, on verra que, même en dimension 3, cette méthode possède un certain nombre d'inconvénients majeurs qui la rend peut exploitée en pratique, au profit d'une méthode plus générale, basée sur le *développement par rapport à une ligne ou une colonne.* Ainsi, soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On commence par placer dans A un damier de signes :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} {}^{+}a & {}^{-}b & {}^{+}c \\ {}^{-}d & {}^{+}e & {}^{-}f \\ {}^{+}g & {}^{-}h & {}^{+}i \end{vmatrix}$$

On peut alors choisir de développer par rapport à la première colonne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} {}^{+}a & b & c \\ {}^{-}d & e & f \\ {}^{+}g & h & i \end{vmatrix}$$

via la formule suivante :

$$\det(A) = +\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$= +a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g\begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

En développant les déterminants 2×2, on retrouve les termes de la formule de Sarrus.

On peut également choisir de développer par rapport à la deuxième ligne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \boxed{{}^{-}d \quad {}^{+}e \quad {}^{-}f} \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(A) &= -\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \\ &= -d\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e\begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Là encore, en développant les déterminants 2×2 obtenus, on retrouve les termes de la formule de Sarrus.

De façon générale, il est possible de développer n'importe quel déterminant $n \times n$ par rapport à l'une de ses lignes ou l'une de ses colonnes. Théoriquement, par itérations successives, on peut alors réduire n'importe quel déterminant à une somme de déterminants 2×2. On verra qu'en pratique, le procédé peut vite être fastidieux et qu'il existe des manipulations possible "préparant" le développement d'un déterminant.

Notes

- Le développement par rapport à une ligne ou une colonne permet de mettre en évidence certaines propriétés portant sur des matrices particulières. Ainsi,

  — Si A contient une ligne ou une colonne de 0, alors $\det(A) = 0$ (et A n'est alors pas inversible).
  — Le déterminant d'une matrice triangulaire est donné par le produit de ses termes diagonaux (à démontrer). C'est en particulier le cas des matrices diagonales.
  — Une matrice triangulaire T est inversible si et seulement si aucun de ses termes diagonaux n'est nul.

- Les sous-déterminants $(\mathrm{co}A)_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$
  intervenant dans le développement d'un déterminant sont appelés *co-facteurs*. Ils constituent les coefficients de la *co-matrice* co$A$ de A qui est au cœur de la formule

explicite de l'inverse d'une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\ {}^t(\mathrm{co}A)$$

Si $n = 2$, cette formule explicite donne

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \iff \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

En dimensions supérieurs, cette formule permet d'établir certains résultats théoriques sur les matrices inversibles, mais n'est que très peu exploitée dans le calcul effectif d'inverses car elle nécessite le calcul de n^2 déterminants $(n-1) \times (n-1)$ et d'un déterminant $n \times n$.

Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

Soit A une matrice carrée à n lignes. On appelles opérations élémentaires sur les lignes $L_1, \ldots,\ L_n$ (resp. les colonnes $C_1, \ldots,\ C_n$) de $\det(A)$ les trois opérations suivantes :

- *Combinaison de lignes (resp. colonne)* :

$$L_i \longleftarrow L_i + \alpha.L_j \quad (\text{resp. } C_i \longleftarrow C_i + \alpha.C_j) \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \ i \neq j$$

- *Permutation de lignes (resp. colonne)* :

$$L_i \longleftrightarrow L_j \quad (\text{resp. } C_i \longleftrightarrow C_j) \qquad i \neq j$$

- *Multiplication d'une ligne (resp. colonne)* :

$$L_i \longleftarrow \lambda.L_i \quad (\text{resp. } C_i \longleftarrow \lambda.C_i) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

On peut montrer que ces opérations élémentaires ne modifient que peu, voire pas du tout le déterminant auquel elles sont appliquées. Précisément,

- Une combinaison de lignes ou de colonnes ne modifie pas le déterminant auquel on l'applique.
- Une permutation de lignes ou de colonnes change le signe du déterminant auquel on l'applique.
- Une multiplication de ligne ou de colonne par un coefficient $\lambda \in \mathbb{R}$ multiple par λ le déterminant auquel on l'applique.

Réduction d'un déterminant

Lors du calcul explicite d'un déterminant $\det(A)$, ces opérations élémentaires permettent alors de transformer $\det(A)$ avant d'appliquer un éventuel développement.

Ainsi, les combinaisons (et permutations) de lignes et colonnes permettent de placer des zéros dans $\det(A)$, qui simplifient le développement.

Exemple : Soit $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

1. À l'aide de la ligne L_1, annuler les coefficients 2 et -2 de la colonne C_1.
2. Calculer $\det(A)$ en développant par rapport à sa première colonne le déterminant obtenu à la question précédente.

Note : d'un point de vue théorique, l'invariance du déterminant par combinaisons de lignes ou de colonnes permet de montrer que si une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient deux lignes égales ou proportionnelles, alors son déterminant est nul (et la matrice A n'est pas inversible). De façon générale, si l'une des lignes (ou l'une des colonnes) de A peut s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire des autres, alors son déterminant est nul et la matrice A n'est pas inversible.

Factorisation d'un déterminant

La multiplication d'une ligne ou d'une colonne par un coefficient peut se traduire de la façon suivante :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda.a_{i1} & \cdots & \lambda.a_{ij} & \cdots & \lambda.a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda. \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda.a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \lambda.a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda.a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

La mise en facteur d'un peut alors permettre de rendre plus efficace l'utilisation des combinaisons dans la réduction du déterminant à calculer.

5.2 Systèmes linéaires

5.2.1 Définitions

Une équation linéaire est une équation de la forme

$$(E) \ : \ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_px_p = b$$

liant les inconnues $x_1, \ldots, x_p$.

Les a_i sont les coefficients (connus) de l'équation et b est le second membre. Si b est nul, l'équation est dite *homogène*.

Un système linéaire est la donnée d'un ensemble d'équations linéaires portant sur les inconnues $x_1, \dots, x_p$:

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 & & (E_1) \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 & & (E_2) \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n & & (E_n) \end{array} \right. \iff (S) = \{(E_1), \dots, (E_n)\}$$

Ici, p est le nombre d'inconnues et n est le nombre d'équations.

Les coefficients a_{ij} sont les coefficients du système, les x_i sont les inconnues et les b_i forment le second membre. S'ils sont tous nuls, le système est dit homogène.

Une solution du système (S) est un p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ satisfaisant l'ensemble des équations. C'est un élément de l'ensemble $\mathbb{R}^p$.

Résoudre (S), c'est déterminer l'ensemble des p-uplets solutions. L'ensemble Σ des solutions d'un système linéaire à p inconnues est donc un sous ensemble de $\mathbb{R}^p$. Dans les cas $p = 2$ et $p = 3$, on pourra représenter cet ensemble comme une partie du plan ou de l'espace (muni d'un repère).

Note : de façon générale, deux systèmes seront dits équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

5.2.2 Représentations géométriques

Droites du plan ($p = 2$)

Une équation linéaire en deux variables est une équation de la forme

$$ax + by = c \tag{5.1}$$

où a, b, c sont des réels fixés.

L'ensemble des solutions Σ d'une telle équation est l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant cette équation.

En munissant le plan d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$, on peut associer à chaque couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ un point du plan : le point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$. L'ensemble Σ des solutions de l'équation 5.1 correspond alors à *une droite.*

Par ailleurs, un système d'équations de n équations à deux inconnues correspond à un ensemble d'équations de la forme 5.1 :

$$(S) = \begin{cases} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_nx & + & a_ny & = & c_n \end{cases}$$

Chacune de ces équations peut être associée à une droite du plan et l'ensemble Σ des solutions du système (S) peut être représenté géométriquement par l'intersection de toutes ces droites. Or comme l'illustrent les exemples de la table 5.1, l'intersection d'une familles de droites du plan peut être soit vide, soit un point, soit une droite. Autrement dit, un système à deux inconnues admet soit aucune solution, soit une unique solution, soit une infinité de solutions. On verra que c'est un résultat que l'on peut généraliser aux dimensions supérieures.

Note : dans le cas d'un système homogène, chaque équation du système est de la forme $a_ix + b_iy = 0$. Chaque équation correspond donc à une droite passant par l'origine $(0, 0)$ du repère. L'ensemble des droites associées à un système homogène ont donc au moins l'origine du repère comme point commun. Autrement dit, les systèmes linéaires homogènes admettent toujours au moins une solution.

Plans de l'espace ($p = 3$)

En dimension 3, une équation linéaire est une équation de la forme

$$ax + by + cz = d$$

Dans l'espace muni d'un repère, l'ensemble des triplets (x, y, z) qui satisfont une telle équation correspondent à un plan de l'espace.

L'ensemble Σ des solutions d'un système linéaire (S) à trois inconnues peut donc être associé à l'intersection d'une famille de plans de l'espace. Or, comme l'illustrent les exemples de la tables 5.2, l'intersection d'une familles de plans de l'espaces peut être soit vide, soit un point, soit une droite, soit un plan.

On retrouve en particulier le fait qu'un système d'équations linéaires admet soit aucune, soit une seule soit une infinité de solutions.

Hyperplans de $\mathbb{R}^p$.

De façon générale, l'ensemble Σ des solutions d'une équation linéaire à p variables de la forme

$$(E) \ : \ a_1x_1 + \ldots + a_px_p = b$$

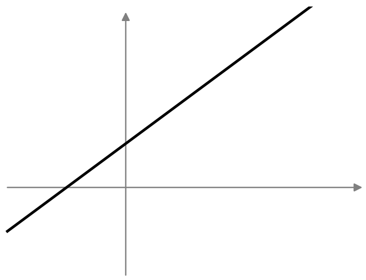
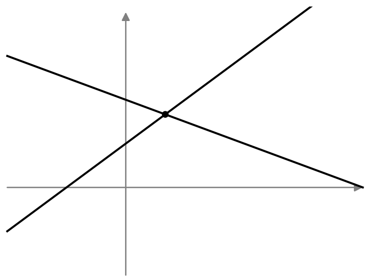
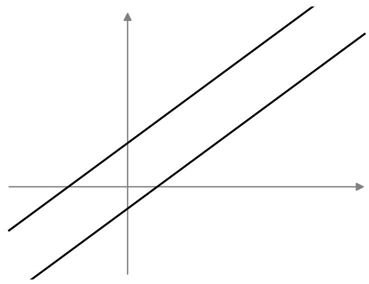
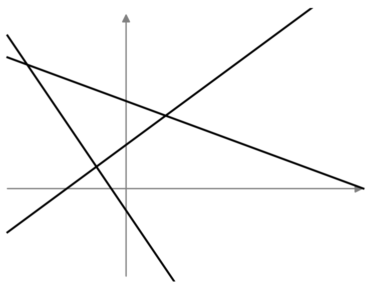
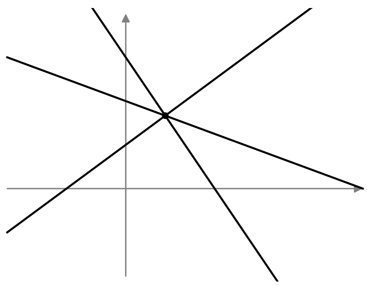
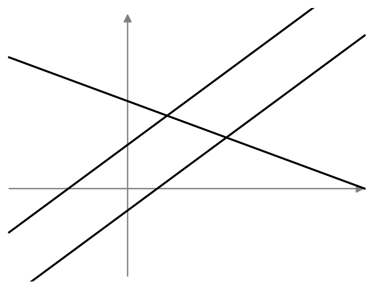
 1) Une équation ou plusieurs équations proportionnelles = une droite de solutions	 2) Deux équations indépendantes = une solution unique	 3) Deux équations incompatibles = aucune solution
 4) Trois droites non concourantes = aucune solutions	 5) Trois droites concourantes = une solution unique	 6) Trois équations incompatibles = aucune solution

TABLE 5.1 – Intersections de droites

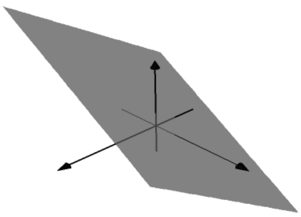
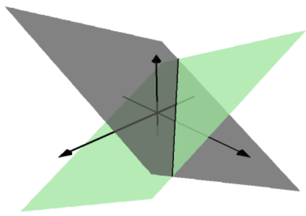
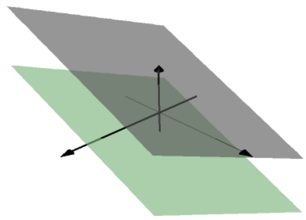
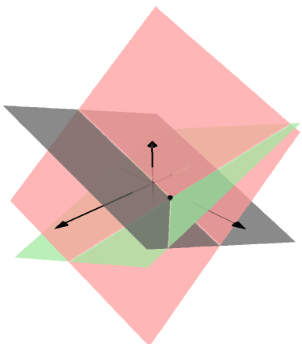
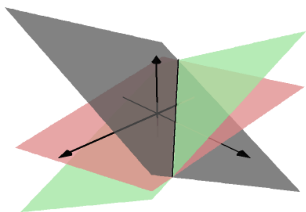
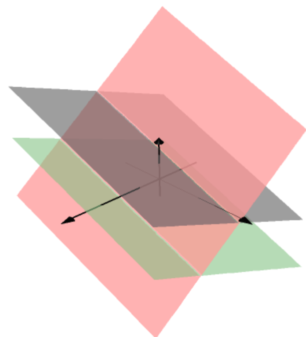
 1) Une équation ou plusieurs équations proportionnelles = un plan de solutions	 2) Deux équations indépendantes = une droite de solutions	 3) Deux équations incompatibles = aucune solution
 4) Trois équations indépendantes = une solution unique	 5) Trois équations liées = une droite de solutions	 6) Trois équations incompatibles = aucune solution

TABLE 5.2 – Intersections de plans

est un sous ensemble de $\mathbb{R}^p$ appelé *hyperplan de* $\mathbb{R}^p$. Il s'agit d'un sous espace affine de dimension $p-1$. Ainsi, si $p=2$, on retrouve les droites du plan, si $p=3$, on retrouve les plans de l'espace.

L'ensemble des solutions d'un système (S) d'équations linéaires à p inconnues est donc une intersection d'hyperplans. On peut montrer (en s'inspirant notamment des différents cas vus plus haut) qu'un telle intersection est encore un sous espace affine de $\mathbb{R}^p$ dont la taille (i.e. la dimension) déprend des liens qui peuvent exister entre les différentes équations du système.

5.2.3 Représentation matricielle

Définitions

Soit

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

On appelle

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice du système (S),
- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}$ le vecteur colonne inconnu,
- $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}$ le vecteur colonne second membre.

le système (S) s'écrit alors sous la forme de l'égalité vectorielle

$$A \times X = B$$

L'étude des matrices A et B du système permet alors de mettre en place des résultats théoriques ainsi que des méthodes de résolution des systèmes linéaires associés. Dans ce cadre, on définit également la *matrice étendue du système* (S) :

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} & b_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right)$$

Cette matrice étendue n'a pas de réel sens théorique, mais elle contient l'ensemble des informations portées par le système (S) et permet de travailler sur le système (S) en remplaçant les manipulations des équations de (S) par des manipulations sur les matrices de $\tilde{A}$.

5.2.4 Systèmes de Cramer

On appelle *système de Cramer* tout système linéaire admettant une unique solution. À l'aide de la notation matricielle, on peut montrer qu'un système linéaire $AX = B$ est de Cramer si et seulement si sa matrice A est inversible et on a alors :

$$A \times X = B \iff A^{-1} \times (AX) = A^{-1} \times B \iff \boxed{X = A^{-1} \times B}$$

Par extension, les systèmes de Cramer sont également dits *inversibles*. Notons que pour qu'un système soit inversible, il est nécessaire que sa matrice A soit carrée, i.e. que le système (S) contienne autant d'équations que d'inconnues $(n = p)$.

En pratique, la résolution d'un système de Cramer $AX = B$ ne passe pas par le calcul du produit $A^{-1} \times B$ car le calcul de la matrice A^{-1} est en général plus long que la résolution directe du système.

Outre la formule ci-dessus, il existe également une expression théorique de l'unique solution d'un système de Cramer à l'aide des déterminants. Précisément, le vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est l'unique solution du système de Cramer $AX = B$ si et seulement si

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \qquad x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & b_i & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Là encore, cette formule n'est que très peu utilisée en pratique car elle nécessite le calcul de $n+1$ déterminant $n \times n$, le calcul de chacun de ces déterminants étant plus long que la résolution directe du système.

5.2.5 Systèmes libres, systèmes liés

On a vu plus haut qu'un système linéaire admettait soit aucune, soit une, soit une infinité de solutions. Pour les systèmes admettant une infinité de solutions, l'approche géométrique a également permis de distinguer différents cas. Ainsi, un système linéaire à trois inconnues non inversible peut admettre une droite ou un plan de solutions. Cette différence, portant sur *la dimension* de l'ensemble des solutions, dépend non seulement du nombre d'équations du système étudié, mais également des éventuels liens qui peuvent exister entre ces équations.

Ainsi, deux équations à p inconnues

$$(E_1) \,:\, a_{11}x_1 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \quad \text{et} \quad (E_2) \,:\, a_{21}x_1 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2$$

sont dite *liées* si elles sont proportionnelles, i.e. s'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$(\forall j \in \{1, \ldots p\}, \quad a_{2j} = \lambda.a_{1j} \qquad \text{et} \qquad b_2 = \lambda.b_1) \;\Leftrightarrow\; (E_2) = \lambda.(E_1)$$

Ces deux équations ont pour ensemble de solutions le même hyperplan de $\mathbb{R}^p$ et l'on a

$$\{(E_1), (E_2)\} \iff \{(E_1)\} \iff \{(E_2)\}$$

Exemples :
- Deux équations à deux inconnues proportionnelles sont associées à la même droite du plan.
- Deux équations à trois inconnues proportionnelles sont associées au même plan de l'espace.

De façon générale, un système linéaire $(S) = \{(E_1), \ldots, (E_n)\}$ est dit *lié* si l'une de ses équation peut s'exprimer sous la forme d'une *combinaison linéaire* des autres :

$$\exists j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad (E_j) = \sum_{i \neq j} \lambda_i.(E_i) \tag{5.2}$$

Dans ce cas, on a alors

$$\{(E_1), \ldots, (E_{j-1}), (E_j), (E_{j+1}), \ldots, (E_n)\} \iff \{(E_1), \ldots, (E_{j-1}), (E_{j+1}), \ldots, (E_n)\}$$

Exemples :
- Si (E_1) et (E_2) sont deux équations à deux inconnues non proportionnelles, elles correspondent à deux droites concourantes Δ_1 et Δ_2 du plan. Toute équations de la forme
$$(E) = \lambda.(E_1) + \mu.(E_2), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$
correspond alors à une droite du plan passant par le point $P = \Delta_1 \cap \Delta_2$.
Les systèmes $\{(E_1), (E_2), (E)\}$ et $\{(E_1), (E_2)\}$ sont donc équivalents et l'ensemble des solutions de ces deux systèmes est réduit au point P.

- Si (E_1) et (E_2) sont deux équations à trois inconnues non proportionnelles, elles correspondent à deux plans de l'espace dont l'intersection est une droite Δ. Tout équation de la forme

$$(E) = \lambda.(E_1) + \mu.(E_2), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

correspond alors à un plan de l'espace contenant la droite Δ.
Les systèmes $\{(E_1), (E_2), (E)\}$ et $\{(E_1), (E_2)\}$ sont donc équivalents et l'ensemble des solutions de ces deux systèmes est constitué de la droite Δ.

Notes :

- Si l'un des coefficients λ_i de l'égalité 5.2 est non nul, il est alors possible d'exprimer l'équation (E_i) associée en fonction des autres. On a alors

$$\begin{aligned} \{(E_1), \ldots, (E_n)\} &\iff \{(E_1), \ldots, (E_i), \ldots, (E_{j-1}), (E_{j+1}), \ldots, (E_n)\} \\ &\iff \{(E_1), \ldots, (E_{i-1}), (E_{i+1}), \ldots, (E_j), \ldots, (E_n)\} \end{aligned}$$

- Si dans un système $(S) = \{(E_1), \ldots, (E_n)\}$, l'une des équations (E_j) s'écrit comme combinaison linéaire des autres mais que le second membre b_j de (E_j) ne respecte pas cette combinaison linéaire, le système est dit incompatible. Il n'admet alors aucune solution.

Enfin, un système non lié sera dit *libre*.

Rang d'un système

Comme on vient de le voir, dans un système linéaire donné, il peut arriver que certaines équations soient inutiles. On verra qu'il est alors possible de faire le tri pour en extraire uniquement les équations qui comptent. On obtient ainsi un système libre ayant les mêmes solutions que le système de départ.

On verra également qu'il existe différentes façons de faire ce tri, chaque méthode produisant un système différent (mais toujours équivalent au premier). Or tous les systèmes libres que l'on peut ainsi obtenir à partir d'un système de départ possèdent le même nombre d'équations (inférieur ou égal au nombre d'équations de départ). Ce nombre minimal d'équations est appelé le *rang* du système de départ (et de tous les systèmes équivalents).

Or on peut montrer que le rang d'un système est intimement lié à la dimension de l'ensemble de ses solutions évoqué plus haut. Précisément, pour tout système linéaire de rang r à p inconnues, si $r \leqslant p$, la dimension d de l'ensemble des solutions est

$$d = p - r$$

Exemples :

- En deux variables, l'ensemble des solutions d'un système linéaire de rang 1 (i.e. contenant une unique équation ou une famille d'équations proportionnelles) est de dimension $d = 2 - 1 = 1$. Il s'agit d'une droite du plan.
- En trois variables, l'ensemble des solutions d'un système linéaire de rang 1 est de dimension $d = 3 - 1 = 2$. Il s'agit d'un plan de l'espace.
- De façon générale, si (S) est un système de rang p portant sur p inconnues, l'ensemble de ses solutions est de dimension $d = p - p = 0$. Il s'agit d'un point et (S) est alors inversible.

Notes :

- Par définition, dans un système libre, le rang est égal au nombre d'équations. La dimension de l'ensemble des solutions s'obtient alors en soustrayant le nombre d'équations au nombre d'inconnues. Autrement dit, dans un système libre, chaque équation (i.e. chaque contrainte) fait perdre une dimension à l'ensemble des solutions (i.e. *un degré de liberté*).
- Si le rang d'un système est strictement supérieur au nombre d'inconnues de ce système, celui-ci n'admet alors aucune solution. Il est dit *sur-déterminé* (il contient trop de contraintes par rapport au nombre de ses degrés de liberté).

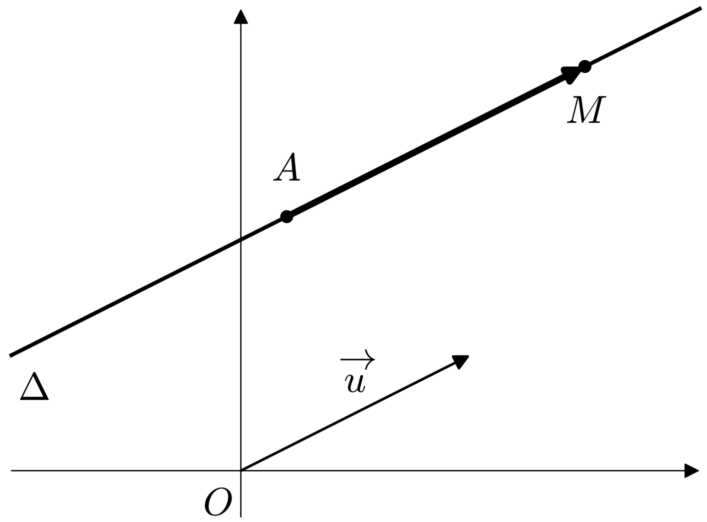
5.2.6 Paramétrisation de l'ensemble des solutions

Rappel : il est possible de représenter toute droite du plan à l'aide d'une *paramétrisation*. Précisément, soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormé du plan. Si Δ est une droite affine du plan, en notant $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ un vecteur directeur de Δ et $A = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ un point quelconque de Δ, la droite Δ est constituée de l'ensemble des points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ du plan tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ soient colinéaires. Ainsi,

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \in \Delta &\iff \exists t \in \mathbb{R} \ / \ \overrightarrow{AM} = t.\overrightarrow{u} \\ &\iff \exists t \in \mathbb{R} \ / \ \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& \alpha.t + x_0 \\ y &=& \beta.t + y_0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

La droite Δ est alors définie par

$$\Delta = \{(\alpha.t + x_0, \beta.t + y_0),\ t \in \mathbb{R}\} = \{t.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{OA},\ t \in \mathbb{R}\}$$



Par ailleurs, il est possible de construire une telle paramétrisation à l'aide d'une équation cartésienne de Δ. En effet, si $\Delta\ :\ y = ax + b$, en prenant x comme paramètre, on a

$$\Delta = \{(x, ax + b),\ x \in \mathbb{R}\} = \{x.(1, a) + (0, b),\ x \in \mathbb{R}\}$$

On reconnaît ici une paramétrisation de la droite Δ, basée sur le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ et sur le point $A = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \in \Delta$.

Note : il existe une infinité de paramétrisations possibles pour une même droite du plan. Ainsi, si $a \neq 0$, on a

$$y = ax + b \iff x = a'y + b'$$

avec $a' = \frac{1}{a}$ et $b' = -\frac{b}{a}$. On a alors

$$\Delta = \{(a'y + b', y),\ y \in \mathbb{R}\} = \{y.(a', 1) + (b', 0),\ y \in \mathbb{R}\}$$

exercice : identifier le vecteur $\overrightarrow{u'}$ et le point A' de cette nouvelle paramétrisation et vérifier qu'ils vérifient toutes les propriétés attendues (on pourra s'appuyer sur un dessin).

De façon générale, il est possible d'étendre cette représentation paramétrique à l'ensemble des solutions de n'importe quel système linéaire admettant une infinité de solutions. Précisément, soit (S) un système linéaire à p inconnues et de rang $r < p$. L'ensemble Σ des solutions de (S) peut être décrit à l'aide d'une paramétrisation à $d = p - r$ paramètres. D'autre part, il est là encore possible de s'appuyer sur les équations du système (S) pour extraire une telle paramétrisation.

Exemples :

- Considérons un système linéaire (S) à trois inconnues, de rang 1. Il est équivalent à une unique équation de la forme

$$(E)\ :\ ax+by+cz=d$$

Si $c\neq 0$, on a $(E)\Leftrightarrow z=\alpha x+\beta y+\gamma$ et

$$\Sigma=\{(x,y,\alpha x+\beta y+\gamma),\ x,y\in\mathbb{R}\}$$

On obtient ainsi une représentation de Σ à l'aide des $2=3-1$ paramètres x et y. Notons que, d'un point de vue géométrique, on a ici une représentation paramétrique du plan Σ basée sur les deux vecteurs $\overrightarrow{u}=(1,0,\alpha)$ et $\overrightarrow{v}=(0,1,\beta)$ et sur le point $A=(0,0,\gamma)\in\Sigma$:

$$\Sigma=\{x.(1,0,\alpha)+y.(0,1,\beta)+(0,0,\gamma),\ x,y\in\mathbb{R}\}=\{x.\overrightarrow{u}+y.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{OA},\ x,y\in\mathbb{R}\}$$

Via la représentation géométrique de l'ensemble Σ, il est alors possible de montrer que le point A est un point du plan Σ et que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs parallèles à Σ, non colinéaires entre eux.

Notons également que si les coefficients a et b sont également non nuls, il est possible d'extraire de l'équation (E) deux autres paramétrisations du plan Σ faisant intervenir les paramètres y et z ou x et z (à faire).

- Soit $(S)\ :\ \left\{\begin{array}{ccccccl} x & + & 2y & + & z & = & 1 \quad (E_1)\\ & & y & - & z & = & 0 \quad (E_2)\end{array}\right.$

(S) est un système linéaire de rang 2, portant sur trois inconnues. L'ensemble Σ de ses solutions est donc de dimension 1. Or

$$(E_2)\ \Rightarrow\ y=z$$

et

$$(E_1)\ \Rightarrow\ x=1-2y-z=1-3z$$

Ainsi,

$$\Sigma=\{(1-3z,z,z)\ z\in\mathbb{R}\}$$

On reconnaît une paramétrisation de Σ à l'aide d'un unique paramètre (ici z).

Notons que d'un point de vue géométrique, l'ensemble Σ peut être associé à une droite de l'espace muni d'un repère $\mathcal{R}$. La paramétrisation précédente, vue sous la forme

$$\Sigma=\{(1-3z,z,z)\ z\in\mathbb{R}\}=\{z.(-3,1,1)+(1,0,0),\ z\in\mathbb{R}\}$$

permet d'identifier Σ comme étant l'unique droite de l'espace dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ et passant par le point $A=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$.

Notons également qu'il est possible de tirer de (S) une représentation paramétrique de Σ basée sur le paramètre y.
exercice : à faire. Vérifier que la nouvelle paramétrisation obtenue correspond bien à la même droite de l'espace, bien qu'elle soit basée sur un vecteur $\overrightarrow{u'}$ et un point A' différents.

5.2.7 Résolution pratique

Principe d'élimination

En pratique, la résolution d'un système linéaire (S) donné passe par sa simplification par élimination. Précisément, la méthode consiste à utiliser des *opérations élémentaires* sur les équations du système permettant de transformer le système de départ en un système équivalent (i.e. ayant le même ensemble de solutions) mais dans lequel un maximum d'inconnues ont été éliminées d'un maximum d'équations.

Les opérations élémentaires permettant ces transformations sont les mêmes que pour le calcul de déterminant. Précisément :

- La combinaison de lignes
$$(E_i) \longleftarrow (E_i) + \alpha.(E_j) \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ i \neq j$$
- La permutation de lignes
$$(E_i) \longleftrightarrow (E_j) \qquad i \neq j$$
- La multiplication de ligne
$$(E_i) \longleftarrow \lambda.(E_i)$$

Notes :
- On peut montrer que chacune de ces trois opérations élémentaires conservent l'ensemble des solutions du système linéaire auquel elles sont appliquées.
- En pratique, on préférera travailler sur la matrice étendue du système étudié. Ces opérations ont alors pour but de placer un maximum de 0 dans cette matrice.

Exemple : Soit
$$(\mathcal{S}_1) : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 5 & & (E_1) \\ 2x & + & y & + & z & = & 10 & & (E_2) \\ x & & & + & 2z & = & 0 & & (E_3) \end{array} \right.$$

1. Écrire la matrice étendue $\tilde{A}$ du système (S).
2. Éliminer par combinaison la variable y dans l'équations (E_1) (on appelle encore (E_1) la nouvelle équation obtenue).
3. Éliminer par combinaison la variable x de la nouvelle équation (E_1).
4. Résoudre $(\mathcal{S}_1)$.

Systèmes échelonnés

Soient (S) un système linéaire à n équations et p inconnues A sa matrice. On appelle *i-ème pivot de* (S) le premier coefficient non nul de la i-ème équation de (S) (et donc le premier coefficient non nul de la i-ème ligne de A.

On dira d'autre part que (S) est *échelonné* si le pivot de chacune de ses lignes se trouve strictement à droit du pivot de la ligne précédente.

Enfin, on dira que (S) est *réduit* s'il est échelonné, que chacun de ses pivots vaut 1 et si chaque pivot est l'unique coefficient non nul de sa colonne.

Exemples :

- Pivots :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{4} & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix}$$

- Systèmes échelonnés :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \cancel{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}$$

- Systèmes réduits :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les systèmes échelonnés et réduits sont les systèmes linéaires les plus simples à résoudre.

Ainsi, si (S) est un système de Cramer échelonné, il est triangulaire. Sa matrice A est alors également triangulaire avec chacun de ses termes diagonaux non nuls. Un tel système se résout "en remontant", la dernière équation donnant la valeur de la dernière inconnue et chaque équation (E_i) donnant l'inconnue x_i en fonction des inconnues suivantes $x_{i+1}, \ldots, x_p$.

Notons que si (S) est un système de Cramer réduit, sa matrice A n'est autre que la matrice identité et le système (S) s'écrit directement $X = B$.

Notons également que par construction, un système échelonné (inversible ou non) est nécessairement libre. Son rang est donc égal au nombre d'équations qu'il contient.

Enfin, on verra sur des exemples que, dans le cas des systèmes non inversibles, la forme échelonnée permet

1. de détecter les systèmes incompatibles,
2. de déterminer rapidement une paramétrisation de l'ensemble des solutions si celui-ci est infini.

Pivot de Gauss

Le pivot de Gauss est un procédé algorithmique permettant de transformer n'importe quel système linéaire en un système échelonné (voire réduit) équivalent.

Dans les années à venir, on étudiera en détails cet algorithme et ses différentes déclinaisons et applications.