



Mathématiques générales ISA3

Mise à niveau

Mourad ABOUZAIID

ISABTP 3^e année
2019-2020
version enseignant

Version du 30 août 2019

Table des matières

1	Nombres complexes	5
	Introduction	5
1.1	Le nombre i	5
1.2	L'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes	6
1.3	Opérations dans \mathbb{C}	6
1.4	Conjugué d'un nombre complexe	7
	1.4.1 Définition	7
	1.4.2 Conjugué et opérations	7
1.5	Représentation géométrique et notation exponentielle	8
1.6	Formules de trigonométrie	10
	1.6.1 Propriétés	10
	1.6.2 Linéarisation	11
	1.6.3 Formules de trigonométrie	11
1.7	Exercices	11
2	Fonctions d'une variable réelle	15
2.1	Représentation graphique	15
2.2	Dérivée d'une fonction réelle	16
	2.2.1 Dérivée en un point	16
	2.2.2 Fonction dérivée et dérivées successives	18
	2.2.3 Dérivées des fonctions usuelles	19
	2.2.4 Exercices	21
2.3	Calcul intégral	23
	2.3.1 Définitions	23
	2.3.2 Calcul pratique	25
	2.3.3 Estimation d'une intégrale	27
	2.3.4 Exercices	28
3	Équations différentielles	31
	Introduction	31
3.1	Classification des équations différentielles ordinaires (EDO)	32
3.2	Équations différentielles linéaires	33
	3.2.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz	33
	3.2.2 Structure de l'ensemble des solutions	35
	3.2.3 Équations différentielles linéaires à coefficients constants	36
3.3	Exercices	44

3.3.1	Équations homogènes	44
3.3.2	Équations non homogènes	44
3.3.3	Problèmes de Cauchy	45
4	Fonctions de plusieurs variables	49
	Introduction	49
4.1	Définitions	50
4.1.1	Graphe d'une fonction	51
4.1.2	Isoclines	52
4.2	Fonctions et dérivées partielles	53
4.2.1	Fonctions partielles	54
4.2.2	Dérivées partielles	55
4.3	Plan tangent et différentielle	57
4.3.1	Définition	57
4.3.2	Équation du plan tangent	57
4.3.3	Différentielle	58
4.3.4	Développements limités	59
4.3.5	Recherche d'extrema	62
4.4	Champs de vecteurs	66
4.4.1	Définitions	66
4.4.2	Champs de gradient	68
4.4.3	Variations d'un champs de vecteurs	71
4.4.4	Changements de variables de \mathbb{R}^n	75
4.5	Exercices	77
4.5.1	Représentations graphiques	77
4.5.2	Étude de points critiques	81
4.5.3	Champs de vecteurs	84

Chapitre 1

Nombres complexes

Introduction

Les nombres complexes sont une invention des mathématiciens pour contourner un problème récurrent en calcul algébrique : le carré d'un nombre réel est toujours positif.

Pour contourner ce problème, il a suffi d'inventer un nombre i tel que $i^2 = -1$.

La création d'un tel nombre permet d'envisager des carrés négatifs et permet par conséquent d'envisager la racine carrée d'un nombre négatif.

Ce qui pourrait alors passer pour une simple astuce de mathématicien s'est très vite révélé utile dans de nombreux domaines de la physique, tels que l'électricité, le traitement du signal, ...

D'un point de vue mathématique, les nombres complexes permettent une approche bien plus claire et plus simple de la notion de polynôme et apportent ainsi un nouvel éclairage à tous les domaines des mathématiques et de la physique qui font appel aux polynômes.

Enfin, les nombres complexes se sont révélés très efficaces pour traiter des problèmes de géométrie plane (et donc, là encore, tout problème s'y rapportant).

1.1 Le nombre i

Comme précisé en introduction, on note i le nombre tel que

$$i^2 = -1$$

On dit que i est une racine carrée de -1 . Comme tout nombre réel, -1 admet alors deux racines carrées : i et $-i$.

1.2 L'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes

On appelle nombre complexe tout nombre qui s'écrit sous la forme

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Note : si $y = 0$, $z = x$ est un nombre réel. Autrement dit, l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels est inclus dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes (i.e. tout nombre réel est un nombre complexe).

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$,

- x est appelé *partie réelle* de z ,
- y est appelé *partie imaginaire* de z .

On note

$$x = \operatorname{Re}(z), \quad y = \operatorname{Im}(z).$$

Notes :

- La partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe z sont toutes les deux *réelles*.
- Parmi les nombres complexes, les nombres réels sont ceux dont la partie imaginaire est nulle.
- Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé *imaginaire pure*.

D'autre part, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, on appelle *module* de z la quantité

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Note : ça n'est pas un hasard si le module se note de la même façon que la valeur absolue. On note en particulier que si z est un nombre réel (i.e. si sa partie imaginaire est nulle), alors

$$|z| = \sqrt{x^2} = |x|.$$

1.3 Opérations dans \mathbb{C}

En notant les nombres complexes sous la forme $z = x + iy$, on a une notation permettant de faire des opérations dans les nombres complexes comme on sait le faire dans les nombres réels. Il suffit alors de remplacer i^2 par -1 , ou le contraire quand cela est utile.

Ainsi, si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sont deux nombres complexes la somme $s = z + z'$, le produit $p = z.z'$, le quotient $q = \frac{z}{z'}$ sont encore des nombres complexes. On peut de plus exprimer les parties réelles et imaginaires de s et p en fonction de x, x', y, y' .

Exercice :

- Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes ci-dessous :

$$\begin{array}{lll} z_1 = 2 - 3i, & z_2 = (1 + i) + (2 - 3i), & z_3 = (2 - i).(3 + i), \\ z_4 = (2 + 3i)^2, & z_5 = (2i - 4)^2, & z_6 = (1 + i).(1 - i) \end{array}$$

- Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes.
 - Déterminer en fonction de x, x', y, y' la partie réelle et la partie imaginaire de $z + z'$.
 - Déterminer en fonction de x, x', y, y' la partie réelle et la partie imaginaire de $z.z'$.
 - Déterminer en fonction de x, x', y, y' la partie réelle et la partie imaginaire de $\frac{z}{z'}$.

1.4 Conjugué d'un nombre complexe

1.4.1 Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z = x + iy$ est

$$\bar{z} = x - iy.$$

Autrement dit, \bar{z} est le nombre complexe ayant la même partie réelle que z et dont la partie imaginaire est $\text{Im}(\bar{z}) = -\text{Im}(z)$.

1.4.2 Conjugué et opérations

On peut montrer que si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1.z_2} = \bar{z}_1.\bar{z}_2, \quad \frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

Autrement dit, pour déterminer le conjugué d'un nombre complexe donné, il suffit de remplacer i par $-i$ dans l'écriture de z .

Exercice :

- Vérifier les formules ci-dessus en déterminant la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes ci-dessous :

$$z_1 = (1 + i) + (2 - 3i), \quad z_2 = (2 - i).(3 + i), \quad z_3 = (2 + i).(2 - i)$$

2. Démontrer les formules ci dessus en notant $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$.

D'autre part, à partir des définitions données ci dessus, on peut facilement établir les formules suivantes : pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z), \quad z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

On constate en particulier que si l'on ajoute ou multiplie entre eux un nombre complexe et son conjugué, on obtient un nombre réel.

La dernière formule permet en particulier de déterminer la partie réelle et la partie imaginaire d'un quotient de deux nombres complexes.

Exercice : en multipliant le numérateur et le dénominateur de chaque nombre complexe ci-dessous par le conjugué du dénominateur, déterminer leurs parties réelles et imaginaires.

$$z_1 = \frac{1+i}{1-i}, \quad z_2 = \frac{1-2i}{1-i\sqrt{3}}$$

1.5 Représentation géométrique et notation exponentielle

Un nombre complexe z est associé à deux nombres réels x et y (sa partie réelle et sa partie imaginaire). En fixant un repère (orthonormé) $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$ dans le plan, on peut donc associer à chaque nombre complexe $z = x + iy$ le point $M(z)$ du plan de coordonnées (x, y) . On obtient ainsi une représentation géométrique des nombres complexes ainsi qu'une représentation complexe des points du plan.

Note : par abus de langage, on confond souvent z et $M(z)$. On pourra ainsi parler d'un complexe z du plan.

On peut alors interpréter une partie des notions que l'on vient de voir en termes géométriques. Ainsi,

- Les nombres réels sont les points de l'axe des abscisses, appelé *axe réel*.
- Les imaginaires purs sont les points de l'axe des ordonnées.
- Le module $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ donne la longueur du vecteur \overrightarrow{OM} .
- Le conjugué \bar{z} d'un complexe z correspond, dans le plan, au symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe réel.

D'autre part, outre les coordonnées cartésiennes, il est possible de repérer chaque point du plan à l'aide de ses coordonnées polaires (r, θ) ; $r \geq 0$ donnant la distance \overline{OM}

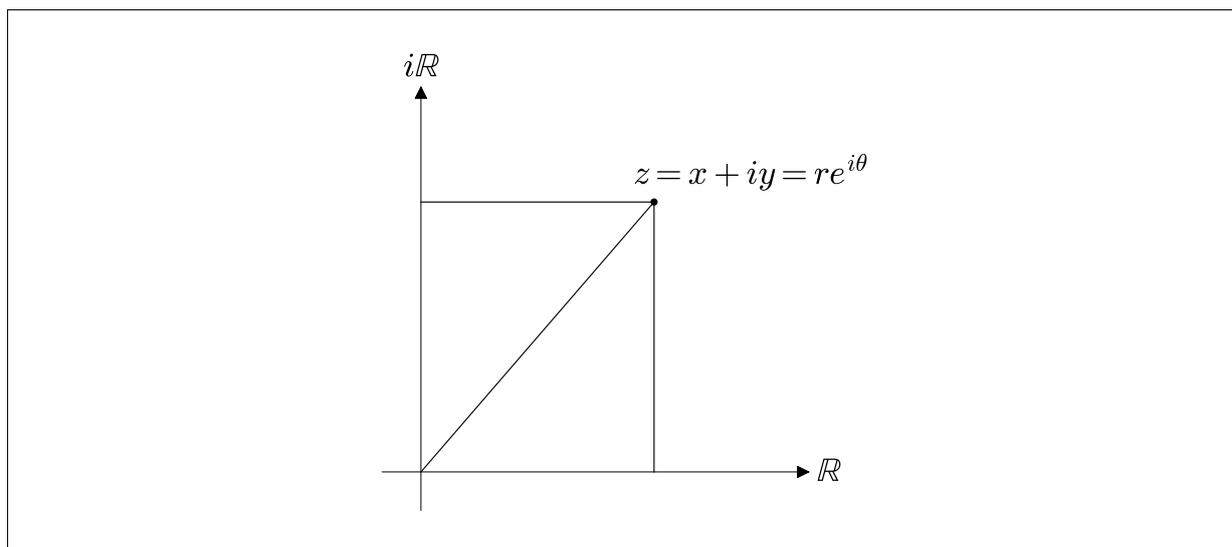
et θ donnant l'angle entre (OM) et l'horizontale. On peut alors représenter un nombre complexe à l'aide de ces coordonnées via la notation suivante :

$$z = re^{i\theta}.$$

Le nombre r n'est autre que le module vu plus haut. L'angle θ est appelé *argument* de z , noté $\arg(z)$.

Exercice : représenter sur le dessin ci-dessous les quantité x , y , r , θ associées au nombre complexe

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$



Cette écriture n'est au départ qu'une notation. Elle a cependant été adoptée car elle permet de faire du calcul.

Ainsi, à l'aide des propriétés de l'exponentielle ($e^{a+b} = e^a \cdot e^b$), si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, on a

$$zz' = (re^{i\theta}) (r'e^{i\theta'}) = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

Autrement dit, pour tous nombres complexes z et z' , on a

- $|z.z'| = |z|.|z'|.$
- $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z').$

De même, si l'on considère un nombre complexe $z = re^{i\theta}$, le conjugué de z est, par définition géométrique, le nombre \bar{z} ayant le même module de z , mais dont l'argument est $-\theta$:

$$\bar{z} = re^{-i\theta}.$$

Autrement dit, comme dans la représentation cartésienne, le conjugué d'un nombre complexe donné sous forme exponentielle est obtenu en remplaçant i par $-i$ dans l'écriture de z .

Enfin, à l'aide de la représentation géométrique, on peut relier les deux écritures (cartésienne et exponentielle) d'un même nombre complexe : si $z = x + iy = re^{i\theta}$, alors

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases}$$

Ainsi, dans le cas particulier des complexes de module 1, on a

$$z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta),$$

dont on déduit facilement les formules d'Euler :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Note : à partir de la notion exponentielle d'un nombre complexe, on peut étendre la fonction exponentielle aux nombres complexes. Précisément, on peut donner un sens à e^z pour $z \in \mathbb{C}$: si $z = x + iy$ est un nombre complexe donné sous forme algébrique, on a

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$$

Autrement dit, le nombre complexe e^z est le nombre complexe dont le module est $e^{\operatorname{Re}(z)}$ et dont l'argument est $\operatorname{Im}(z)$.

1.6 Formules de trigonométrie

Via les formules d'Euler faisant le lien entre nombres complexes et fonctions trigonométriques, il est possible d'établir et de démontrer l'ensemble des propriétés des fonctions trigonométriques ainsi que l'ensemble des formules de trigonométrie.

1.6.1 Propriétés

À l'aide des formules d'Euler, montrer les propriétés suivantes :

1. La fonction sinus est impaire, la fonction cosinus est paire.
2. Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques.

3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta) \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$$

1.6.2 Linéarisation

L'une des applications courantes des formules d'Euler est également la linéarisation des fonctions trigonométriques, consistant à transformer des puissances de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ en sinus et cosinus appliqués à des multiples de θ . Cette linéarisation trouve en particulier de nombreuses applications dans le calcul intégral.

Ainsi,

1. Exprimer $\sin^2(\theta)$ et $\cos^2(\theta)$ en fonction de $\sin(2\theta)$ et $\cos(2\theta)$.
2. Exprimer $\sin^3(\theta)$ et $\cos^3(\theta)$ en fonction de $\sin(3\theta)$, $\cos(3\theta)$, $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$.

1.6.3 Formules de trigonométrie

Enfin, à l'aide des formules d'Euler, on peut également démontrer l'ensemble des formules de trigonométrie. Compléter les formules ci-dessous :

- $\cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos(2a)$
- $2 \sin(a) \cos(a) = \sin(2a)$
- $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$
- $\sin(a + b) = \cos(a) \sin(b) + \sin(b) \cos(a)$

1.7 Exercices

Exercice 1 Écrire sous forme algébrique, puis déterminer les conjugués et les modules des nombres complexes suivants :

$$z = (1 - 2i)^3, \quad z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}, \quad z = \frac{5 + i\sqrt{3}}{2 - i\sqrt{3}}$$

Exercice 2 L'objectif de cet exercice est de montrer l'inégalité triangulaire :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

1. Montrer que pour tout $Z \in \mathbb{C}$, on a :

$$|\operatorname{Re}(Z)| \leq |Z|$$

puis que

$$\operatorname{Re}(Z) \leq |Z|.$$

($\operatorname{Re}(Z)$ désigne ici la partie réelle de Z)

2. Montrer que :

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| + 2\operatorname{Re}(z_1 \cdot z_2).$$

3. En déduire que :

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$$

et conclure.

Exercice 3 1. Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

$$z = 1 + i, \quad z = 1 + i\sqrt{3}, \quad z = \sqrt{3} + i, \quad z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$$

$$z = 3 + 3i, \quad z = -1 - i\sqrt{3}, \quad z = -\frac{4}{3}i, \quad z = -2$$

2. Déterminer l'écriture cartésienne des nombres complexes suivants :

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z = 3e^{-i\frac{\pi}{8}}, \quad z = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3, \quad z = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

3. Calculer

$$z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$$

Exercice 4 Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $z = e^{i\theta}$.

- Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z^2 en fonction de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.
- Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z^2 en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
- Par identification, retrouver les formules trigonométriques portant sur $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.

Exercice 5 1. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexes tels que

$$|z - 1| = 1$$

2. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexes tels que

$$\left| \frac{z - i}{z + i} \right| = 1$$

Exercice 6 Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on note

$$s(z) = (1 - z)(1 - iz).$$

1. Exprimer les parties réelle et imaginaire de $s(z)$ en fonction de x et y .
2. En déduire l'ensemble des nombres complexes z tel que $s(z)$ soit réel (on représentera cet ensemble par une partie du plan).
3. En déduire l'ensemble des nombres complexes z tel que $s(z)$ soit imaginaire pur (on représentera cet ensemble par une partie du plan).

Exercice 7 Soit $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note M_n le point du plan complexe d'affixe z^n .

1. (a) Placer dans le plan complexe les points M_0 à M_7 .
 (b) Que dire des points M_8, M_9, M_{10} ?
 (c) Que dire d'un point M_n quelconque?
2. Montrer que la distance entre deux points M_n et M_{n+1} est constante.
3. Que dire du polygone $(M_0M_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7)$?

Exercice 8 1. Soit

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto e^{it}$$

- (a) Montrer que la fonction f est 2π -périodique, i.e.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t + 2\pi) = f(t)$$

- (b) Donner une description géométrique de l'ensemble

$$f(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} / \exists t \in \mathbb{R} / z = f(t)\}$$

2. Décrire les images des fonctions suivantes :

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad h : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto te^{it} \qquad t \longmapsto \frac{1}{t}e^{it}$$

$$k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \ell : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \cos(t)e^{it} \qquad t \longmapsto (2 + \cos(t))e^{it}$$

* *
*

Chapitre 2

Fonctions d'une variable réelle

Introduction

Une fonction f d'une variable réelle est un procédé qui à chaque valeur x appartenant à une partie D de \mathbb{R} associe une valeur réelle $f(x)$.

La notion de fonction sert ainsi de base à la modélisation de tout problème portant sur une quantité numérique variant en fonction d'un paramètre également numérique.

L'analyse numérique et le calcul différentiel donnent des outils mathématiques permettant de déterminer précisément l'évolution de la quantité $f(x)$ en fonction des variations de x ; ces outils étant basés sur les notions de limite et de dérivée.

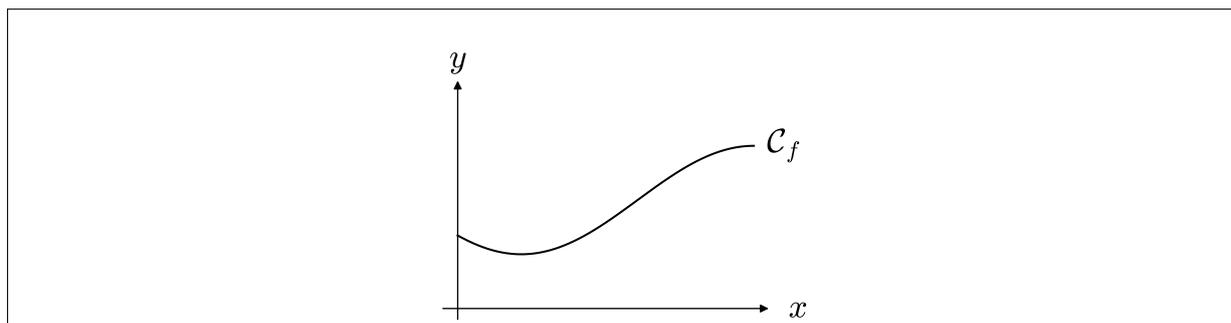
2.1 Représentation graphique

Définition (graphe d'une fonction)

Soit f une fonction réelle définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$. On appelle *graphe de f* dans un repère $\mathcal{R} = (xOy)$ du plan l'ensemble

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}^2\}$$

Si le domaine D est connexe (i.e. d'un seul tenant) et si la fonction f est *continue*, le graphe de f forme une courbe du plan “au dessus” du domaine D , appelée *courbe représentative de f dans \mathcal{R}* (ou courbe de f) :



L'équation de cette courbe dans le repère $\mathcal{R} = (xOy)$ est alors

$$y = f(x)$$

Chaque étape de l'étude d'une fonction réelle peut alors s'interpréter d'un point de vue géométrique par des propriétés particulières de la courbe de f (valeurs particulières, position verticale, horizontale, forme, etc).

Exemples :

1. La valeur $f(0)$ donne l'ordonnée du point d'intersection de la courbe \mathcal{C}_f avec l'axe des ordonnées.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ permet de déterminer l'ensemble des points d'intersection de \mathcal{C}_f avec l'axe des abscisses.
3. La notion de limite permet de comprendre le comportement de f aux bords du domaine de définition.

2.2 Dérivée d'une fonction réelle

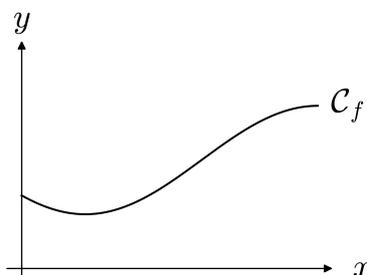
2.2.1 Dérivée en un point

L'un des points fondamentaux de l'étude d'une fonction réelle f (et du phénomène modélisé) porte sur l'étude de ses *variations* : comment évolue la quantité $f(x)$ quand x bouge ?

Définition (Taux de variation) :

Soit f une fonction réelle et x_1 et x_2 deux points distincts de son domaine de définition. On appelle *taux de variation de f entre x_1 et x_2* le quotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$



On peut alors étudier les variations de f *au voisinage* d'un point x_0 de son domaine en considérant de "petite" variations h . Ainsi, le taux de variation de f entre x_0 et $x_0 + h$ est

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0, x_0 + h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

D'un point de vue théorique, on obtient alors une variation instantanée de f en x_0 en ramenant la variation Δx à 0.

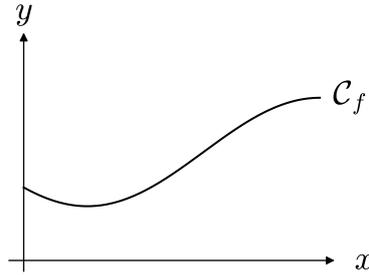
Définition :

On appelle *dérivée de f en x_0* la limite

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (2.1)$$

si celle-ci est un nombre réel fini.

Géométriquement, cette limite donne le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C}_f au point $(x_0, f(x_0))$:



L'équation de cette tangente est alors :

$$T_{x_0} : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Au voisinage de x_0 , cette tangente est alors une bonne approximation de la courbe de f . La fonction

$$\delta_f : x \longmapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

permet alors de calculer de “bonnes” valeurs approchées des quantités $f(x)$ pour x au voisinage de x_0 . Une étude poussée des dérivées permet en outre de préciser la qualité de ces approximations et de poser un cadre théorique à cette notion d'approximation.

En pratique, l'une des premières informations issue du lien existant entre la courbe de f et sa tangente en x_0 est son sens de variation instantané :

- Si $f'(x_0) > 0$, alors f est strictement croissante en x_0 .
- Si $f'(x_0) < 0$, alors f est strictement décroissante en x_0 .
- Si $f'(x_0) = 0$, alors la courbe \mathcal{C}_f admet une tangente horizontale en x_0 .

Dans le dernier cas, la fonction f “marque un palier” en x_0 . C'est en particulier une caractéristique des extrema locaux de la fonction f .

Note : si la limite définissant la dérivée n'existe pas ou si elle est infinie, la fonction n'est pas dérivable en x_0 . Il est cependant possible d'interpréter une éventuelle limite infinie en termes de tangente verticale.

2.2.2 Fonction dérivée et dérivées successives

Si une fonction f admet un nombre dérivé $f'(x)$ pour tout x de son domaine, on peut alors définir sur D la fonction dérivée de f :

$$\begin{aligned} f' &: D \longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

L'étude de cette fonction sur D permet alors de déterminer les variations de f sur D . Par exemple,

Si la fonction f' est de signe constant sur D , alors la fonction f est monotone sur D .

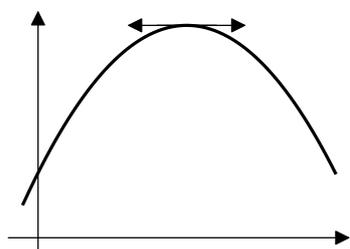
Par ailleurs, si cette fonction admet à son tour des nombres dérivés en chaque point de D , on peut construire la fonction dérivée seconde de f , notée f'' .

L'étude de cette fonction f'' permet de préciser les variations de la fonction f et précise la forme de la courbe de f .

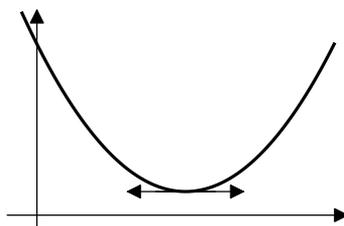
Notons en particulier que localement, si le nombre $f''(x_0)$ existe, sa valeur donne de l'information sur les variations de la fonction f' en x_0 et donc sur la *concavité* de la courbe de f au point d'abscisse x_0 .

Exemple :

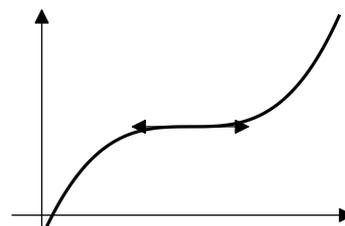
Soit f une fonction vérifiant $f'(x_0) = 0$. Que dire du signe de $f''(x_0)$ dans chacun des cas ci-dessous ?



$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \leq 0$$



$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \geq 0$$



$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) = 0$$

2.2.3 Dérivées des fonctions usuelles

La plupart des fonctions utilisées s'expriment à partir des fonctions usuelles. Cela permet en particulier de calculer la fonction dérivée d'une fonction donnée à partir des fonctions dérivées des fonctions usuelles qui la constituent. Pour dériver une fonction, il suffit donc de connaître les dérivées des fonctions usuelles ainsi que le comportement de la notion de dérivée face aux différentes opérations que l'on peut faire sur les fonctions : somme, produit, quotient, composition :

Fonctions usuelles

Fonctions	Dérivées	Domaine
Cstes		
x		
x^α		
e^x		
$\ln(x)$		
$\sin(x)$		
$\cos(x)$		
$\tan(x)$		
$\arcsin(x)$		
$\arccos(x)$		
$\arctan(x)$		

Opérations et dérivées

Opérations	Dérivées
$a.u(x) + b.v(x), a, b \in \mathbb{R}$	
$u(x).v(x)$	
$\frac{u(x)}{v(x)}$	
$u \circ v(x)$	

Exemples

Fonctions	Dérivées	Fonctions	Dérivées
x^2		$f(ax), a \in \mathbb{R}$	
$\frac{1}{x}$		$e^{u(x)}$	
\sqrt{x}		$\ln(u(x))$	
$ax + b, a, b \in \mathbb{R}$			

2.2.4 Exercices

- Exercice 9** 1. Montrer à l'aide de la définition que la dérivée de la fonction $[f; x \mapsto x^2]$ est nulle en 0.
2. Montrer qu'en un point x quelconque, la dérivée de f est $f'(x) = 2x$

- Exercice 10** Montrer que la fonction $[x \mapsto \sqrt{x}]$ n'est pas dérivable en 0.
Comment interpréter géométriquement la limite obtenue?

- Exercice 11** Soit $f(x) = e^{-x^2}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer le point de \mathcal{C}_f admettant une tangente horizontale.
3. Montrer que c'est un maximum.
4. Calculer $f''(x)$.
5. Déterminer les points de la courbe de f' admettant une tangente horizontale. Que dire de la courbe \mathcal{C}_f en ces points ?
6. Tracer la courbe de f en faisant apparaître l'ensemble des points remarquables mis en évidence dans les questions précédentes.

Exercice 12 Calculer les dérivées des fonctions ci-dessous. On précisera les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de chacune des fonctions.

- a) $f : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$ b) $f : x \mapsto \ln x + \sqrt{1+x^2}$ c) $f : x \mapsto \frac{\arctan(x)}{x^2+1}$
- d) $f : x \mapsto \frac{\sin(x)}{(\cos(x)+2)^4}$ e) $f : x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$ f) $f : x \mapsto \frac{x^a}{a^x}$ ($a > 0$)

Exercice 13 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 14 Soit

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \cos(x) - x^2$$

1. Étudier la parité de f .
2. On étudie f sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$.
 - (a) Montrer que f est dérivable sur I et calculer $f'(x)$ pour tout $x \geq 0$.
 - (b) Montrer que f' est dérivable sur I et calculer $f''(x)$ pour tout $x \geq 0$.
 - (c) Étudier le signe de $f''(x)$ pour tout $x \in I$.
 - (d) En déduire les variations de f' et dresser son tableau de variation (on ne calculera pas les limites de f' aux bord de son domaine).
 - (e) Calculer $f'(0)$ et en déduire le signe de f' sur I .
 - (f) En déduire le tableau de variation de f sur I .
3. Tracer une esquisse du graphe \mathcal{G}_f sur \mathbb{R} .

Exercice 15 Soit f la fonction définie par

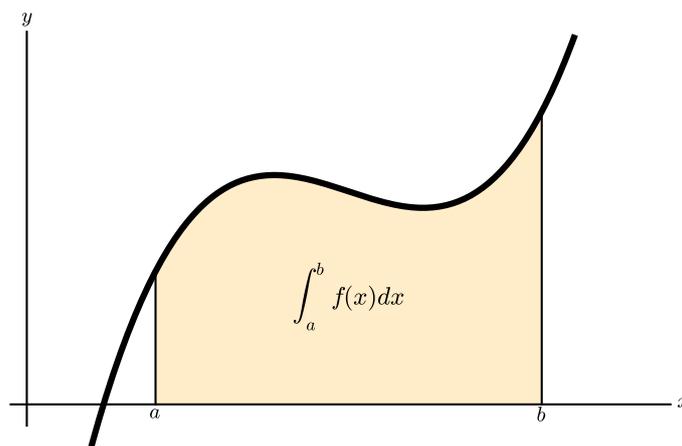
$$f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

1. Montrer que $f(x)$ existe pour tout $x \geq 0$.
2. Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 1$.
4. En déduire une autre expression de $f(x)$ sur $[0, 1]$ puis sur $]1, +\infty[$.

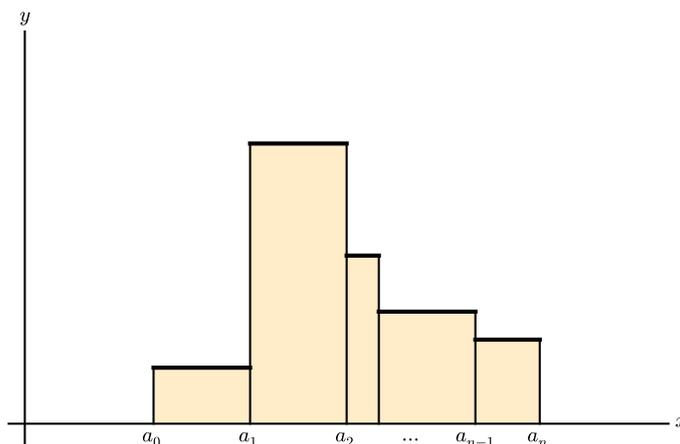
2.3 Calcul intégral

2.3.1 Définitions

Soit f une fonction continue par morceaux, définie sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} . On appelle *intégrale de f sur $[a, b]$* l'aire délimitée par la courbe \mathcal{C}_f d'une part, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ d'autre part :



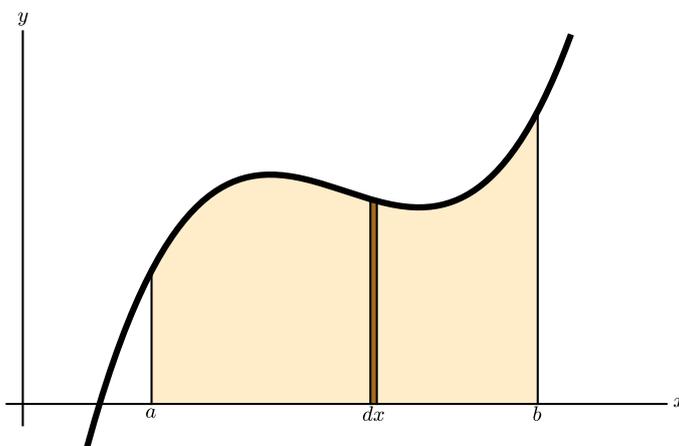
Dans le cas d'une fonction en escaliers, la surface sous la courbe est un assemblage de rectangles. Le calcul d'aire est donc immédiat :



C'est une somme (finie) :

$$\mathcal{A} = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(a_i).$$

Dans le cas général, il faut faire appel aux différentielles. Ainsi, si dx représente un petit décalage des x , on peut approximer la surface sous la courbe contenue entre x et $x + dx$ comme le rectangle de hauteur $f(x)$ et de largeur dx . L'aire sous la courbe est alors la somme des aires de tous ces rectangles :



On note alors :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx.$$

Note : l'aire ainsi calculée est une aire *algébrique*. C'est-à-dire que les parties de la surface qui sont au dessus de l'axe horizontal sont comptées positives et les parties situées sous l'axe horizontal sont comptées négatives.

Par ailleurs, le théorème ci-dessous (théorème fondamental de l'analyse) fait le lien entre intégration et dérivation. Précisément, soit f une fonction continue définie sur un intervalle I . On appelle *primitive de f* sur l'intervalle I une fonction F dérivable telle que

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

On a alors un lien fort entre primitive et intégrale :

Théorème (Théorème fondamental de l'analyse)

Soient f une fonction continue, définie sur un intervalle I et $a \in I$. La fonction

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

est l'*unique primitive de f qui s'annule en a* .

D'autre part, pour n'importe quelle primitive G de f , on a

$$\forall x \in I, \quad \int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a).$$

2.3.2 Calcul pratique

Le théorème ci-dessus donne la principale méthode de calcul pratique d'une intégrale donnée : déterminer une primitive de la fonction que l'on souhaite intégrer. Cependant, il existe certaines manipulations possibles lorsque l'on ne peut accéder directement à une telle primitive. Ainsi,

Proposition (Linéarité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a, b]$ et λ et μ deux réels. Alors

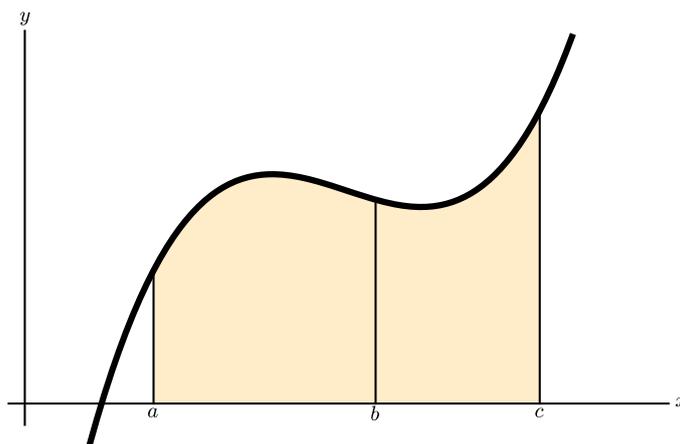
$$\int_a^b \lambda.f(x) + \mu.g(x)dx = \lambda. \int_a^b f(x)dx + \mu. \int_a^b g(x)dx$$

Proposition (Relation de Chasles)

Soit f continue, définie sur $[a, c]$ et soit $b \in [a, c]$. Alors

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

C'est assez clair sur un dessin :



Note : étant donné que

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

(i.e. l'aire d'un segment est nulle), la relation de Chasles permet de montrer la "réversibilité" de l'intégrale. Précisément

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx.$$

Proposition (Intégration par parties)

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Note : l'intégration par parties permet de "déplacer le problème". Il faut pour l'appliquer factoriser la fonction f à intégrer sous la forme d'un produit $u'.v$.

Enfin, l'outil le plus élaboré concernant le calcul intégral est le changement de variable :

Théorème (Changement de variable)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et soit $\varphi : u \mapsto \varphi(u)$ une fonction bijective et dérivable sur un intervalle I telle que $\varphi(I) \subset [a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Dans cette formule, la nouvelle variable est u . Elle est liée à l'ancienne variable x par la relation

$$x = \varphi(u).$$

La fonction φ étant bijective, il est possible de “retourner” cette égalité :

$$u = \varphi^{-1}(x).$$

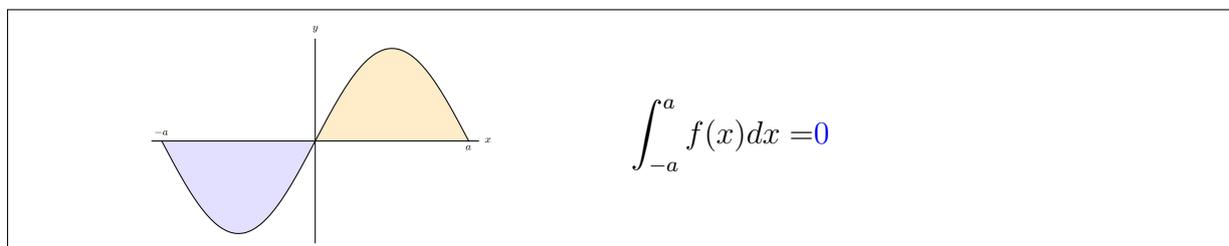
En pratique, un changement de variables se décompose en trois étapes :

- Déterminer la nouvelle fonction à intégrer. Celle-ci est obtenue en remplaçant x par $\varphi(u)$ dans f .
- Déterminer les nouvelles bornes d'intégration $\varphi^{-1}(a)$ et $\varphi^{-1}(b)$.
- Calculer le nouvel élément de longueur $dx = \varphi'(u)du$.

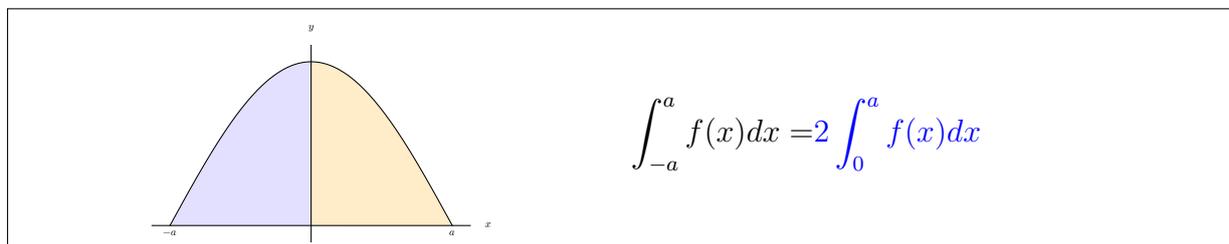
2.3.3 Estimation d'une intégrale

Cas particuliers

Si la fonction f que l'on souhaite intégrer est *impair*, la symétrie par rapport au centre du repère permet de montrer rapidement que si l'on intègre sur un intervalle de la forme $[-a, a]$ ($a > 0$), alors

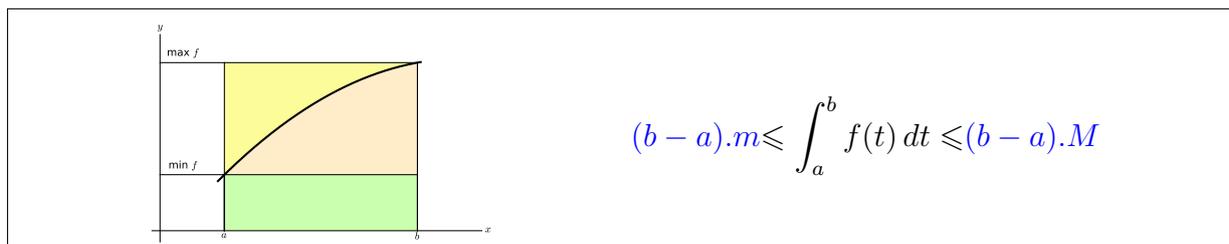


De même, si la fonction f est *pair*, on a, sur le même type d'intervalle :



Encadrement

Puisque l'on travaille sur un intervalle de la forme $[a, b]$ (i.e. fermé borné) et comme les fonctions que l'on intègre sont continues (par morceaux), elles atteignent un minimum m et un maximum M sur $[a, b]$. On peut alors clairement encadrer l'intégrale de f sur $[a, b]$ par



Moyenne

Comme toute somme, l'intégrale permet de calculer une moyenne. Précisément, la moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ est

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

L'intégrale permet de même de généraliser toutes les quantités statistiques bien connues dans le cas d'études discrètes.

2.3.4 Exercices

Exercice 16 *Calcul direct.*

Calculer les intégrales suivantes (il sera peut-être nécessaire de transformer un peu la fonction à intégrer avant de reconnaître des dérivées connues).

	A	B	C	D
1	$\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$	$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$	$\int_{-1}^1 \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$	$\int_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{t}} - 5t^2 \right) dt$
Sol.	$\pi/6$	$\pi/12$	0	-101
2	$\int_1^3 \frac{1+xe^x}{x} dx$	$\int_0^{\ln 2} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx$	$\int_e^{e^e} \frac{dx}{x \ln x}$	$\int_e^{e^x} \frac{\ln t}{t} dt$
Sol.	$\ln 3 + e^3 - e$	$\ln(5/4)$	1	$\frac{1}{2}(x^2 - 1)$
3	$\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$	$\int_0^x \frac{e^t - 2}{e^t + 1} dt$	$\int_0^1 \frac{x^2 - 2}{x+1} dx$	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt$
Sol.	$1 - \ln 2$	$-2x + 3 \ln(e^x + 1) - 3 \ln 2$	$-\frac{1}{2}$	$\pi/2$
4	$\int_0^{\pi/2} 4 \sin x \cos x dx$	$\int_0^t \cos^3 u du$	$\int_0^t \frac{x}{(x-1)^4} dx$	
Sol.	2	$-\frac{1}{3} \sin^3(t) + \sin(t)$	$\frac{(t+3)t^2}{6(t+1)^3}$	

Exercice 17 *Intégrations par parties.*

Calculer les intégrales ci-dessous en intégrant par partie (on prendra soin de commencer par déterminer, dans la fonction à intégrer, le facteur à dériver et le facteur à primitiver).

	A	B	C	D
1	$\int_0^1 x^2 e^{3x} dx$	$\int_0^{\pi/3} t \sin(3t) dt$	$\int_1^t x \ln x dx$ ($t > 0$)	$\int_0^{\pi/4} \sin t \cos t dt$
Sol.	$\frac{1}{27}(5e^3 - 2)$	$\pi/9$	$\frac{1}{4}(2t^2 \ln(t) - t^2 + 1)$	$\frac{1}{4}$
2	$\int_0^{\sqrt{2}/2} \arcsin x dx$	$\int_1^e \ln t dt$	$\int_0^1 e^u \cos(2u) du$	$\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$
Sol.	$\frac{\sqrt{2}}{8}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$	1	$\frac{1}{5}(\cos(2)e + e \sin(2) - 1)$	$\frac{1}{2}\pi + \ln 2 - 2$
3	$\int_1^x \sin(\ln t) dt$	$\int_1^2 \frac{x^2 \ln x}{(1+x^3)^2} dx$		
Sol.	$\frac{1}{2}(-x \cos(\ln(x)) + x \sin(\ln(x)) + 1)$	$\frac{1}{27} \ln\left(\frac{2048}{729}\right)$		

Exercice 18 *Changements de variables*

1. Calculer les intégrales suivantes.

	A	B	C	D
1	$\int_0^3 \frac{1}{9+x^2} dx$ ($u = x/3$)	$\int_1^2 (\ln x)^2 dx$ ($u = \ln x$)	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin t \cos t}{1 - \cos t} dt$ ($x = \cos t$)	$\int_{1/a}^a \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$ ($a > 0, y = 1/x$)
Sol.	$\frac{\pi}{12}$	$2 \ln(2)^2 - 4 \ln(2) + 2$	$-\ln\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}$	0

2. Montrer que

(a) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sin t} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \cos t} dt.$

(b) Si f est impaire et définie sur \mathbb{R} , alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

(c) Si f est paire et définie sur \mathbb{R} , alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

(d) Si f est T -périodique, alors

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$.

(e) Interpréter géométriquement ces résultats.

3. (a) Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi/4} \cos^4 t dt$$

(b) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

(en posant $t = \arctan x$).

Exercice 19 Déterminer les primitives des fonctions suivants. On pourra commencer par décomposer les fractions rationnelles en éléments simples.

	A	B	C	D
1	$\int \frac{dt}{1+t^2}$	$\int \frac{t}{(t^2+1)^3} dt$	$\int \frac{1}{x^2-3x+2} dx$	$\int \frac{x}{x^3+9x} dx$
Sol.	$\arctan t + k$	$-\frac{1}{4(t^2+1)^2} + k$	$\log(x-2) - \log(x-1)$	$\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{1}{3}x\right)$
2	$\int \frac{1}{x^2+x+1} dx$	$\int \frac{2t+1}{t^3-t} dt$	$\int \frac{1}{t^3+1} dt$	$\int \frac{1}{(x^4+1)^2} dx$
Sol.	$\frac{2}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{3}\right)$	$\frac{1}{2} \log\left(\frac{(t-1)^3}{(t+1)t^2}\right)$	$\frac{1}{3} \sqrt{3} \arctan\left(\frac{1}{3}(2t-1)\sqrt{3}\right) + \frac{1}{3} \log\left(\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+1}}\right)$	
3	$\int \frac{x^7}{(x^4-1)(x^2+3)} dx$	$\int \frac{e^t}{e^{2t}-1} dt$	$\int \frac{1}{(x+1)(x+a)} dx$ $a \neq 1$	
Sol.	$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8} \log\left(\frac{\sqrt{x^2-1}(x^2+1)}{(x^2+3)^{\frac{27}{2}}}\right)$	$\frac{1}{2} \log\left(\frac{e^t-1}{e^t+1}\right)$	$(a-1) \log(x+1) + x$	

Chapitre 3

Équations différentielles

Introduction

Les équations différentielles sont l'outil principal permettant de modéliser le mouvement.

En effet, une équation différentielle est une équation liant une fonction et ses dérivées. Or les lois de la physique, notamment sur le mouvement, font le lien entre l'état d'un système et ses variations. C'est en particulier le cas du *Principe Fondamental de la Dynamique* (PFD) donnent l'accélération (i.e. la dérivée seconde de la position) d'un objet, d'une particule,... en fonction des forces qui agissent dessus. Ces forces sont souvent fonctions de la vitesse de l'objet (dérivée première de la position) et/ou de sa position.

Exemples :

- Évolution de la chaleur en un point : $T' = \lambda(K - T)$
- Vitesse de chute libre : $v' = -kv|v|$
- Réaction chimique : $u' = (A - u)(B - u)$
- Oscillateur harmonique : $x'' + \omega_0^2 x = 0$

Si l'on parvient à résoudre de façon exacte les équations ainsi obtenues, on peut connaître à chaque instant l'état du système étudié.

L'objet de ce cours est de présenter différentes méthodes de résolutions.

Notons qu'il existe en réalité très peu d'équations différentielles que l'on sait résoudre de façon exactes. Elles sont en général issues de modèles simples, qui donnent une première idée du comportement de l'objet étudié. Ces équations sont donc triées en différentes classes. Chaque méthode étudiée ne s'appliquera qu'à certains types d'équations.

Si l'on souhaite affiner les modèles on obtient alors en général des équations que l'on ne sait pas résoudre. Il existe différentes méthodes d'études permettant d'obtenir

- de l'information qualitative,

- des solutions approchées (par approximation numérique).

Dans ce cours, nous nous contenterons d'étudier une classe d'équations différentielles pour laquelle il existe un protocole de résolution exacte : les équations différentielles *linéaires*, à coefficients constants.

Nous verrons dans les années à venir différentes méthodes de résolution *approchée*, s'appuyant notamment sur la puissance de calcul d'un ordinateur.

3.1 Classification des équations différentielles ordinaires (EDO)

Formellement, une équation différentielle ordinaire est une équation dont l'inconnue est une fonction y d'une variable réelle t , de la forme

$$\Phi(y, y', y'', \dots, y^{(n)}, t) = f(t)$$

où

- n est un entier, appelé *ordre* de l'équation.
Il correspond à la plus haute dérivée intervenant dans l'équation,
- f est une fonction connue, appelée *second membre* de l'équation.

D'un point de vue théorique, on peut montrer que l'ordre d'une équation différentielle influence directement la taille de l'ensemble des solutions (plus n est élevé, plus l'équation admet de solutions différentes).

D'autre part, le second membre f représente, dans la modélisation, un apport extérieur au système étudié. Si f est nulle, l'équation est dite *homogène*. Cela correspond en général à des systèmes libres (non entretenus).

Par ailleurs, une équation différentielle est dite *linéaire* si la fonction Φ qui la définit est linéaire en y et ses dérivées. Précisément, une équation différentielle linéaire d'ordre n est une équation de la forme

$$(E) : a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n a_k(t) \cdot y^{(k)} = f(t)$$

Les fonctions a_i de la variable t sont *les coefficients* et sont connus.

Si les coefficients d'une telle équation sont constants, l'équation linéaire sera dite à *coefficients constants*. C'est essentiellement ce type d'équation que l'on traitera. On verra qu'il existe, d'un point de vue théorique, une méthode permettant de les résoudre complètement en s'appuyant sur la théorie des polynômes.

Enfin, à l'image des systèmes d'équations algébriques, on appelle *système différentiel* un ensemble de p équations différentielles portant sur p fonctions inconnues y_1, \dots, y_p d'une même variable t :

$$(S) : \begin{cases} \Phi_1(y_1, y_1', \dots, y_1^{(n)}, \dots, y_p, y_p', \dots, y_p^{(n)}, t) = f_1(t) \\ \Phi_2(y_1, y_1', \dots, y_1^{(n)}, \dots, y_p, y_p', \dots, y_p^{(n)}, t) = f_2(t) \\ \vdots \\ \Phi_p(y_1, y_1', \dots, y_1^{(n)}, \dots, y_p, y_p', \dots, y_p^{(n)}, t) = f_p(t) \end{cases}$$

Il est alors possible de classer les systèmes différentiels en fonction des caractéristiques de chacune des fonctions Φ_k ci-dessus. On verra en outre qu'il existe en lien fort entre équations d'ordres n et systèmes différentiels.

3.2 Équations différentielles linéaires

3.2.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Résoudre l'équation différentielle du type

$$(E) : \sum_{k=0}^n a_k(t)y^{(k)} = f(t)$$

consiste à déterminer l'ensemble des fonctions y qui vérifient (E) .

Afin de construire des méthodes permettant de déterminer toutes ces solutions, on commence par étudier la structure de l'ensemble des solutions.

Dans un premier temps, on peut montrer que, en règle générale, une équation du type (E) admet une infinité de solutions. D'un point de vue pratique, cela signifie que l'on peut (ou doit) ajouter des contraintes supplémentaires au problème afin d'obtenir un problème *clos*, i.e. un problème admettant une et une seule solution. Ces contraintes supplémentaires peuvent se donner sous deux formes :

- Des *conditions initiales* : on impose la valeur de y et certaines de ses dérivées en une valeur t_0 fixée :

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \dots$$

- Des *conditions limites* : on impose la valeur de y en différents points du domaine d'étude :

$$y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1, \quad \dots$$

On peut alors montrer que l'ordre de l'équation (E) correspond exactement au nombre de contraintes supplémentaires que l'on doit imposer pour obtenir un problème clos. Précisément,

On appelle *Problème de Cauchy* tout problème différentiel constitué de

- une équation différentielle d'ordre n
- n conditions limites et/ou initiales :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \Phi(y, y', \dots, y^{(n)}, t) = f(t) & (E) \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} & (C.I.) \end{cases}$$

ou

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \Phi(y, y', \dots, y^{(n)}, t) = f(t) & (E) \\ y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1, \dots, y(t_{n-1}) = y_{n-1} & (C.L.) \end{cases}$$

Par ailleurs, un problème de Cauchy sera dit linéaire si l'équation (E) est linéaire.

Le Théorème de Cauchy-Lipschitz assure alors que :

Tout problème de Cauchy linéaire admet une et une seule solution, définie sur un intervalle (ouvert) contenant l'ensemble des valeurs de t imposées par les conditions supplémentaires.

En pratique, ce théorème est une traduction mathématique de la notion de *modèle déterministe* : si l'on connaît l'état d'un système dynamique à un instant donné (les conditions initiales) et que l'on connaît ses règles d'évolution (l'équation), alors on peut connaître l'état du système à chaque instant, donné par l'unique solution du problème de Cauchy {Équation + (C.I.) ou (C.L.)}.

Par ailleurs, à l'ordre 1, ce résultat s'interprète d'un point de vue géométrique de la façon suivante : si (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, en tout point (t_0, y_0) du plan (tOy) passe une et une seule courbe associée à une solution de (E). Autrement dit, l'ensemble des courbes représentant les solutions de (E) ne se croisent jamais

et recouvrent à elles toutes l'ensemble du plan (tOy) .

Enfin, notons que ce résultat, énoncé pour les équations linéaires, se généralise à d'autres classes d'équations différentielles.

3.2.2 Structure de l'ensemble des solutions

Les équations différentielles linéaires forment l'une des rares classes d'équations différentielles pour lesquelles il existe une méthode de résolution systématique. Cette méthode est basée sur une étude approfondie de *la structure* de l'ensemble des solutions d'une telle équation.

Intuitivement, cette structure est issue du *principe de superposition* :

- Soit

$$(H) : a_n(t)y^{(n)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \iff \sum_{k=0}^n a_k(t)y^{(k)} = 0$$

une équation différentielle linéaire à coefficients constants et *homogène*.

Si y_1 et y_2 sont deux solutions de (H) , alors

- la somme $y_1 + y_2$ est encore une solution de (H) ,
- pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le produit λy_1 est encore une solution de (H) .

- Soit

$$(E) : a_n(t)y^{(n)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t) \iff \sum_{k=0}^n a_k(t)y^{(k)} = f(t)$$

une équation différentielle linéaire à coefficients constants et non homogène.

Si y_p est une solution de (E) et y_h une solution de l'équation *homogène* associée à (E) , alors la somme $y_p + y_h$ est encore une solution de (E) .

Exercice : à démontrer

Formellement, cela permet d'établir une analogie entre l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 et les droites du plan ou les plans de l'espace, qui produit une méthode de résolution qui se généralise aux ordres supérieurs. Précisément, on peut montrer que

- Si (H) est une équation différentielle linéaire *homogène* d'ordre n , il existe un nombre n de solutions y_1, \dots, y_n dites *de base* à partir desquelles on peut exprimer l'ensemble des solutions Σ_h de (H) sous forme de *combinaisons linéaires* :

$$\Sigma_h = \{\lambda_1 y_1 + \dots + \lambda_n y_n, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

- Si (E) est une équation différentielle linéaire *non homogène*, en notant y_p une solution de (E) , l'ensemble des solutions Σ de (E) est

$$\Sigma = \{y_h + y_p, \quad y_h \in \Sigma_h\}$$

En pratique, pour une équation différentielle linéaire *homogène* d'ordre n , ce résultat réduit l'étude à la recherche de n solutions de base. On va voir comment construire ces n solutions dans le cas des équations linéaires à *coefficients constants* en s'appuyant sur la notion de polynôme.

Dans le cas non homogène, on commence par résoudre l'équation homogène associée (en trouvant n solutions de base) puis il reste à déterminer *une* solution de l'équation complète. En additionnant cette dernière aux solutions trouvées pour l'équation homogène, on obtient l'ensemble des solutions de l'équation étudiée. En pratique, cette seconde étape est souvent la plus complexe, bien que le problème physique de laquelle est issue l'équation permette parfois d'obtenir une solution particulière "évidente".

Dans tous les cas, l'ensemble des solutions s'exprime alors en fonction de n constantes $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Si l'équation étudiée est issue d'un problème de Cauchy, l'unique solution cherchée est alors obtenue en injectant les conditions supplémentaires dans la forme générale obtenue. En pratique, on obtient ainsi un système de n équations algébriques portant sur les n constantes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que ce système est inversible (i.e. admet une unique solution) et sa résolution donne alors les constantes associées à l'unique solution cherchée.

3.2.3 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Équations homogènes

Équations d'ordre 1. Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants est une équation de la forme

$$(H_1) : \alpha y' + \beta y = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0$$

Quitte à diviser par α (qui est non nul), on peut se ramener à une équation de la forme

$$(H_1) \iff y' = ay$$

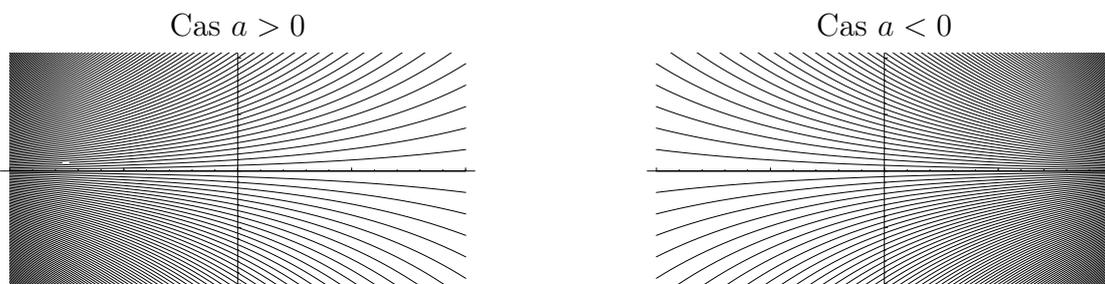
Il y a de nombreuses façons de résoudre ce type d'équations. La théorie évoquée plus haut permet par exemple d'affirmer que l'ensemble des solutions de l'équation (H_1) peut s'exprimer à partir d'une seule solution de base. Or on peut montrer rapidement que la fonction

$$y_1 : t \mapsto e^{at}$$

vérifie l'équation (H_1) (à faire). De ce fait, l'ensemble des solutions de (H_1) est

$$\Sigma_1 = \{\lambda \cdot y_1, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{t \mapsto \lambda \cdot e^{at}, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

D'un point de vue géométrique, on constate que, comme attendu, l'ensemble des courbes associées à chacune de ces solutions ne se rencontrent pas et recouvrent à elles toutes l'ensemble des points du plan :

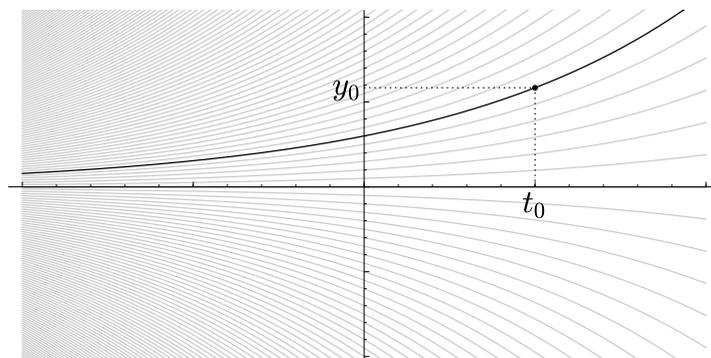


D'autre part, s'il on ajoute à (H_1) une condition supplémentaire du type $y(t_0) = y_0$ donné, on obtient un problème de Cauchy. La constante λ correspondant à l'unique solution de ce problème de Cauchy est obtenue en injectant cette condition supplémentaire dans la forme générale : puisque la fonction cherchée est une solution de (H_1) , elle est de la forme $y : t \mapsto \lambda e^{at}$. Mais alors

$$\begin{aligned} y(t_0) = y_0 &\iff \lambda e^{at_0} = y_0 \\ &\iff \lambda = y_0 e^{-at_0} \end{aligned}$$

la solution cherchée est donc

$$y : t \mapsto y_0 \cdot e^{a(t-t_0)}$$



Équations d'ordre 2. Une équation différentielle linéaire homogène, d'ordre 2, à coefficients constants est une équation de la forme

$$(H_2) : ay'' + by' + cy = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

La théorie relative à la structure de l'ensemble des solutions d'une équation de ce type indique qu'il suffit de déterminer deux solutions indépendantes y_1 et y_2 pour cette équation et qu'alors, l'ensemble des solutions de (H_2) pourra s'exprimer à l'aide de combinaisons linéaires de ces deux solutions de base. Or il est possible de construire ces deux solutions de base à l'aide du *polynôme caractéristique* de l'équation (H_2) , construit à partir des coefficients de (H_2) . Précisément,

Définition

On appelle *polynôme caractéristique* de l'équation (H_2) le polynôme

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

Il est alors possible de construire des solutions de l'équation (H_2) à partir des racines de $P(X)$. Précisément,

Propriété

Si $r \in \mathbb{C}$ est une racine de $P(X)$ (i.e. si $P(r) = 0$), alors la fonction

$$t \mapsto e^{rt}$$

est une solution de (H_2) .

Exercice : à démontrer

Ainsi, si $P(X)$ admet deux racines réelles r_1 et r_2 (i.e. si son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement positif), chacune de ces racines permet de construire une solution de (H_2) et l'ensemble des solutions de (H_2) est

$$\Sigma_2 = \{y : t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Par ailleurs, si le discriminant Δ est strictement négatif, le polynôme $P(X)$ admet encore deux racines distinctes, mais ce sont deux racines complexes conjuguées $r_1 \in \mathbb{C}$ et $r_2 = \bar{r}_1$.

Dans ce cas, il est alors possible de décrire l'ensemble des solutions de (H_2) à l'aide d'exponentielles (complexes), avec une subtilité :

$$\Sigma_2 = \{y : t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \lambda \in \mathbb{C}, \mu = \bar{\lambda}\}$$

Cependant, il est possible d'éviter le passage en complexe à l'aide des fonctions trigonométriques. Précisément, on peut montrer que

Si le polynôme $P(X)$ admet deux racines complexes conjuguées

$$r_1 = \alpha + i\beta \quad \text{et} \quad r_2 = \bar{r}_1 = \alpha - i\beta$$

les fonctions (réelles)

$$y_1 : t \mapsto e^{\alpha t} \cos(\beta t) \quad \text{et} \quad y_2 : t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

sont des solutions de (H_2) .

Exercice : à démontrer.

Ces deux solutions étant indépendantes, l'ensemble des solutions de (H_2) s'écrit alors

$$\Sigma_2 = \{y : t \mapsto e^{\alpha t}(\lambda \cos(\beta t) + \mu \sin(\beta t)), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Enfin, si le discriminant Δ est nul, cela signifie que le polynôme $P(X)$ admet une unique racine réelle r_0 , qualifiée de racine double. Cette racine permet encore de construire une solution de (H_2) , mais il nous manque alors une solution de base. On peut cependant montrer que, dans ce cas, la fonction

$$t \mapsto t.e^{r_0 t}$$

est également une solution de (H_2) (exercice : à démontrer). On a ainsi nos deux solutions de base, et l'ensemble des solutions de (H_2) est alors

$$\Sigma_2 = \{y : t \mapsto \lambda e^{r_0 t} + \mu t.e^{r_0 t}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Notes :

- D'un point de vue qualitatif, on peut distinguer deux situations différentes pour les équations d'ordre 2 :
 - Si le discriminant de l'équation est positif ou nul, les solutions ont un comportement exponentiel.
 - Si le discriminant de l'équation est strictement négatif, les solutions ont un comportement oscillant. Dans ce cas, la partie imaginaire (β) des racines complexes du polynôme caractéristique correspond à la pulsation de l'oscillation et la partie réelle (α) produit un terme d'amortissement (si $\alpha < 0$) en d'entraînement (si $\alpha > 0$).
- Comme pour les équations d'ordre 1, si l'équation (H_2) étudiée est issue d'un problème de Cauchy contenant également deux conditions initiales et/ou limites, l'introduction de ces conditions supplémentaires dans la forme générale des solutions produit un système de deux équations à deux inconnues (les coefficients λ et μ) admettant une unique solution permettant d'obtenir l'unique solution au problème de Cauchy étudié.

Équations d'ordre n . De façon générale, il est possible d'étendre cette méthode de résolution aux équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants de *n'importe quel ordre n* . Précisément, si (H) est une équation de ce type :

$$(H) : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

on peut, à partir des coefficients a_i construire le polynôme caractéristique de (H) :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

C'est un polynôme degré n admettant $p \leq n$ racines distinctes r_1, r_2, \dots, r_p et une forme factorisée du type

$$P(X) = a_n (X - r_1)^{\alpha_1} (X - r_2)^{\alpha_2} \dots (X - r_p)^{\alpha_p}$$

où les entiers $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ donnent les *ordres de multiplicité* des racines associées et vérifient

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k = n$$

Chaque racine r d'ordre de multiplicité α produit alors α solutions distinctes :

$$[t \mapsto e^{rt}], [t \mapsto te^{rt}], \dots, [t \mapsto t^{\alpha-1} e^{rt}]$$

et l'on obtient ainsi les n solutions de base.

Note : si $P(X)$ admet des racines complexes, alors celles ci sont conjuguées deux à deux. Pour deux racines complexes conjuguées r et \bar{r} ayant le même ordre de multiplicité α , on peut alors remplacer les 2α solutions complexes par des fonctions trigonométriques, multipliée par des puissances de t .

Le cas non homogène

Soit

$$(E) : \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = f(t)$$

une équation différentielle linéaire à coefficients constants non homogène. D'après la théorie évoquée plus haut, la résolution de (E) se fait en deux étapes :

1. Déterminer l'ensemble Σ_h des solutions de l'équation homogène

$$(H) : \sum_{k=0}^n a_k y^{(k)} = 0$$

en appliquant le protocole du paragraphe ci-dessus.

2. Déterminer UNE solution particulière y_p de (E) .

Comme cela a été évoqué, l'ensemble Σ des solutions de (E) est alors

$$\Sigma = \{y_h + y_p, \quad y_h \in \Sigma_h\}$$

Notons que cette seconde étape est souvent la plus compliquée à résoudre. Cependant, il n'est pas rare que le contexte physique duquel est en général issu l'équation à résoudre produise une solution évidente.

Par ailleurs, il est également possible de s'inspirer du second membre $f(t)$ pour chercher cette solution "évidente". Précisément, dans chacun des cas énoncés ci-dessous, on cherche une solution ayant la même forme que le second membre. En introduisant des paramètres dans la forme en question, on peut calculer les dérivées successives de la fonction cherchée et injecter la forme choisie dans l'équation. Par identification, on obtient alors des conditions sur les paramètres choisis. Si l'on peut satisfaire l'ensemble des ces conditions, on obtient une solution particulière y_p . Sinon, c'est que l'équation étudiée n'a pas de solution sous la forme cherchée. Ainsi,

- Si la fonction f est une constante, on peut chercher une solution particulière sous la forme $y_p(t) = k$. L'équation (E) donne alors des conditions sur la constante k .
- Si la fonction f est un polynôme, on cherche une solution y_p sous la forme d'un polynôme *de même degré*. L'équation (E) donne alors des conditions sur les coefficients de ce polynôme.
- Si la fonction f est de la forme $f(t) = P(t)e^{\alpha t}$, on cherche y_p sous la forme $y_p(t) = Q(t)e^{\alpha t}$ où $Q(t)$ est un polynôme de même degré que $P(t)$. L'équation (E) donne là encore des conditions sur les coefficients du polynôme $Q(t)$.
- Si la fonction f est de la forme $f(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$, on cherche y_p sous la forme $y_p(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$. L'équation donne alors des conditions sur les coefficients a et b .

Notes :

- Comme cela a été évoqué plus haut, il n'est pas certain que cette méthode marche à tous les coups. Cependant, si cela ne donne rien, on peut recommencer en multipliant la forme choisie par t (ce qui revient à augmenter le degré du polynôme cherché lorsqu'un polynôme intervient).
- Si le second membre f est une somme de fonctions du type de celles évoquées ci-dessus, à l'aide du principe de superposition, il est possible de traiter chaque terme de cette somme séparément. Ainsi, si par exemple $f(t) = 1 + e^{2t}$, on peut traiter l'équation avec pour second membre $f_1(t) = 1$, puis traiter l'équation avec pour second membre $f_2(t) = e^{2t}$. On obtient ainsi deux solutions particulières y_{p1} et y_{p2} et on peut montrer que la somme $y_p = y_{p1} + y_{p2}$ est une solution particulière

pour l'équation de départ.

Enfin, à l'ordre 1, quand l'instinct ne nous donne rien, on peut appliquer la méthode de *variation de la constante* : la résolution d'une équation linéaire homogène d'ordre 1 produit une constante. On a vu par exemple que les solutions de l'équation $y' = ay$ sont

$$y(t) = \lambda e^{at}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si l'on souhaite résoudre une équation de la forme $y' - ay = f(t)$ où $f(t)$ est connue (non nulle), on peut alors chercher une solution particulière de cette équation sous la forme

$$y_p(t) = \lambda(t)e^{at}.$$

(On fait varier la constante issue de la résolution de l'équation homogène associée). Dans ce cas, on a

$$y_p'(t) = \lambda'(t)e^{at} + \lambda(t).ae^{at}$$

et en injectant y_p dans l'équation, on obtient :

$$\begin{aligned} y_p'(t) - ay_p(t) = f(t) &\Leftrightarrow (\lambda'(t) + \cancel{a\lambda(t)})e^{at} - \cancel{a\lambda(t)}e^{at} = f(t) \\ &\Leftrightarrow \lambda'(t) = f(t)e^{-at}. \end{aligned}$$

Si l'on peut trouver une primitive à la fonction $t \mapsto f(t)e^{-at}$, on trouve $\lambda(t)$ puis une solution particulière à l'équation étudiée.

Pour finir, notons que si l'équation étudiée (E) est issue d'un problème de Cauchy, il faut prendre soin de terminer complètement la résolution de l'équation (E) avant d'introduire les conditions supplémentaires.

Petits systèmes différentiels linéaires

Les méthodes ci-dessus s'adaptent également à la résolution de "petits" systèmes différentiels linéaires dont chaque équation est linéaire à coefficients constants. À l'aide de quelques manipulations élémentaires des équations d'un tel système, on peut en effet, pour un système d'ordre 1 de n équations portant sur n fonctions inconnues, faire apparaître, une équation d'ordre n portant sur l'une des n inconnues. Cette équation hérite de l'ensemble des propriétés du système de départ et peut donc être résolue à l'aide des méthodes évoquées plus haut. Une fois cette équation résolue, on se base sur les équations du système pour en déduire la forme des autres fonctions inconnues.

Exemple : soit

$$(S) : \begin{cases} x' = 2x + y & (E_1) \\ y' = -x + y & (E_2) \end{cases}$$

1. À l'aide de la première équation, exprimer les fonctions y et y' en fonction de x et de ses dérivées.
2. Montrer, à l'aide de la question précédente que x vérifie l'équation

$$(E) : x'' - 4x' + 5x = 0$$

3. En déduire $x(t)$ puis $y(t)$ sous forme explicite.

Note : on verra qu'il existe une correspondance forte entre systèmes différentiels de n équations d'ordre 1 et équations d'ordre 1. On verra également qu'à l'aide du calcul matriciel, il est possible de mettre en place des méthodes d'étude efficaces pour les systèmes différentiels. Ces méthodes sont tellement efficaces qu'à l'inverse de ce que l'on vient de faire dans l'exemple ci-dessus, on préférera transformer une équation d'ordre n en un système de n équations d'ordre 1 pour pouvoir appliquer les appliquer.

3.3 Exercices

3.3.1 Équations homogènes

Exercice 20 Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes. On donnera dans chaque cas la limite des solutions $y(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$.

$$(E_1) : y' - y = 0 \qquad (E_2) : y' - 2y = 0$$

$$(E_3) : y' + \frac{1}{2}y = 0 \qquad (E_4) : y' + a^2y = 0$$

Exercice 21 Pour chacune des équations ci-dessous,

1. déterminer le polynôme caractéristique,
2. déterminer les racines de ce polynôme caractéristique,
3. en déduire les solutions de l'équation sous forme d'une somme d'exponentielles.

$$(E_1) : y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad (E_2) : y'' + 2y' + 2y = 0 \qquad (E_3) : y'' - y = 0$$

$$(E_4) : y'' + 4y' + 4y = 0 \qquad (E_5) : y''' - y' = 0 \qquad (E_6) : y''' - y'' - y' + y = 0$$

3.3.2 Équations non homogènes

Exercice 22 Déterminer l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes. On commencera par résoudre l'équation homogène associée, puis on cherchera une solution particulière au y_p de la solution complète en s'appuyant sur la forme du second membre.

$$(E_1) : y'' - 3y' + 2y = 1 \qquad (E_2) : y'' + 2y' + 2y = e^{-t}$$

$$(E_3) : y'' - 2y' + y = t^2 \qquad (E_4) : y'' - y = t - 1$$

Exercice 23 Déterminer l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes. On commencera par résoudre l'équation homogène associée, puis on cherchera une solution particulière au y_p de la solution complète à l'aide de la méthode de variation de la constante.

$$(E_1) : y' - 2y = \sin t \quad (E_2) : y' + y = t + 1 \quad (E_3) : y' - a^2y = \frac{e^{a^2t}}{a^2 + t^2}$$

3.3.3 Problèmes de Cauchy

Exercice 24 On place une bille de plomb dans un four à température K constante. La physique nous dit que les variations de la température $T(t)$ de la pièce de métal sont proportionnelles à la différence $T(t) - K$.

1. Traduire cet énoncé en une équation différentielle (E) d'ordre 1. On notera $\alpha > 0$ la constante de proportionnalité et T_0 la température de la bille à l'entrée du four et l'on prendra soin de vérifier que l'équation obtenue traduit bien le fait que, si $K > T(t)$, alors la température de la bille augmente.
2. Identifier le type de l'équation obtenue.
3. En s'appuyant sur le problème physique, donner une solution évidente de l'équation (E) .
4. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E) .
5. Donner la température de la bille à chaque instant t en fonction de T_0 , K , α (et t , bien sur).
6. La température de fusion du plomb est de $327,5^\circ$ C. On donne $\alpha = 4$ (pour t exprimé en heures), $T_0 = 30^\circ$ et $K = 500^\circ$. Au bout de combien de temps la bille de plomb est-elle fondue ?

Exercice 25 Résoudre les problèmes aux conditions initiales ci dessous.

$$(P_1) : \begin{cases} y'' + 2y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases} \quad (P_2) : \begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$(P_3) : \begin{cases} y'' + 4y' + 4y = t^2 - 1 \\ y(0) = \frac{1}{8}, y'(0) = 1 \end{cases} \quad (P_4) : \begin{cases} y'' + y = \sin(2t), \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(P_5) : \begin{cases} y'' + y = \sin(t), \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Notes :

- Si le polynôme caractéristique admet des racines complexes, on exprimera l'unique solution du problème à l'aide des fonctions sinus et/ou cosinus).
- Dans chaque cas, on étudiera le comportement de la solution trouvée quand $t \rightarrow +\infty$.

- Pour le problème (P_4) , on cherchera une solution particulière de l'équation complète sous la forme $y_p(t) = \alpha \sin(2t)$.
- Pour le problème (P_5) , on cherchera une solution particulière de l'équation complète sous la forme $y_p(t) = \alpha t \sin(t) + \beta t \cos(t)$.

Exercice 26 Soit $(P) : \begin{cases} y'' + 3y' + x + e^x = 0, & (E) \\ y(0) = 1, y'(0) = -\frac{5}{36} & (C.I.) \end{cases}$

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à (E) .
2. Déterminer une solution particulière y_{p1} de l'équation

$$(E_1) : y'' + 3y' = -x.$$

3. Déterminer une solution particulière y_{p2} de l'équation

$$(E_2) : y'' + 3y' = -e^x.$$

4. Montrer que $y_p = y_{p1} + y_{p2}$ est une solution de l'équation (E) .
5. En déduire les solutions de (E) .
6. Déterminer, parmi les solutions de (E) l'unique solution respectant les conditions initiales $(C.I.)$.

Exercice 27 On considère le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathcal{O}; i, j)$ dans lequel on considère un pendule attaché à une corde dont l'une des extrémités est fixée en \mathcal{O} .

À l'équilibre, le pendule est immobile sous le point \mathcal{O} .

À l'instant $t = 0$, on décale le pendule de la verticale d'un petit angle θ_0 et on le lâche sans vitesse initiale.

Pour tout $t \geq 0$, on repère la position du pendule par l'angle $\theta(t)$ que fait la corde avec la verticale. Les lois de la physique produisent l'équation différentielle suivante :

$$(E) : \theta'' + \theta' + \sin(\theta) = 0$$

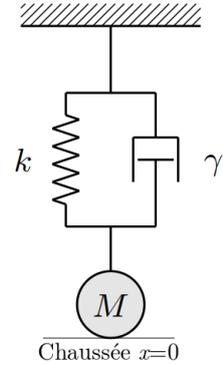
1. Faire un dessin du système à $t = 0$.
2. L'équation (E) est-elle linéaire? Justifier.
3. En supposant que $\theta(t)$ reste petit si θ_0 est petit, transformer l'équation (E) en une équation linéaire à l'aide du D.L. de la fonction sinus en 0.
4. Résoudre l'équation linéaire associées aux conditions initiales données par l'énoncé et décrire le mouvement du pendule.

Exercice 28 Le dispositif ci-contre représente un amortisseur de voiture. Il est composé d'un ressort de raideur $k > 0$ couplé à un piston hydraulique de paramètre $\gamma > 0$. En notant M la masse suspendue au dispositif et $x(t)$ la hauteur de cette masse à l'instant t , les lois de la physique permettent de montrer que la fonction x est solution de l'équation différentielle

$$(E) : Mx'' + \gamma x' + kx = 0$$

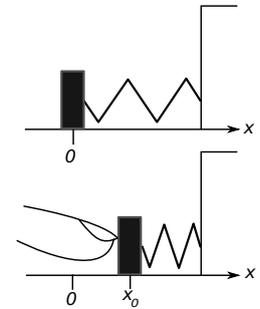
($x(t) = 0$ représentant le contact de la roue avec la chaussée).

1. Donner les caractéristiques de l'équation (E).
2. Déterminer, en fonction de M , γ et k , le polynôme caractéristique de (E).
3. En déduire une condition sur M , γ et k pour que les solutions de (E) ne soient pas oscillantes.
4. Montrer que sous ces conditions, les solutions de (E) convergent vers 0 à une vitesse exponentielle.
5. Déterminer une condition sur M , γ et k pour que, si la roue quitte la chaussée à $t = 0$, elle revienne au contact le plus rapidement possible.



Exercice 29

On considère un ressort posé à plat contre un mur, une pièce de bois de masse m étant fixée à son extrémité. On note $x = 0$ l'abscisse de la position au repos. On appuie alors sur la pièce pour la placer au point d'abscisse x_0 puis on lâche (avec une vitesse nulle). On suppose que le ressort exerce à chaque instant une pression proportionnelle à la position de la pièce. On notera $m \cdot k^2$ le coefficient de proportionnalité. Enfin, on suppose que le plan horizontal exerce sur la pièce de bois une force de frottement opposée au mouvement. On suppose que cette force de frottement est proportionnelle à la vitesse de la pièce avec un coefficient de proportionnalité de la forme $2m\varphi$, $0 \leq \varphi < k$.



1. (a) Faire le bilan des forces agissant sur la pièce de bois à chaque instant.
- (b) En déduire l'équation différentielle (E) vérifiée par la fonction position x .
- (c) Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation. On pourra poser $\omega_0 = \sqrt{k^2 - f^2}$.
- (d) Déterminer, parmi toutes ces solutions celle qui vérifie les conditions initiales données par l'énoncé.
- (e) Décrire le mouvement de l'objet. On étudiera en particulier le cas $\varphi = 0$.

On supposera dans toute la suite que $\varphi = 0$. On a alors $\omega_0 = k$.

2. Dans cette question, on modifie le dispositif de sorte que le mur auquel est accroché le système est soumis à un mouvement périodique de pulsation $\omega \neq \omega_0$, qui impose à chaque instant une force horizontale supplémentaire donnée par la fonction $f : t \mapsto m \cdot \sin(\omega t)$.
- (a) Déterminer l'équation différentielle (E_1) qui régit maintenant le mouvement de la pièce.
 - (b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E_1) (on cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto \alpha \sin(\omega t)$).
 - (c) Déterminer l'unique solution de (E_1) vérifiant également les conditions initiales $x(0) = x'(0) = 0$ et décrire le mouvement de la pièce de bois.
3. On suppose maintenant que la force imposée par le mur est donnée par la fonction $g : t \mapsto m \cdot \sin(\omega_0 t)$.
- (a) Déterminer l'équation différentielle (E_2) qui régit maintenant le mouvement de la pièce.
 - (b) Montrer que (E_2) ne peut avoir de solution de la forme $t \mapsto \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)$.
 - (c) Déterminer une solution particulière de (E_2) sous la forme $t \mapsto (at + b) \cos(\omega_0 t)$.
 - (d) En déduire l'ensemble des solutions de (E_2) puis l'unique solution de (E_2) associée aux conditions initiales $x(0) = x'(0) = 0$.
 - (e) Décrire le mouvement de l'objet. On comparera le résultat obtenu avec celui obtenu à la question 2c.

Chapitre 4

Fonctions de plusieurs variables

Introduction

Une fonction de plusieurs variables est une fonction f liant une quantité $f(x_1, \dots, x_n)$ à un ensemble de variables x_1, \dots, x_n .

Comme les fonctions d'une variable, elles permettent de représenter des quantités, des positions, etc. Elles permettent donc de modéliser des situations complexes dépendant de plusieurs paramètres. Ainsi,

- la densité (ou la résistance ponctuelle, ou la température) d'une poutre carrée peut, en première approximation, être représentée par une fonction d'une variable x ,
- les caractéristiques d'un plancher peuvent être représentées par des fonctions de deux variables ou trois variables selon la précision souhaitée,
- si l'on étudie des phénomènes qui évoluent au cours du temps, il faut ajouter le temps.

L'étude de ces fonctions permet donc de modéliser et d'étudier en détails l'évolution, la géométrie, la composition de nombreux problèmes physiques.

Les outils développés pour l'analyse de ces fonctions généralisent ceux que l'on connaît en dimension 1 : limites, dérivées, D.L., tangentes, ...

Comme en dimension 1, ces nouveaux outils associés aux lois de la physique appliquées à des phénomènes à plusieurs dimensions produisent des équations liant les fonctions associées à leurs dérivées.

Les équations ainsi obtenues sont dites *Équations aux Dérivées Partielles* (EDP). L'analyse en plusieurs dimensions permet de développer des méthodes de résolution pour certaines de ces équations, notamment celles issues des modèles les plus simples. On en verra quelques exemples, mais au même titre que pour les Équations Différentielles Ordinaires (EDO), pour les modèles plus complexes, les scientifiques sont souvent amenés à se tourner vers des méthodes de résolution approchée, basées sur le calcul numérique. Une partie du travail des chercheurs en sciences "dure" actuellement consiste à développer des outils informatiques (des programmes) donnant une solution approchée fiable à ce type d'EDP.

Nous verrons dans un premier temps comment, en dimension 2, on peut généraliser la notion de courbe connue pour les fonctions d'une variable.

On aura alors un outil géométriques pour comprendre la généralisation des outils plus analytiques aux dimensions supérieures que nous verrons ensuite.

4.1 Définitions

Formellement, une fonction f dépendent de n variables une application qui à un jeu de n coordonnées (x_1, x_2, \dots, x_n) associe une quantité $f(x_1, \dots, x_n)$. L'ensemble des n -uplets pour lesquelles cette quantité existe est le *domaine de définition* de f . C'est une partie D de l'ensemble \mathbb{R}^n . On note

$$f : \begin{array}{l} D \\ X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \longmapsto \end{array} \begin{array}{l} \mathbb{R} \\ f(X) = f(x_1, \dots, x_n) \end{array}$$

Exemples :

- Dans le cas $n = 2$, ce domaine de définition correspond à une partie du plan (muni d'un repère orthonormé) :

$f(x, y) = \sin(x + y),$	$D = \mathbb{R}^2$	
$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2},$	$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$	le plan privé du centre
$f(x, y) = \frac{1}{x - y},$	$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{x = y\}$	le plan privé de la première bissectrice
$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 + y^2},$	$D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$	le disque unité

- Dans le cas $n = 3$, ce domaine de définition correspond à une partie de l'espace :

$$\begin{array}{ll}
 f(x, y, z) = 2xy + z^2 & D = \mathbb{R}^3 \\
 f(x, y, z) = \frac{1}{x - y - z} & D = \mathbb{R}^3 \setminus \{x - y - z = 0\} \\
 f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2} & D = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\} \\
 f(x, y, z) = \ln \left(x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} - 1 \right) & D = \left\{ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} > 1 \right\}
 \end{array}$$

4.1.1 Graphe d'une fonction

À l'image de ce que l'on connaît pour les fonctions d'une variable, on peut également définir *le graphe* d'une fonction de plusieurs variables.

Définition (graphe d'une fonction)

Soit f une fonction de n variables, définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}^n$. On appelle *graphe de f* l'ensemble

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_f &= \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)), (x_1, \dots, x_n) \in D\} \\
 &= \{(X, f(X)), X \in D\} \subset \mathbb{R}^{n+1}
 \end{aligned}$$

ATTENTION : le graphe de f est un sous ensemble de \mathbb{R}^{n+1} .

Dans le cas $n = 1$, on retrouve la courbe de f :

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)), x \in D\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = f(x)\}$$

Il s'agit de la courbe d'équation $y = f(x)$, inscrite dans le plan muni d'un repère.

Dans le cas $n = 2$, le graphe de f est ainsi le sous ensemble de \mathbb{R}^3 défini par

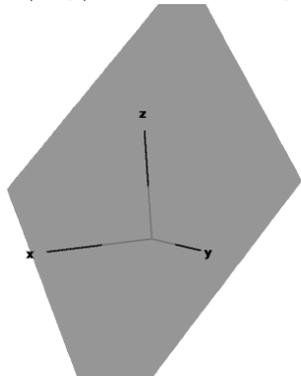
$$\mathcal{S}_f = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in D\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x, y)\}$$

Ce graphe peut ici être représenté par *une surface* de l'espace muni d'un repère : la surface d'équation $z = f(x, y)$.

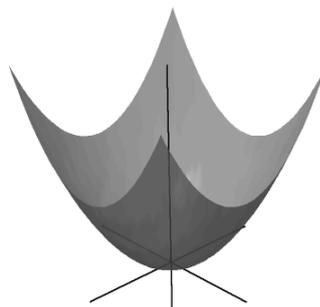
De façon générale, le graphe d'une fonction de n variables est une *l'hypersurface* de \mathbb{R}^{n+1} .

Exemples :

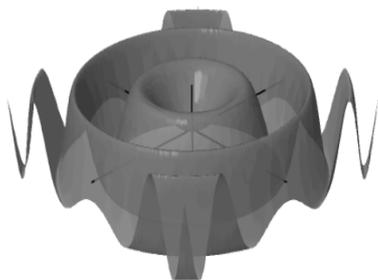
$$\begin{aligned} \ell : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto -x - y + 1 \end{aligned}$$



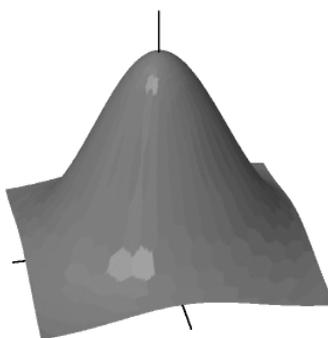
$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 + y^2 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} s : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sin(x^2 + y^2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto e^{-x^2 - y^2} \end{aligned}$$



4.1.2 Isoclines

Définition (Isoclines)

Soit f une fonction de n variables, définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$. Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on appelle *isocline de niveau h* l'ensemble

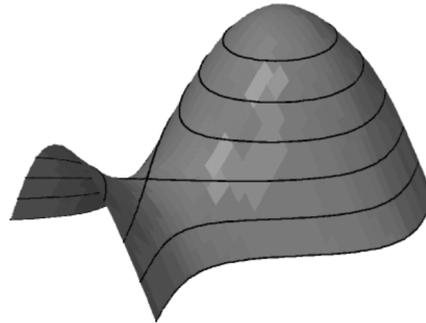
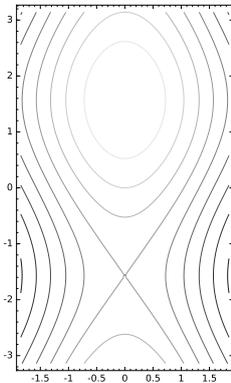
$$I_h = \{(x_1, \dots, x_n) \in D \mid f(x_1, \dots, x_n) = h\}$$

Toute isocline est ainsi un sous ensemble de \mathbb{R}^n .

Dans le cas $n = 2$, les isoclines d'une fonction donnée sont (en général) *des courbes* du plan, appelées aussi *courbes de niveaux*, définies par l'équation *implicite*

$$f(x, y) = h$$

On retrouve également cette isocline sur la surface \mathcal{S}_f en reliant entre eux tous les points d'altitude h , i.e. en coupant \mathcal{S}_f par le plan horizontal d'équation $z = h$.



Dans le cas $n = 3$, les isoclines d'une fonction donnée sont (en général) *des surfaces* de l'espace, définies par l'équation *implicite*

$$f(x, y, z) = h$$

4.2 Fonctions et dérivées partielles

Soit f une fonction de n variables (x_1, \dots, x_n) définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$. Comme pour les fonctions d'une variable, l'étude de f a pour but d'étudier l'évolution de f en fonction des variations des n variables. Cependant, dans le cas général, l'étude de ces variations est rendu plus complexe que dans le cas $n = 1$ du fait de l'indépendance des variables.

L'essentiels du travail d'analyse consiste alors à déterminer dans quelle mesure il est possible d'étudier les variables séparément.

4.2.1 Fonctions partielles

Définition (fonctions partielles)

Soit f une fonction de n variables, définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ et soit $P = (a_1, \dots, a_n)$ un point de D .

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la i -ème fonction partielle de f est la fonction f_i définie par

$$f_i : x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$(a_1, \dots, x, \dots, a_n) \in D$$

Il s'agit de fonctions d'**une** variable. Il est en particulier possible de représenter ces différentes fonctions partielles par des courbes, et de les étudier à l'aide des outils d'analyse en dimension 1. L'étude de ces courbes permet alors d'obtenir de l'information concernant la fonction f *au voisinage* du point $P \in D$.

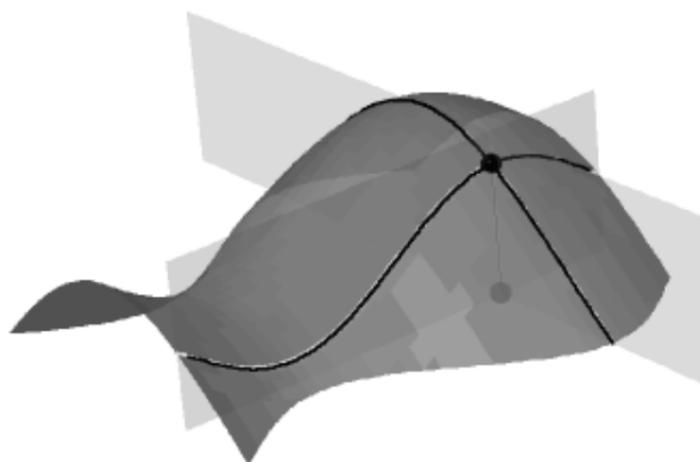
Dans le cas $n = 2$, il est également possible de retrouver les courbes de ces fonctions partielles sur la surface.

Précisément, soit f une fonction de deux variables (x, y) et $P = (a, b)$ un point de son domaine de définition. Les fonctions partielles de f en P sont

$$f_1 : x \mapsto f(x, b) \quad \text{et} \quad f_2 : y \mapsto f(a, y)$$

Les courbes des fonctions f_1 et f_2 sont alors les courbes de la surface \mathcal{S}_f obtenues la coupant par les plans d'équations

$$x = a \quad \text{et} \quad y = b$$



la courbe de la fonction partielle $f_1 : x \mapsto f(x, b)$ est exactement la courbe obtenue en coupant \mathcal{S}_f par le plan vertical d'équation $y = b$.

4.2.2 Dérivées partielles

Les fonctions partielles définies ci-dessus étant en particulier des fonctions d'une variable, il est possible de les étudier avec les outils de l'analyse. On peut en particulier envisager de les dériver. On définit ainsi les *dérivées partielles de f* . Précisément,

Définition (dérivées partielles)

Soit f une fonction de n variables, définie au voisinage d'un point $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit $i \in \{1, \dots, n\}$.

La fonction f est dite dérivable par rapport à sa i -ème variable en P si la limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

existe dans \mathbb{R} . On note alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, a_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

Note : en note $E_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, on a également la notation

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(P + h.E_i) - f(P)}{h}$$

Ces dérivées partielles sont alors intimement liées aux variations de f autour de P . Précieusement, la i -ème dérivée partielle en P mesure la variation de f en P dans la direction de l'axe (Ox_i) .

On peut alors montrer que, sous certaines conditions de régularité, ces variations “le long des axes du repère” permettent de connaître les variations de f autour de P dans n'importe quelle direction.

Enfin, si ces dérivées partielles existent en tout point de D , elles forment les *fonctions dérivées partielles*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$$

Celles-ci sont à leur tour des fonctions de n variables, qui peuvent admettre des dérivées partielles par rapport à chacune de ces variables. On construit ainsi les dérivées partielles d'ordre 2 (et plus en itérant encore le processus).

Notes :

1. En pratique, le calcul d'une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ s'effectue comme en dimension 1, les variables x_j , $j \neq i$ étant considérées constantes.
2. Une dérivée partielle d'ordre k s'obtient en dérivant k fois la fonction f de départ, chacune de ces dérivées pouvant se faire par rapport à l'une ou l'autre des variables.

Une fonction f de n variables admet donc

- n dérivées partielles d'ordre 1,
- n^2 dérivées partielles d'ordre 2
- n^k dérivées partielles d'ordre k .

Il est alors naturel de se demander si lors d'un calcul de dérivée partielle d'ordre au moins 2, l'ordre des dérivations importe ou non. Un résultat important de l'analyse multivariée, dû à Schwarz, assure que l'ordre de dérivation n'importe pas. Autrement dit, si les dérivées partielles secondes existent et sont continues, alors

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

Dans le cas $i = j$, on note $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

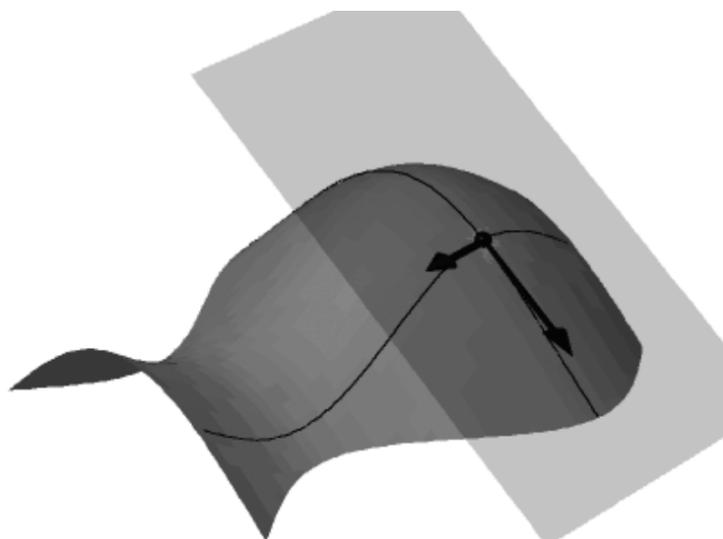
4.3 Plan tangent et différentielle

4.3.1 Définition

Comme en dimension 1, il est possible d'interpréter les dérivées partielles vue plus haut en terme de pente et de vecteur tangent. Ainsi, dans le cas $n = 2$, les fonctions partielles d'une fonction f en un point $P = (a, b)$ correspondant à des courbes tracées sur la surface \mathcal{S}_f , les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ représentent de coefficients directeurs des tangentes à ces courbes au dessus du point $P = (a, b)$. Elles donnent également les coordonnées de deux vecteurs tangents à la surface \mathcal{S}_f au dessus du point P :

$$\vec{v}_x(P) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\right), \quad \vec{v}_y(P) = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right)$$

Ces deux vecteurs étant non colinéaires, ils engendrent un plan de l'espace, appelé *plan tangent* à la surface \mathcal{S}_f en P .



Comme la tangente en dimension 1, ce plan tangent (et en particulier son inclinaison dans l'espace) permet une première description des variations de f autour du point P .

Note : en dimension n quelconque, en tout point $P \in \mathbb{R}^n$ la fonction f admet des dérivées partielles, il est encore possible d'associer à chacune de ces n dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(P)$ un vecteur de \mathbb{R}^{n+1} . L'ensemble de ces vecteurs formant une famille libre de \mathbb{R}^{n+1} , elles engendrent un sous espace affine de \mathbb{R}^{n+1} de dimension n , appelé *hyperplan tangent* à l'hypersurface \mathcal{S}_f en P .

4.3.2 Équation du plan tangent

Comme en dimension 1, le lien qu'il existe entre les dérivées partielles d'une fonction f en un point P et son plan tangent se retrouvent dans l'équation de ce plan tangent. On

peut ainsi montrer qu'en dimension 2, l'équation du plan tangent à la surface \mathcal{S}_f d'une fonction f en un point $P = (a, b)$ est

$$T_P : z = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + f(a, b)$$

Exemple : soit \mathcal{S}_f la surface associée à la fonction

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 1.$$

1. Déterminer les équations des plans tangents à \mathcal{S}_f aux points d'abscisse $(1, 1)$, $(1, 2)$.
2. Déterminer le(s) point(s) de \mathcal{S}_f admettant un plan tangent horizontal.

Note : à partir de cette équation de plan, on peut exprimer un *vecteur normal* à ce plan tangent :

$$\vec{n}_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P), -1 \right)$$

En projetant ce vecteur sur le plan "de base" (xOy) , on obtient le vecteur

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial y}(P) \right)$$

appelé *vecteur gradient* de f en P .

On peut alors montrer que, dans le plan (xOy) , ce vecteur indique "la ligne de plus grande pente" en P , i.e. la direction à prendre en quittant P pour faire augmenter le plus rapidement la valeur de f .

Par ailleurs, cette propriété reste valable en dimensions supérieures. Nous reviendrons plus en détails sur cette notion de vecteur gradient.

4.3.3 Différentielle

Définition (différentielle)

Soient une fonction f de 2 variables définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ et $P = (a, b)$ un point de D .

On appelle *différentielle de f en P* l'application df_P définie sur \mathbb{R}^2 par

$$df_P : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).y$$

Il s'agit d'une *application linéaire* en (x, y) , i.e. de la forme

$$(x, y) \longmapsto \alpha.x + \beta.y$$

Sa surface associée est donc un plan vectoriel. On reconnaît notamment dans l'expression de $df_P(x, y)$ la partie linéaire de l'équation du plan tangent T_P à \mathcal{S}_f en P .

Précisément, on a

$$T_P : z = df_P(x - a, x - b) + f(a, b)$$

On peut alors montrer que le plan associé à df_P est le plan de l'espace parallèle au plan tangent T_P , passant par le centre du repère. Ce plan contient en particulier toute l'information concernant l'évolution de la fonction f autour du point P et la différentielle df_P permet d'accéder à une estimation des variations de f autour de P .

Dans le cas général, la différentielle d'une fonction f de n variables en un point $P = (a_1, \dots, a_n)$ de son domaine est

$$df_P : X = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(P) \cdot x_k$$

et l'équation de l'hyperplan tangent à \mathcal{S}_f en P dans \mathbb{R}^{n+1} est

$$T_P : x_{n+1} = f(P) + df_P(X - P).$$

Là encore, la différentielle est une fonction linéaire, dont les variations en $O_{\mathbb{R}^n}$ permettent d'estimer les variations de f au voisinage de P .

Exercice : quelle est la matrice de cette application linéaire dans les bases canoniques de \mathbb{R}^n et \mathbb{R} ?

4.3.4 Développements limités

Rappels : si φ est une fonction d'une variable, deux fois dérivable en un point x_0 de son domaine, la formule de Taylor permet d'approcher, au voisinage de x_0 , la quantité $f(x)$ par un polynôme dont les coefficients dépendent des dérivées successives de f au point x_0 . Ainsi, aux ordres 1 et 2, on a

$$\text{Ordre 1 : } f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + o(x - x_0)$$

$$\iff_{x=x_0+h} f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0).h + o(h)$$

$$\text{Ordre 2 : } f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0).h + \frac{f''(x_0)}{2}.h^2 + o(h^2)$$

D'un point de vue géométrique, le développement limité (DL) à l'ordre 1 correspond à une approximation de la courbe de f par sa tangente au point d'abscisse x_0 . L'erreur commise dans ce cas est alors négligeable devant $h = x - x_0$ au voisinage de x_0 .

Le développement limité à l'ordre 2 correspond lui à une approximation de la courbe de f par une parabole tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 . L'erreur commise dans ce cas est alors négligeable devant $h^2 = (x - x_0)^2$, toujours au voisinage de x_0 .

À l'aide de la notion de dérivée partielle, il est alors possible de généraliser la notion de développement limité aux dimensions supérieures. Bien qu'il soit formellement possible d'envisager, comme en une variable, un développement limité de tout ordre, on se contente en général des ordres 1 et 2. Ainsi,

Définition (développement limité en n variables)

Soit f une fonction de n variables définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ et $P = (a_1, \dots, a_n)$ un point de D . Si f admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 en P , on a, pour tout $H = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\text{Ordre 1 : } f(P + H) = f(P) + \overbrace{\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(P).h_i}^{=df_P(H)} + o(\|H\|)$$

$$\text{Ordre 2 : } f(P + H) = f(P) + df_P(H) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(P).h_i h_j + o(\|H\|^2)$$

Ainsi, en deux variables, le développement limité à l'ordre 1 en un point $P = (a, b)$ est

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b).h + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).k + o(\sqrt{h^2 + k^2})$$

On reconnaît ici l'équation du plan tangent à la surface \mathcal{S}_f au point d'abscisse P et la formule assure alors que si l'on approche la surface \mathcal{S}_f par ce plan tangent pour calculer la quantité $f(X)$, l'erreur commise est alors négligeable devant la distance $\|X - P\|$.

De même, à l'ordre 2, on a

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + df_P(h, k) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \cdot k^2 \right) + o(h^2 + k^2)$$

Ici, si l'on néglige le terme d'erreur, on retrouve une équation polynomiale de degré 2. D'un point de vue géométrique, l'approximation ainsi effectuée correspond à une approximation de la surface \mathcal{S}_f par une quadrique de l'espace.

Dans la formule ci-dessus, on voit en particulier apparaître la forme quadratique

$$q(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \cdot h^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \cdot hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \cdot k^2$$

La matrice de cette forme quadratique est

$$\mathcal{H}_f(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{pmatrix}$$

appelée *matrice hessienne de f en P*.

Cette matrice permet en particulier d'obtenir une écriture matricielle du DL à l'ordre 2 :

$$f(P+H) = f(P) + df_P(H) + \frac{1}{2} {}^t H \times \mathcal{H}_f(P) \times H + o(\|H\|^2)$$

On retrouve ici une notation proche de celle que l'on connaît en dimension 1, qui en outre reste valable en dimensions supérieures.

Note : en pratique, les fonctions étudiées étant construites à partir des fonctions usuelles, il est possible de calculer ces développements limités à l'aide des formules connues en dimension 1.

Exemple : soit $f(x, y) = \ln(1 + x + y)$.

1. Déterminer, à l'aide de la définition, le D.L. de f en $(0, 0)$ à l'ordre 2.
2. Retrouver ce D.L. à l'aide du D.L. de $\ln(1 + u)$ en 0 à l'ordre 2.
3. À l'aide de ce même D.L., donner le D.L. de f à l'ordre n .

4.3.5 Recherche d'extrema

Comme en dimension 1, la notion de dérivées partielles est en particulier un outil important dans la recherche et l'étude des valeurs extrêmes d'une fonction de plusieurs variables.

Points critiques

Définition (points critiques)

Soit f une fonction de n variables, admettant des dérivées partielles en tout point de son domaine $D \subset \mathbb{R}^n$. On appelle *point critique de f* tout point $X \in D$ tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = 0$$

Ainsi, en dimension 1, les points critiques de f sont les solutions de l'équation

$$f'(x) = 0$$

Ils correspondent aux points auxquels la courbe \mathcal{C}_f admet une tangente horizontale, condition nécessaire à l'existence d'extremum (pour les points situés à l'intérieur du domaine de définition).

En dimension 2, les points critiques de f sont les solutions du *système d'équations*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

D'un point de vue géométrique, il s'agit des points auxquels la surface \mathcal{S}_f admet *un plan tangent horizontal*, condition là encore nécessaire à l'existence d'un extremum local.

De façon général, les points critiques d'une fonction f de n variables correspondent aux points de \mathbb{R}^n auxquels la fonction f "marque un palier". C'est donc parmi ces points là qu'il faut chercher d'éventuels extrema locaux, situés à l'intérieur du domaine de définition de f .

ATTENTION : comme en dimension 1, la recherche des points critique ne constitue qu'un premier tri. Une fois ces points critiques déterminés, il faut les étudier un par un pour savoir s'il s'agit de maximum, de minimum ou ni l'un ni l'autre.

On verra que la suite de l'étude peut, toujours comme en dimension 1, s'appuyer sur les dérivées partielles secondes de la fonction f étudiée et plus exactement sur les matrices hessiennes de f en ces points critiques.

Il est cependant possible, dans certains cas, de déterminer la nature des différents points critiques obtenus en se basant uniquement sur le bon sens.

Exemple : soit $f : (x, y) \mapsto e^{-x^2-y^2}$.

1. Montrer que f admet un unique point critique à déterminer.
2. Montrer que cet unique point critique est un maximum.

Nature des points critiques

Le cas $n = 2$. Soit f , une fonction de deux variables $X = (x, y)$, définie sur une partie $D \subset \mathbb{R}^2$ et admettant un point $P = (a, b)$ comme point critique. Les dérivées partielles de f en P étant nulles, le D.L. de f à l'ordre 2 en P devient :

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{2}(r(x-a)^2 + 2s(x-a)(y-b) + (y-b)^2) + o(\|X - P\|^2)$$

où

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b)$$

Autrement dit, en notant $q(x, y) = r.x^2 + 2s.xy + t.y^2$, l'allure de la surface \mathcal{S}_f au voisinage de P coïncide avec celle de la quadrique d'équation

$$z = q(x, y)$$

Or la forme de cette quadrique, et donc la nature du point critique $P = (0, 0)$, dépendent alors uniquement du signe des valeurs propres de la matrice de q , i.e. la matrice hessienne

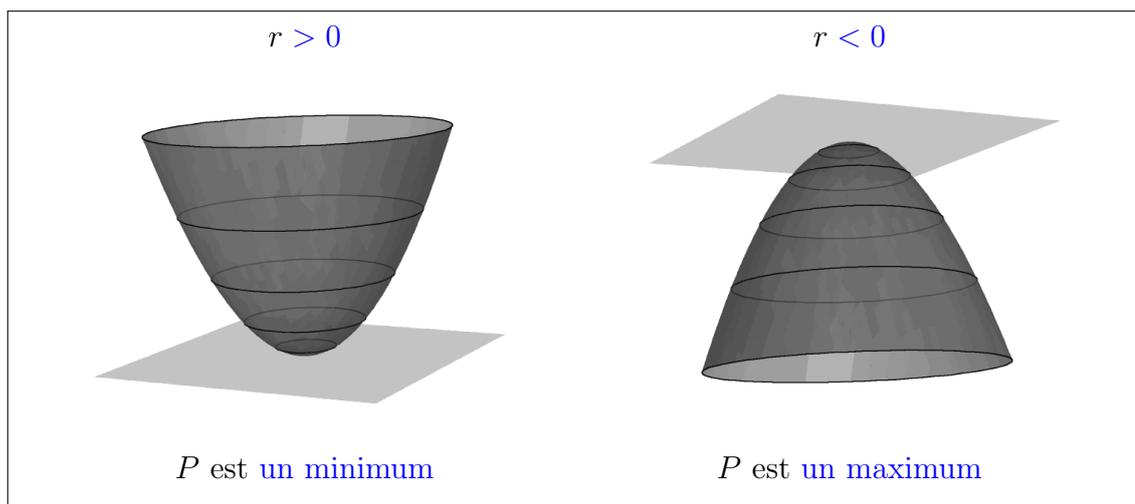
$$\mathcal{H}_f(P) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

En deux variables, ces informations sont également accessibles via *le déterminant*

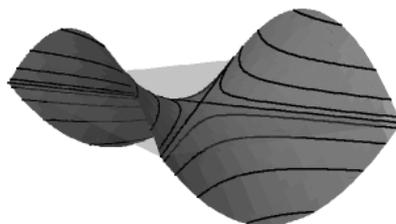
$$\det(\mathcal{H}_f(P)) = rt - s^2$$

On peut alors établir la classification suivante :

- Si $\det(\mathcal{H}_f(P)) > 0$, les deux valeurs propres de $\mathcal{H}_f(P)$ sont de même signe et P est un extremum. Le signe du coefficient r de x^2 donne alors l'orientation de la quadrique associée à q (et donc de \mathcal{S}_f) :



- si $\det(\mathcal{H}_f(P)) < 0$, les deux valeurs propres de $\mathcal{H}_f(P)$ sont de signes contraires et P est alors *un point selle* :



Dans ce cas, tout voisinage de P contient des points X tels que $f(X) > f(P)$ et d'autres tels que $f(X) < f(P)$. Le point P n'est alors pas un extremum local de f .

Note : si $\det(\mathcal{H}_f(P)) = 0$, c'est que l'une des deux valeurs propres de $\mathcal{H}_f(P)$ est nulle. Si l'autre est non nulle, le point P est situé sur une droite de points critiques. L'ensemble de ces points sont alors des extrema et leur nature (maximum ou minimum) dépend là encore du signe de r (ou de t si $r = 0$).

Le cas général

Pour une fonction f de n variables ($n \geq 3$), on n'a plus de représentation géométrique de la situation. Cependant, si P est un point critique de f , le développement limité de f en P à l'ordre 2 s'écrit

$$f(P + H) = f(P) + \frac{1}{2} \cdot {}^t H \times \mathcal{H}_f(P) \times H + o(H^2)$$

où

$$\mathcal{H}_f(P) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(P) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(P) \end{pmatrix}$$

et au voisinage de P (i.e. lorsque H est “petit”), le signe de la différence $f(P+H) - f(P)$ dépend alors uniquement du signe de la forme quadratique ${}^t H \times \mathcal{H}_f(P) \times H$.

Or la théorie de réduction des formes quadratiques nous assure qu’il existe un repère de \mathbb{R}^n dans lequel cette forme quadratique s’écrit

$$\tilde{q}(\tilde{H}) = \lambda_1 \tilde{h}_1^2 + \lambda_2 \tilde{h}_2^2 + \dots + \lambda_n \tilde{h}_n^2$$

où les λ_i sont les valeurs propres de \mathcal{H}_f .

Puisqu’il s’agit ici d’une somme (ou différence) de carrés, le signe de cette expression dépend essentiellement du signes des valeurs propres λ_i . Ainsi,

- Si toutes ces valeurs propres sont **positives** on a, pour H petit

$$f(P+H) - f(P) \geq 0 \iff f(P+H) \geq f(P)$$

et P est un minimum.

- Si toutes ces valeurs propres sont **négatives** on a, pour H petit

$$f(P+H) - f(P) \leq 0 \iff f(P+H) \leq f(P)$$

et P est un maximum.

- Si ces valeurs propres ne sont **pas toutes de même signe**, il existe, à partir du point P , des directions dans lesquelles la quantité $f(P+H)$ augmente et d’autre dans lesquelles elle diminue, ces différentes directions étant données par les vecteurs propres de la matrice $\mathcal{H}_f(P)$.

Dans ce cas, le point P n’est pas un extremum. C’est un point selle.

4.4 Champs de vecteurs

4.4.1 Définitions

À partir de la notion de fonction de plusieurs variables définie ci-dessus, il est possible de généraliser encore la notion de fonction via la notion de *fonction vectorielle*.

Définition (Fonction vectorielle et champ de vecteurs)

Soient m et n deux entiers naturels. On appelle *fonction vectorielle* de \mathbb{R}^m dans \mathbb{R}^n toute fonction de la forme

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ X = (x_1, \dots, x_m) & \longmapsto & f(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X)) \end{array}$$

On dira en outre qu'une telle fonction F est un *champ de vecteurs* si $m = n$.

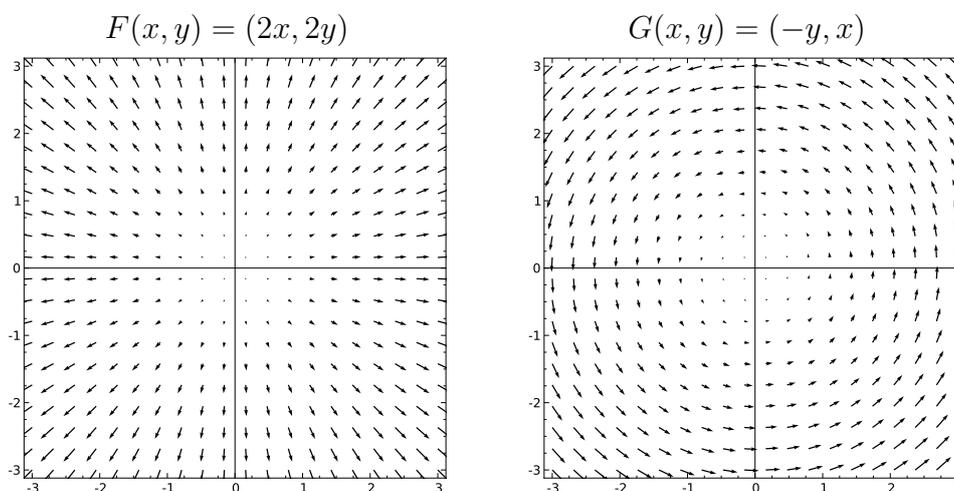
Par ailleurs, les fonctions $f_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ définies ci-dessus sont appelées *les fonctions coordonnées de F* .

La terminologie *champ de vecteur* définie ci-dessus s'explique par le fait que si $m = n$, la fonction F permet d'associer à chaque point $X = (x_1, \dots, x_n)$ de son domaine de définition un vecteur

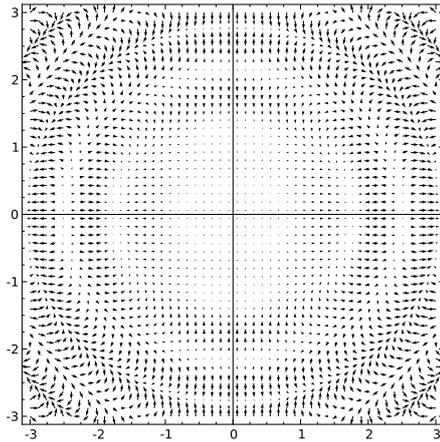
$$F(X) = (f_1(X), \dots, f_n(X)) \in \mathbb{R}^n$$

que l'on peut alors "planter" au point X .

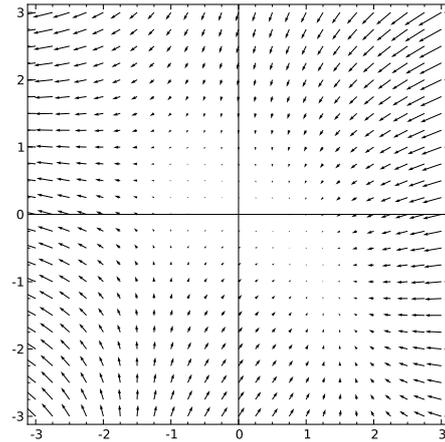
Exemples ($n = 2$) :



$$H(x, y) = (x \sin(x^2 + y^2), y \cos(x^2 + y^2))$$



$$J(x, y) = \left(-\frac{3}{2}x^2 - y + 1, -x - 2y\right)$$

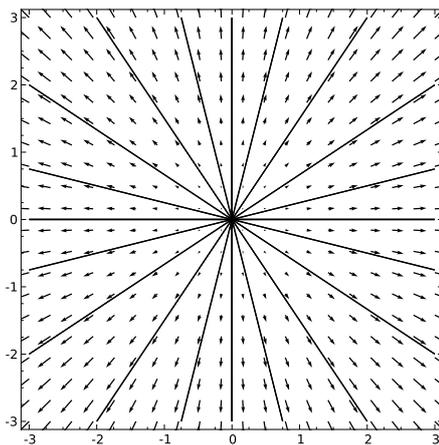


Définition (lignes de champ)

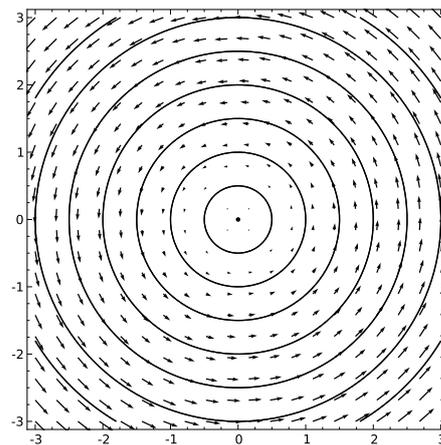
Étant donné un champ de vecteurs F de \mathbb{R}^n , on appelle *ligne de champ de F* toute courbe de \mathbb{R}^n dont le vecteur tangent en chaque point X est colinéaire au vecteur $F(X)$.

Exemples :

$$F(x, y) = (2x, 2y)$$



$$G(x, y) = (-y, x)$$



En pratique, les champs de vecteurs peuvent représenter des champs de forces, de vitesses, de déformations, etc, les lignes de champs pouvant alors représenter des trajectoires, des formes, etc.

4.4.2 Champs de gradient

Définition

Définition (champ de gradient)

Soit

$$f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

une fonction de n variables (x_1, \dots, x_n) définie sur un sous ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$.

En tout point $X = (x_1, \dots, x_n)$ auquel f admet des dérivées partielles, on appelle *gradient de f en X* le vecteur

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \right)$$

Par ailleurs, si le vecteur $\nabla f(X)$ existe pour tout point $X \in D$, on appelle *champ de gradient de f* le champ de vecteurs

$$\nabla f : D \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ X = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(X), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(X) \right)$$

D'un point de vue pratique, le gradient offre ainsi une autre façon de stocker les informations relatives aux variations d'une fonction de plusieurs variables, à l'aide notamment du produit scalaire. Ainsi, soit $P \in D$.

- La différentielle de f en P s'écrit

$$df_P : X = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \nabla f(P) \cdot X \quad (\text{produit scalaire})$$

- L'équation de l'hyperplan tangent au graphe de f en P_0 s'écrit

$$T_P : x_{n+1} = f(P) + \nabla f(P) \cdot X$$

- Le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de P s'écrit

$$f(P + H) = f(P) + \nabla f(P) \cdot H + o(\|H\|)$$

- Les points critiques de f sont par définition les points $X \in D$ tels que

$$\nabla f(X) = 0_{\mathbb{R}^n}$$

Gradient et isoclines

Outre ces nouvelles représentations, le gradient offre également en dimensions 2 et 3 une nouvelle représentation géométrique des variations de f .

Ainsi, à toute fonction f de deux variables (x, y) , on peut associer :

- une carte topographique, constituée d'un ensemble d'isoclines du plan,
- son champ de gradient ∇f , qui est alors un champ de vecteurs de \mathbb{R}^2 .

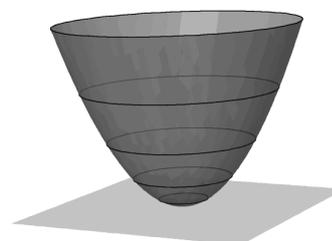
Or en superposant ces deux représentations graphiques 2D de la fonction f , on constate qu'en chaque point $P = (a, b) \in D$, le vecteur $\nabla f(P)$ est orthogonal à l'unique isocline de f passant par P : la courbe d'équation

$$f(x, y) = f(a, b)$$

Exemple : soit

$$f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

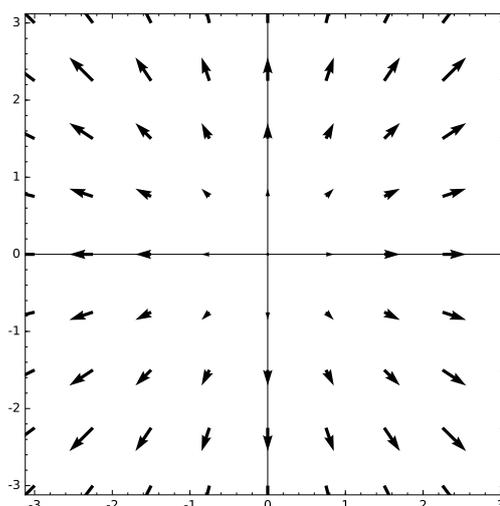
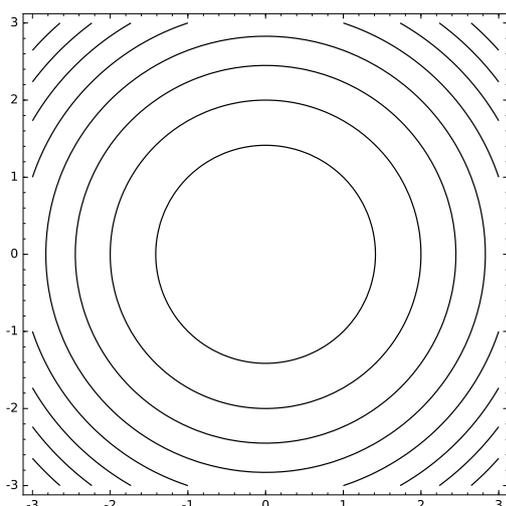
représentée ci-contre.



Les courbes de niveaux de f sont les cercles de centre O

Le champ de gradient de f est

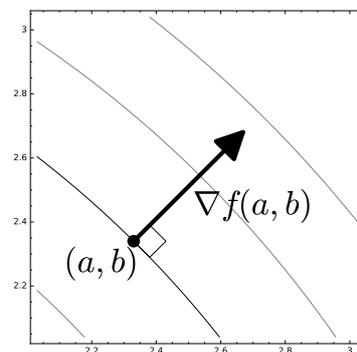
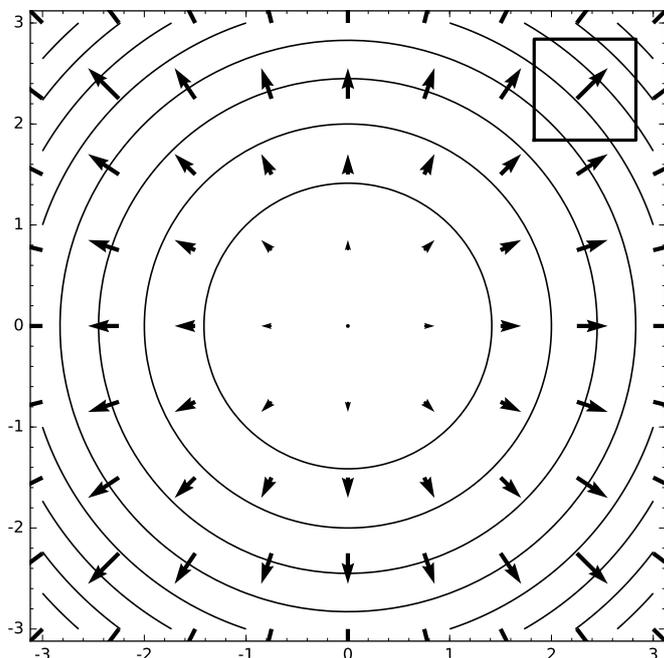
$$\nabla f : (x, y) \mapsto (2x, 2y)$$



Ainsi, si, en dimension 2, on superpose le champs de gradient d'une fonction f à sa

carte topographique, on constate qu'en chaque point $P = (a, b)$ du plan, le vecteur $\nabla f(P)$ est *orthogonal* à l'unique isocline de f passant par P , i.e. l'isocline d'équation

$$f(x, y) = f(P)$$



D'un point de vue qualitatif, cela signifie que contrairement aux isoclines qui indiquent les directions dans lesquelles la fonction f ne varie pas, le gradient indique, lui, la direction dans laquelle la variation de f est la plus importante. Le sens du vecteur $\nabla f(P)$ indique alors le sens "montante" de la fonction et sa norme donne l'intensité de cette variation maximale.

De ce fait, les lignes de champs d'un champ de gradient sont appelées *lignes de plus grande pente*.

Définition (potentiel)

Un champ de vecteur F de \mathbb{R}^n est dit *dérivant d'un potentiel* \mathcal{P} si il existe une fonction $\mathcal{P} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$F = -\nabla \mathcal{P}$$

Autrement dit, un champ de vecteurs dérive d'un potentiel si c'est le champ de gradient d'une fonction à valeurs réelles. Le signe "−" s'explique par le fait qu'en général, un système dynamique "descend les potentiels".

ATTENTION : tous les champs de vecteurs ne sont pas des champs de gradients. Pour un champs de vecteur $F = (f_1, \dots, f_n)$ donné, il existe différentes méthodes permettant de déterminer s'il dérive d'un potentiel ou non. L'une des méthodes est basée

sur l'intégration successive de chaque fonction coordonnée f_i en fonction de la variable associée x_i . Une autre méthode, notamment appliquée en dimension 2 et 3, est basée sur le théorème de Schwarz. En effet, si $F = (f_1, f_2)$ dérive d'un potentiel, il existe une fonction \mathcal{P} de deux variables telle que

$$f_1 = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \quad \text{et} \quad f_2 = -\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y}$$

Mais alors, d'après le théorème de Schwarz, on doit avoir

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial x \partial y}$$

La méthode consiste donc à calculer les deux dérivées partielles ci-dessus et à les comparer : si elles sont égales, F dérive d'un potentiel, sinon, F ne dérive pas d'un potentiel.

4.4.3 Variations d'un champs de vecteurs

Il est possible d'appliquer les outils d'analyse vus plus haut à l'étude des variations d'un champs de vecteur ; l'idée étant d'appliquer les outils en question aux fonctions coordonnées du champs de vecteurs F étudié. Il est ainsi possible de définir différents objets mathématiques permettant de décrire le comportement local d'un champs de vecteurs données.

Gradient d'un champs de vecteurs

Définition (gradient d'un champ de vecteurs)

Soit

$$F : \begin{array}{ccc} D \subset \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ X = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (f_1(X), \dots, f_n(X)) \end{array}$$

un champ de vecteurs de \mathbb{R}^n . On appelle *gradient de F en un point $X \in D$* la matrice carrée à n lignes définie par

$$\nabla F(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(X) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(X) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X) \end{pmatrix}$$

Cette matrice, également appelée *matrice jacobienne* du champs de vecteurs F en X contient, en lignes, les vecteurs $\nabla f_i(X)$, gradients des fonctions coordonnées de F . Elle contient donc l'ensemble de l'information concernant les variations de ces fonctions coordonnées au point X .

Note : si F dérive d'un potentiel \mathcal{P} , on a, pour tout $X \in D$,

$$\nabla F(X) = -\mathcal{H}_{\mathcal{P}}(X)$$

Divergence

Définition (divergence)

Soit

$$F : \begin{array}{l} D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ X = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (f_1(X), \dots, f_n(X)) \end{array}$$

un champ de vecteurs de \mathbb{R}^n . On appelle *divergence de F en un point $X \in D$* la somme

$$\operatorname{div}(F)(X) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(X) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(X)$$

Intuitivement, la divergence peut s'interpréter comme un terme de mesure locale de l'expansion (ou de la dilatation) du champ. Si on considère en effet un petit cube centré autour d'un point, le terme $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ mesure le déplacement selon l'axe (Ox_i) de la i -ème composante du champs. La divergence est une somme sur toutes les directions de ces dilatations locales.

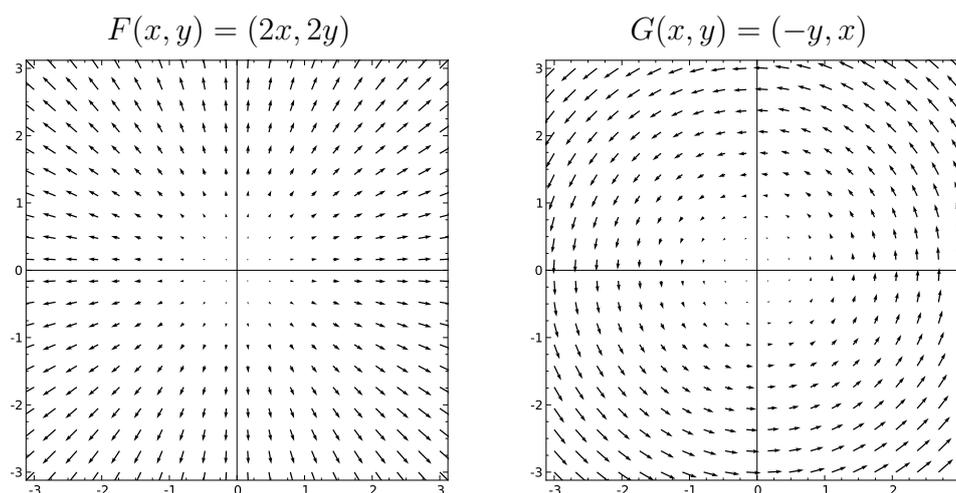
L'une des principales hypothèses (simplificatrices) de la mécanique des fluides est l'hypothèse de non compressibilité. Elle se traduit par le fait que la divergence du champs des vitesses est nulle.

Cette hypothèse permet souvent d'avoir une équation (aux dérivées partielles) supplémentaire pour étudier les mouvements d'une masse de fluide.

Note : si les fonctions coordonnées de F admettent des dérivées partielles en tout point $X \in D$, on peut alors définir *la fonction $\operatorname{div}(F)$* :

$$\operatorname{div}(F) : \begin{array}{l} D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longmapsto \operatorname{div}(F)(X) \end{array}$$

Exemples : calculer la divergence en un point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ quelconque des champs suivants :



Rotationnel ($n = 3$)

Définition (rotationnel d'un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3)

Soit

$$F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$$

un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 . On appelle *rotationnel de F en X* vecteurs

$$\text{Rot}(F)(X) = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}(X) - \frac{\partial f_2}{\partial z}(X), \frac{\partial f_1}{\partial z}(X) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(X), \frac{\partial f_2}{\partial x}(X) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(X) \right)$$

Intuitivement, le rotationnel d'un champ de vecteur de l'espace donne une approximation de l'axe de rotation des déformations locales de ce champ. On l'interprète facilement comme l'axe d'un tourbillon en mécanique des fluides, le champ de vecteurs représentant la vitesse du liquide.

Note : si les fonctions coordonnées de F admettent des dérivées partielles en tout point $X \in D$, on peut définir le *champ de vecteurs* $\text{Rot}(F)$:

$$\text{Rot}(F) : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$X \longmapsto \text{Rot}(F)(X)$$

Exemple : soit $F : (x, y, z) \longmapsto (-y, x, 0)$.

1. Calculer $\text{div}(F)(X)$ et $\text{Rot}(F)(X)$.
2. Interpréter les résultats obtenus.

Laplacien

Définition (laplacien)

Soit

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \longmapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

une fonction à valeurs réelles. On appelle *laplacien de f en $X = (x_1, \dots, x_n)$* la quantité

$$\Delta(f)(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(X) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(X)$$

Cette quantité (scalaire) apparaît dans de très nombreux domaines de la physique et est au cœur de toutes les équations permettant de décrire des phénomènes de diffusion (masse, énergie, chaleur, etc).

Si la fonction f admet des dérivées partielles secondes en tout point de D , on peut alors construire la fonction $\Delta(f)$:

$$\Delta(f) : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ X \longmapsto \Delta(f)(X)$$

Note : le laplacien de f n'est autre que la divergence du gradient de f .

L'opérateur ∇

Il est possible d'unifier l'ensemble des notions vues plus haut à l'aide de l'opérateur ∇ ("nabla"). Il s'agit d'un outil mathématique théorique défini par

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

que l'on peut manipuler à la fois comme un vecteur et comme une fonction.

Ainsi,

- Le gradient d'une fonction f est la fonction ∇ appliquée à une fonction f :

$$\nabla(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

- La divergence d'un champs de vecteurs F peut être vu comme le produit scalaire

$$\operatorname{div} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_k}$$

- Le rotationnel d'un champs de vecteurs F peut être vu comme le produit vectoriel

$$\operatorname{Rot}(F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- Le laplacien d'une fonction f correspondant à la divergence de son gradient, on a

$$\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$$

4.4.4 Changements de variables de \mathbb{R}^n

Parmi les applications de la notion de champ de vecteur de \mathbb{R}^n , notons également la formalisation de la notion de *changement de variables* en dimensions supérieures.

D'un point de vue pratique, un changement de variable consiste à choisir un nouveau système de coordonnées, en principe mieux adapté au problème modélisé et étudié.

Formellement, un changement de variable $(x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow (u_1, \dots, u_n)$ de \mathbb{R}^n est donné par une fonction

$$\Phi : \begin{array}{ccc} D_u & \longrightarrow & D_x \\ U = (u_1, \dots, u_n) & \longmapsto & \Phi(U) = (x_1(U), \dots, x_n(U)) \end{array}$$

où D_u et D_x sont deux parties de \mathbb{R}^n , respectivement associés aux variables u_i et x_i .

Pour qu'un tel champ de vecteur soit un changement de variable, il faut que l'application Φ soit *bijective*. Autrement dit, il doit exister un champ de vecteurs

$$\Phi^{-1} : \begin{array}{ccc} D_x & \longrightarrow & D_u \\ X = (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \Phi^{-1}(X) = (u_1(X), \dots, u_n(X)) \end{array}$$

En pratique, on peut montrer qu'un champ de vecteurs Φ est *bijectif* si et seulement pour tout $U \in D_u$, son gradient

$$\nabla\Phi(U) = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial u_i}{\partial u_j}(U) \\ \end{array} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$$

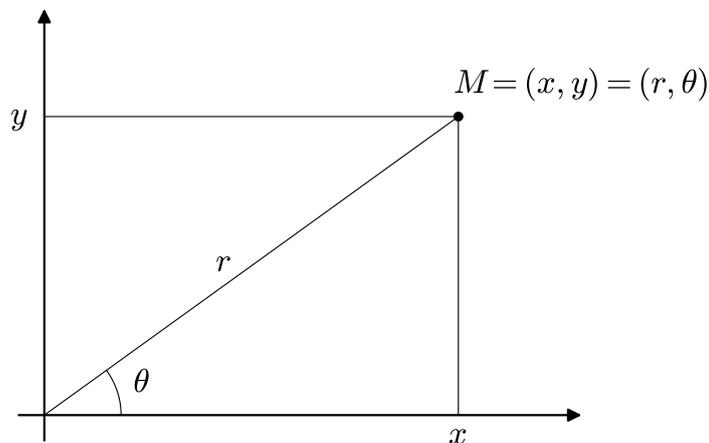
est inversible. Dans ce cas, on peut également montrer que

$$[\nabla(\Phi)(U)]^{-1} = \nabla\Phi^{-1}(\Phi(U))$$

Exemples : en dimensions 2 et 3, on peut ainsi formaliser les changements de variables usuels du plan ou de l'espace.

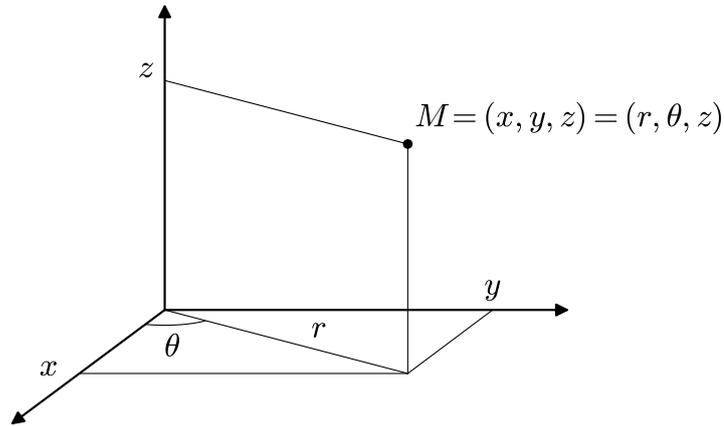
- Dans le plan, le passage au coordonnées *polaires* $(x, y) \rightsquigarrow (r, \theta)$, représentées ci-dessous correspond au champ de vecteurs

$$\begin{array}{l} \Phi : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \end{array}$$



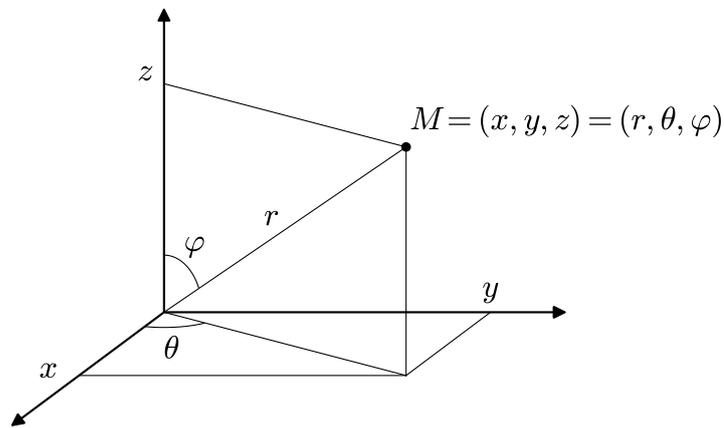
- Dans l'espace,
 - le passage en coordonnées *cylindriques* $(x, y, z) \rightsquigarrow (r, \theta, z)$ représentées ci-dessous correspond au champ de vecteurs

$$\begin{array}{l} \Phi : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, z) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \end{array}$$



— le passage en coordonnées *sphériques* $(x, y, z) \rightsquigarrow (r, \theta, \varphi)$ représentées ci-dessous correspond au champ de vecteurs

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta, \varphi) &\longmapsto (r \cos \theta \sin \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \varphi) \end{aligned}$$



4.5 Exercices

4.5.1 Représentations graphiques

Exercice 30 Déterminer et dessiner le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f_1 : (x, y) \longmapsto \sqrt{1 - xy}$$

$$f_2 : (x, y) \longmapsto \sqrt{(1 - x)(1 - y)}$$

$$f_3 : (x, y) \longmapsto \ln(x^2 - y^2)$$

$$f_4 : (x, y) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

Exercice 31 On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (Oxyz)$ et l'on note $\mathcal{P}_0 = (xOy)$ le "plan de base" du repère.

1. Soient

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x^2 - y^2$$

et \mathcal{S}_1 sa surface dans l'espace muni d'un repère orthonormé \mathcal{R} .

- Déterminer la nature de la courbe de niveau 0 de f_1 et la tracer dans le plan \mathcal{P}_0 .
- Déterminer une équation implicite de la courbe de niveau 1 de f_1 et la tracer dans le plan \mathcal{P}_0 .
- Déterminer une équation implicite de la courbe de niveau -1 de f_1 et la tracer dans le plan \mathcal{P}_0 .
- Déterminer, pour tout $h \in \mathbb{R}$ la nature de la courbe de niveau h de f_1 .
- Étudier l'intersection de la surface \mathcal{S}_1 avec les plans verticaux d'équations $x = 0$ et $y = 0$.
- Tracer une esquisse de la surface \mathcal{S}_1 .

2. Soient

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x^2 + 4y^2$$

et \mathcal{S}_2 sa surface dans l'espace muni d'un repère orthonormé \mathcal{R} .

En s'inspirant du protocole de la question précédente, déterminer et tracer quelques unes des lignes de niveau de la fonction f_2 , tracer une esquisse de la surface \mathcal{S}_2 .

Exercice 32 Pour chacune des fonctions g_i ci-dessous,

- Déterminer le domaine de définition $D_i \subset \mathbb{R}^2$.
- Déterminer les courbes de niveaux $g_i(x, y) = h$ des fonctions suivantes et en déduire une allure des surfaces associées (on pourra commencer par quelques valeurs testes de h puis traiter le cas général).

$$g_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \sqrt{x^2 + y^2} \ , \qquad (x, y) \longmapsto \ln(x^2 - y^2) \ ,$$

$$g_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad g_4 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \frac{x^2 + y}{x + y^2} \ , \qquad (x, y) \longmapsto \frac{x^2 - 2x + y}{x^2}$$

Exercice 33 Associer à chacune des fonctions ci-dessous un graphe ainsi qu'une carte topographique.

a) $(x, y) \mapsto e^{-x^2-y^2}$

b) $(x, y) \mapsto \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$

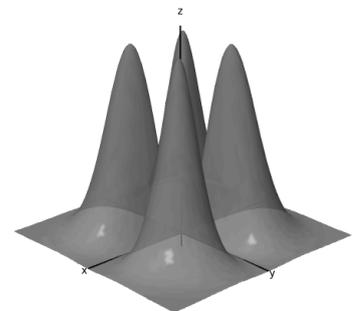
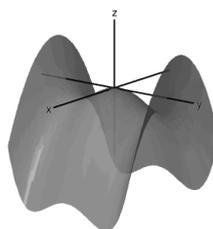
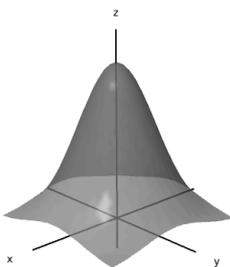
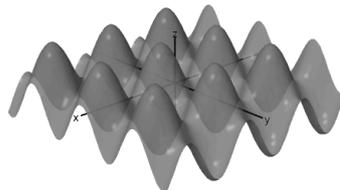
c) $(x, y) \mapsto \sin(x) + \cos(y)$

d) $(x, y) \mapsto \frac{15x^2y^2e^{-x^2-y^2}}{x^2 + y^2}$

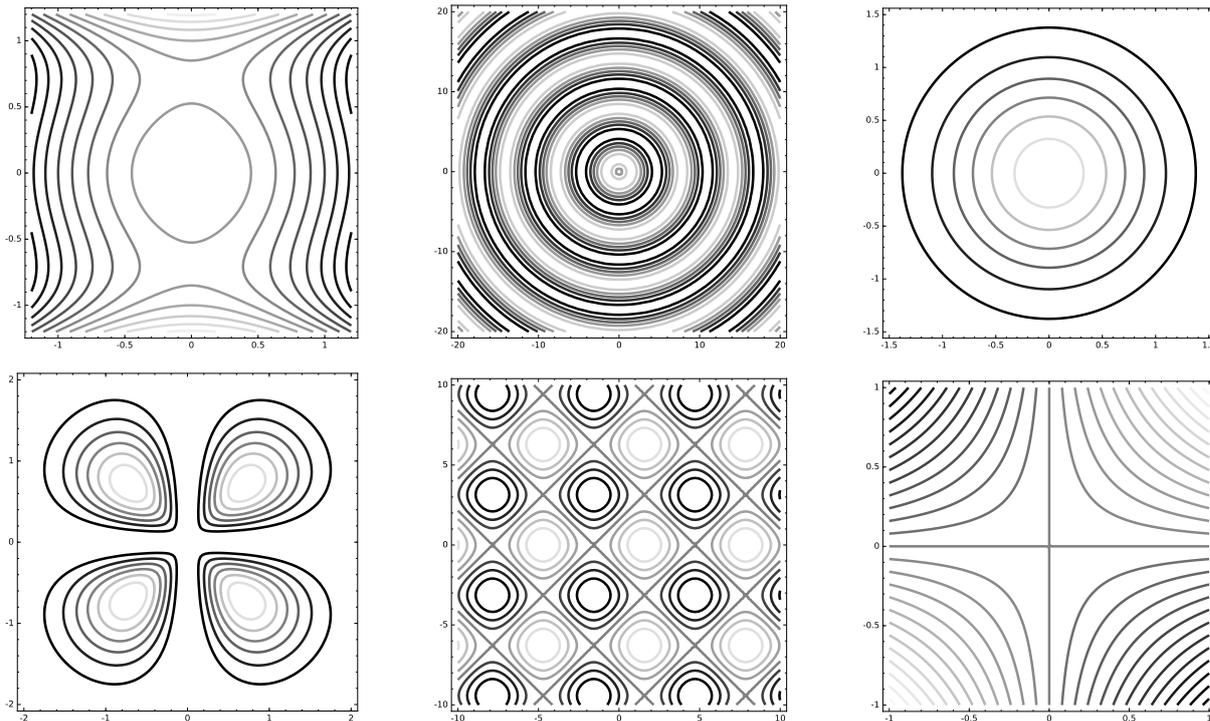
e) $(x, y) \mapsto xy$

f) $(x, y) \mapsto y^4 - y^2 - x^2$

Graphes



Cartes



Exercice 34 1. Déterminer les deux dérivées partielles de chacune des fonctions ci-dessous :

$$f_1 : (x, y) \mapsto -x + xy^2,$$

$$f_2 : (x, y) \mapsto xe^{2xy},$$

$$f_3 : (x, y) \mapsto (1-x)(1-y)(1-x-y),$$

$$f_4 : (x, y) \mapsto \ln(1+x^2+y^2)$$

2. Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions ci-dessus et vérifier le théorème de Schwarz sur ces quelques exemples.

3. Calculer les trois dérivées partielles de chacune des fonctions ci-dessous :

$$g_1 : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz,$$

$$g_2 : (x, y, z) \mapsto (x+y)e^{x+y-z^2},$$

$$g_3 : (x, y, z) \mapsto -\frac{x^2}{z} + xyz - z - y,$$

$$g_4 : (x, y, z) \mapsto \frac{y}{x} - \frac{z}{y} - \frac{1}{z}$$

4. On appelle *laplacien* d'une fonction f de deux variables (x, y) la fonction

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

(a) Calculer Δf_α pour $f_\alpha : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)^\alpha$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles $\Delta f_\alpha = 0$.

(b) Calculer Δg_k pour $g_k : (x, y) \mapsto \ln((x^2 + y^2)^k)$. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles $\Delta g_k = 0$.

4.5.2 Étude de points critiques

Exercice 35 1. Soit φ une fonction d'une variable réelle x , définie au voisinage de 0. Donner la formule du développement limité d'ordre 2 de φ en 0.

2. Soit f une fonction de deux variables réelles (x, y) définie au voisinage de $(0, 0)$.
- En s'inspirant de la formule précédente, donner le développement limité à l'ordre 2 de f en $(0, 0)$.
 - Donner de façon générale le développement limité à l'ordre 2 de f en tout point $P_0 = (x_0, y_0)$.
 - Isoler la partie quadratique de la formule précédente et construire la matrice associée.
 - Pour $P_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$\nabla f(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad \text{le gradient de } f \text{ en } P_0$$

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad \text{la matrice hessienne de } f \text{ en } P_0$$

Exprimer, en fonction de $\nabla f(P_0)$ et $H_f(P_0)$ le développement limité à l'ordre 2 en P_0 de f .

Exercice 36 Soit

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$$

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Calculer les dérivées partielles de f .
- En déduire l'unique point critique P_0 de \mathcal{S}_f .
- Donner, à l'aide des formules usuelles, le développement limité de f à l'ordre 2 en P_0 .
- Montrer que P_0 est un minimum global.

Exercice 37 On considère la fonction f définie par

$$f(x, y) = \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}.$$

et on note \mathcal{S}_f sa surface dans l'espace muni d'un repère orthonormé \mathcal{R} .

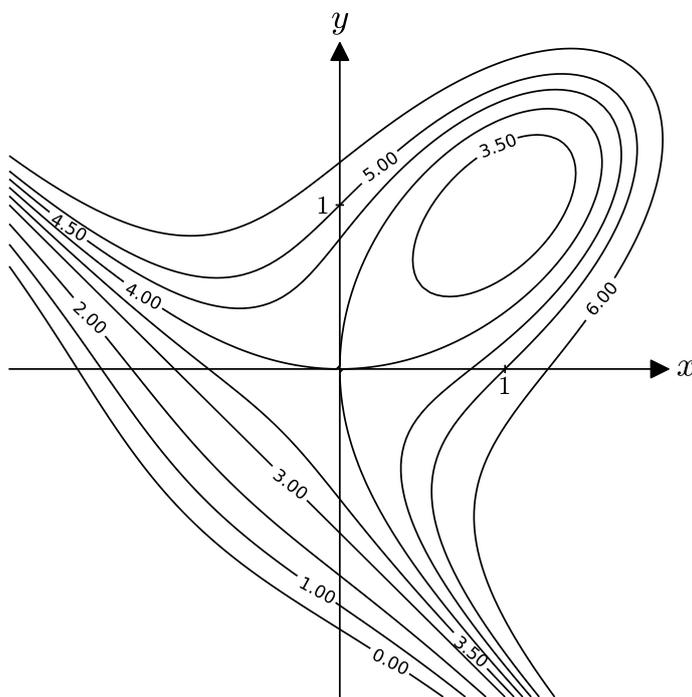
1. Déterminer et dessiner le domaine de définition de f .
2. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f .
3. Déterminer l'unique point critique P_0 de f .
4. Donner le D.L. de f à l'ordre 2 en P_0 .
5. En déduire la nature de P_0 .

Exercice 38 Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto 4 + x^3 + y^3 - 3xy$$

dont les lignes de niveaux sont données ci-dessous.



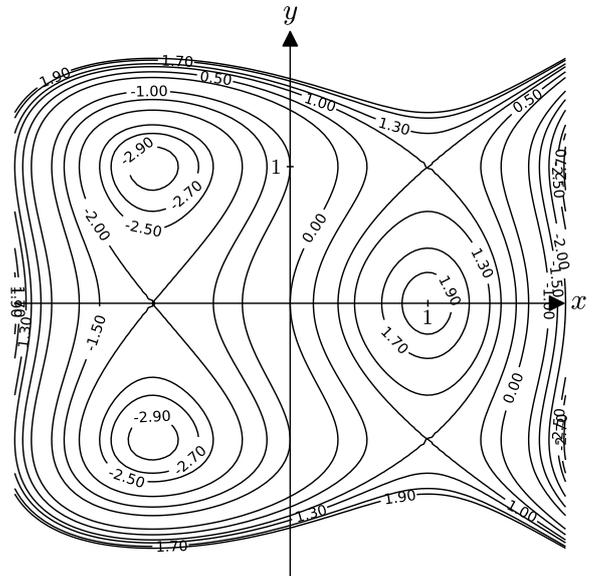
1. Identifier graphiquement les points critiques de f et leurs natures.
2. Retrouver par le calcul les coordonnées des points critiques P_0 et P_1 de f .
3. Étude de $P_0 = (0, 0)$
 - (a) Calculer $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)$, $s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0)$ et $t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)$ et en déduire la matrice hessienne $H_f(P_0)$ de f en P_0 .
 - (b) Déterminer les valeurs propres de $H_f(P_0)$ et conjecturer un lien entre ces valeurs propres et la nature du point critique P_0 déterminée graphiquement à la question 1.
 - (c) Déterminer les sous espaces propres de $H_f(P_0)$ et les placer sur la carte.
 - (d) Commenter.

4. Étudier de même le point $P_1 = (1, 1)$.

Exercice 39 Soit f une fonction de deux variables dont les lignes de niveaux sont données ci-contre.

1. Identifier graphiquement les points critiques de f et leurs natures
2. Retrouver ces résultats par le calcul sachant que

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$$



Exercice 40 1. Déterminer les points critiques et leurs natures pour les fonctions suivantes :

- | | |
|-------------------------------------|---|
| a) $(x, y) \mapsto -x + xy^2$ | b) $(x, y) \mapsto (1 - x)(1 - y)(1 - x - y)$ |
| c) $(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 4xy$ | d) $(x, y) \mapsto x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$ |
| e) $(x, y) \mapsto y^2 + xy \ln x$ | f) $(x, y) \mapsto (x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2}$ |

2. On considère la fonction f définie sur $]0, \pi[\times]-\pi, \pi[$ par l'expression

$$f(x, y) = \cos x \sin y + \sin^2(x).$$

Étudier l'existence et la nature des éventuels extrema de f .

Exercice 41 1. Soit f définie par

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{y}{x} - \frac{z}{y} - \frac{1}{z}.$$

- (a) Déterminer le domaine de définition de f .
- (b) Montrer que le point $P = (1, 1, -1)$ est un point critique de f (on ne demande pas de déterminer l'ensemble des points critiques).

- (c) En posant $(x, y, z) = (1+i, 1+j, -1+k)$ dans $f(x, y, z) - f(1, 1, -1)$, déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f en P .

Note : on pourra s'appuyer sur le développement limité suivant :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2)$$

- (d) Isoler la partie quadratique de ce développement limité et en déduire la matrice hessienne H de f en P .
- (e) Déterminer les valeurs propres de H et en déduire la nature du point critique P .
2. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les points critiques et leurs natures.

$$f_1 : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \quad f_2 : (x, y, z) \mapsto -\frac{x^2}{z} + xyz - z - y$$

$$f_3 : (x, y, z) \mapsto (x + y)e^{x+y-z^2}$$

4.5.3 Champs de vecteurs

Exercice 42 1. Rappeler la formule donnant la dérivée de la fonction d'une variable

$$u \circ v : t \mapsto u \circ v(t) = u(v(t))$$

u et v étant deux fonctions d'une variable, dérivables sur \mathbb{R} .

2. Soit f une fonction de deux variables (x, y) admettant des dérivées partielles en tout point de \mathbb{R}^2 .
- (a) Soient u et v deux fonctions d'une variables, dérivables sur \mathbb{R} . Déterminer la dérivée de la fonction d'une variable

$$\varphi : t \mapsto f(u(t), v(t))$$

- (b) Soit $\Phi : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ un changement de variables de \mathbb{R}^2 . Déterminer les dérivées partielles de la fonction

$$f \circ \Phi : (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$$

Exercice 43 1. (a) Déterminer les fonctions φ d'une variable x vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(x) = 0$$

- (b) Montrer qu'il n'existe qu'une fonction φ vérifiant, en plus de l'équation ci-dessus, une condition initiale de la forme

$$\varphi(x_0) = \varphi_0, \quad x_0, \varphi_0 \in \mathbb{R} \text{ fixés}$$

2. (a) Déterminer les fonctions f de deux variables (x, y) vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$$

- (b) Montrer que les vecteurs du champ de gradient ∇f sont tous colinéaires à un même vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ à déterminer.
 (c) En déduire la nature des lignes de niveaux de f .
 (d) Retrouver la nature de ces lignes de niveaux par le calcul.
 (e) Montrer qu'il existe une unique fonction f vérifiant, en plus de l'équation ci-dessus, une condition initiale de la forme

$$f(0, y) = c_0(y)$$

c_0 étant une fonction connue.

- (f) Décrire la surface associée à cette unique solution dans pour $c_0 : y \mapsto 3y + 2$ puis pour $c_0 : y \mapsto \sin(y)$.

Exercice 44 1. Soit

$$(E) : 2 \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

On note $\Phi : (u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$ le changement de variables de \mathbb{R}^2 défini par

$$\begin{cases} x(u, v) = 2u - v \\ y(u, v) = v - u \end{cases}$$

- (a) Montrer que si f est une solution de (E) , alors la fonction \tilde{f} définie par

$$\tilde{f}(u, v) = f \circ \Phi(u, v)$$

est solution d'une équation aux dérivées partielles (E') à déterminer.

- (b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E') .
 (c) En déduire l'ensemble des solutions de (E) .

2. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

sur le domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$. On pourra s'appuyer sur le passage en coordonnées polaires $(x, y) \rightsquigarrow (r, \theta)$.

Exercice 45 Soient $u : (x, y) \mapsto x + y$, ψ une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles et $\varphi = \psi \circ u$.

1. Déterminer les dérivées partielles

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

en fonction de ψ .

2. Déterminer l'ensemble des solutions "en $x + y$ " de l'équation au dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x + y} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

Exercice 46 *L'équation de transport*

L'équation de transport est une équation permettant de modéliser le déplacement d'un flot de particules entraînées par un fluide.

Elle permet précisément de connaître à chaque instant et en chaque point de l'espace la concentration du milieu, en nombre de particules par unité de volume.

Ainsi, en notant $c(x, y, z, t)$ cette concentration et en notant $V = (u(t), v(t), w(t))$ le champs des vitesses du fluide porteur, les lois de la mécanique des fluides produisent (sous certaines hypothèses simplificatrices) l'équation suivante :

$$(T) : \frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(c.V) = 0.$$

En considérant un canal horizontal dans lequel s'écoule un courant de vitesses horizontales constantes et en remplaçant la concentration en chaque point par la concentration moyenne sur une section du canal, on peut réduire le nombre de variables du problème. On a alors

$$c = c(x, t) \quad \text{et} \quad V = (u, 0, 0), \quad u \in \mathbb{R} \text{ fixé}$$

et l'équation de transport devient

$$(E) : \frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

En complétant le problème par une condition initiale $c(x, 0) = c_0(x)$ donnant la concentration en chaque point au début de l'expérience, on obtient un problème fermé, i.e. admettant une unique solution.

Pour une première approche de l'équation de transport, on peut supposer que le fluide porteur se déplace à vitesse constante. u est alors une constante (qui ne dépend ni de x , ni de t).

0. Retrouver l'équation (E) en appliquant les hypothèses simplificatrices à l'équation générale (T) .
1. Résoudre (E) dans le cas où $u = 0$. Interpréter physiquement le résultat.

2. *Méthode des caractéristiques*

On pose maintenant u est un réel fixé. On va déterminer l'unique solution du problème en déterminant les courbes de niveaux de la fonction c cherchée.

- (a) Montrer qu'en chaque point (x, t) , le gradient de c est orthogonal au vecteur $\vec{v} = (u, 1)$.
- (b) En déduire la nature des lignes de niveau de c .
- (c) Donner la valeur de c au point $(u, 1)$.
- (d) Donner la valeur de c en un point quelconque (x_0, t_0) du plan de base.
- (e) Donner la forme générale de l'unique solution de (E) vérifiant $c(x, 0) = c_0(x)$.

Les droites d'équation $x - ut = \text{cste}$ sont appelées *droites caractéristiques* de (E) . Il est possible de généraliser cette approche au cas non constant ($u = u(x, t)$) en cherchant les *courbes caractéristiques* de l'équation, i.e. les courbes de niveau communes à toutes les solutions.

3. *Changement de variables*

Il est également possible de résoudre l'équation de transport à l'aide d'un changement de variable dans l'équation (E) . Ainsi, pose

$$d : (x, t) \longrightarrow c(x + ut, t)$$

- (a) Déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial d}{\partial x}(x, t)$ et $\frac{\partial d}{\partial t}(x, t)$ en fonction des dérivées partielles de c .
- (b) Montrer que si c est une solution de (E) , alors d vérifie une EDP simple (\tilde{E}) , à déterminer.
- (c) Résoudre l'équation (\tilde{E}) et en déduire les solutions de (E) puis l'unique solution de (E) vérifiant la condition initiale $c(x, 0) = c_0(x)$.