



Mathématiques générales ISA3

Mourad ABOUZAIID

ISABTP 3^e année
2019-2020
version enseignant

Version du 28 août 2019

Table des matières

1	Fourier - Laplace	5
	Introduction	5
1.1	Fonctions périodiques	6
1.1.1	Périodes, fréquences et pulsation	6
1.1.2	Représentation graphique	7
1.1.3	Intégration d'une fonction périodique	7
1.2	Polynômes trigonométriques et séries de Fourier	8
1.2.1	Polynômes trigonométriques	8
1.2.2	Séries de Fourier	9
1.3	Fondamentale et harmoniques	11
1.3.1	Définitions	11
1.3.2	Diagrammes des amplitudes et diagramme des fréquences	14
1.3.3	Égalité de Parseval	15
1.4	Calculs des coefficients de Fourier	15
1.4.1	Coefficients de Fourier réels	15
1.4.2	Calcul pratique	16
1.5	Transformée de Fourier	17
1.5.1	Définition	17
1.5.2	Transformée de Fourier inverse	20
1.5.3	Transformée de Fourier discrète	20
1.6	Transformée de Laplace	22
1.6.1	Définitions	22
1.6.2	Domaine de définition	22
1.6.3	Calcul pratique	23
1.6.4	TL et TL inverse	23
1.6.5	TL et équations différentielles	24
1.6.6	Produit de convolution	25
2	Systèmes linéaires	29
	Introduction	29
2.1	Généralités	30
2.1.1	Définitions	30
2.1.2	Structure de l'ensemble des solutions	32
2.2	Le Pivot de Gauss et applications	35
2.2.1	Les systèmes triangulaires	35
2.2.2	Le pivot de Gauss	37

2.2.3	Décomposition LU	43
2.2.4	Applications du Pivot de Gauss et de la décomposition LU	49

Chapitre 1

Fourier - Laplace

Introduction

La théorie des séries de Fourier a pour objet l'étude détaillée des fonctions périodiques.

Historiquement, les séries de Fourier ont été développées pour étudier l'évolution de la température dans un milieu continu ; la chaleur étant alors modélisée par une onde se propageant dans l'objet étudié.

Par extension, les séries de Fourier offrent un outil très efficace pour l'étude de tous les phénomènes ondulatoires : ondes électriques, sonores, lumineuses... mais également pour l'étude des phénomènes cycliques : marées, météo, bourse,...

L'idée principale est d'interpréter toute fonction périodique comme la superposition d'une infinité de signaux sinusoïdaux de fréquences différentes.

Formellement, il s'agit d'adapter la notion de D.L. et de séries entières aux fonctions périodiques en remplaçant la notion de polynôme par les *polynômes trigonométriques*.

Dans un premier temps, nous ferons quelques rappels sur la notion de fonction périodique.

Nous définirons ensuite la notion de polynôme trigonométrique (en se basant dans un premier temps sur la notation complexe des fonctions trigonométriques) et nous verrons comment l'utiliser pour définir la décomposition d'une fonction périodique.

Enfin, nous verrons comment interpréter la décomposition obtenue pour comprendre, clarifier ou reconstruire le signal de départ.

1.1 Fonctions périodiques

1.1.1 Périodes, fréquences et pulsation

Définition 1.1.1

Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite périodique si il existe une constante $T > 0$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t+T) = f(t).$$

La constante T est alors *une période* de la fonction f .

Il est clair que si T est une période pour une fonction f donnée, alors toutes les constantes nT pour $n \in \mathbb{N}$ sont également des périodes. (Exercice : à faire par récurrence).

On appelle alors *LA* période d'une fonction périodique la plus petite période de f .

Définition 1.1.2

- On appelle *fréquence* d'une fonction f T -périodique l'inverse $\varphi = \frac{1}{T}$ de sa période.
- On appelle *pulsation* d'une fonction f T -périodique la quantité $\vec{\omega} = \frac{2\pi}{T}$.

Si t est une variable temporelle, la période T correspond au temps minimal qu'il faut attendre pour que le comportement de f se répète. Dans ce cadre, la fréquence φ correspond au nombre de répétitions par unité de temps. Dans ce cadre, la pulsation est la fréquence ramenée à un intervalle de temps de longueur 2π (i.e. un tour).

Exemples :

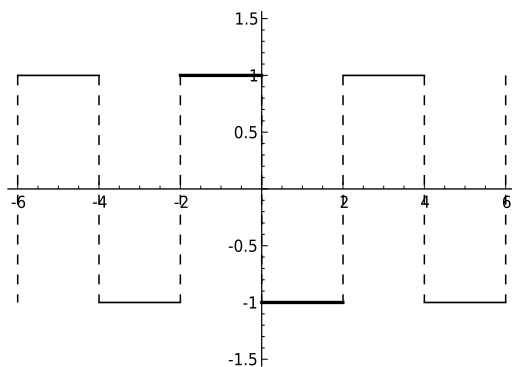
- Les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions 2π -périodiques (réelles).
- La fonction $t \mapsto e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$ est une fonction 2π -périodique (complexe).
- Les fonctions $t \mapsto \cos(nt)$, $t \mapsto \sin(nt)$ et $t \mapsto e^{int}$ sont des fonctions $\frac{2\pi}{n}$ -périodiques. Pour chacune d'elles on a en particulier $f(t+2\pi) = f(t)$.
- Pour tout $T > 0$, en notant $\omega = \frac{2\pi}{T}$, les fonctions $t \mapsto \cos(\omega t)$, $t \mapsto \sin(\omega t)$ et $t \mapsto e^{i\omega t}$ sont des fonctions T -périodiques.

Preuve : pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

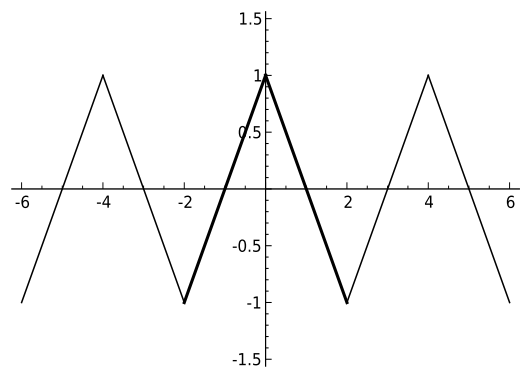
$$\begin{aligned}\cos(\omega(t+T)) &= \cos(\omega t + \omega T) = \cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{T}T\right) \\ &= \cos(\omega t + 2\pi) = \cos(\omega t)\end{aligned}$$

1.1.2 Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction périodique est constituée d'un motif se répétant à l'infini. La période T est alors la longueur du plus petit motif se répétant :



Créneaux



Dents de scie

De ce fait, l'étude d'une fonction périodique peut se réduire à l'étude d'une période quelconque.

Exemples : Pour chacune des fonctions f ci dessous, tracer le graphe sur $[-2T, 2T]$.

1. $T = 2\pi$, $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [0, 2\pi[$.
2. $T = 2$, $f(t) = t$ pour tout $t \in [-1, 1[$.
3. $T = 2\pi$, f paire telle que $f(t) = \pi - t$ pour tout $t \in [0, \pi]$

1.1.3 Intégration d'une fonction périodique

Dans le cadre des séries de Fourier, on verra que l'on est souvent amené à intégrer les fonctions périodiques que l'on étudie. Or graphiquement, il est clair que l'intégrale d'une fonction périodique sur toute une période ne dépend pas de la période que l'on choisit. Autrement dit, si f est une fonction périodique de période T , on a

$$\begin{aligned}\int_0^T f(t)dt &= \int_T^{2T} f(t)dt = \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)dt && \forall n \in \mathbb{N} \\ &= \int_\alpha^{\alpha+T} f(t)dt && \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (*)\end{aligned}$$

(Exercice : à faire à l'aide d'un changement de variable bien choisi).

De façon générale, on notera alors

$$\int_{[T]} f(t) dt$$

l'intégrale d'une fonction T -périodique f sur n'importe laquelle de ses périodes.

En particulier, la valeur moyenne d'une fonction périodique est donnée par sa valeur moyenne sur une période et donc par l'intégrale :

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) dt$$

Enfin, rappelons que propriétés du calcul intégral dans le cas des fonctions paires ou impaires sur un intervalle centré en 0 : quelque soit $a > 0$, on a

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \begin{cases} 2 \int_0^a f(t) dt & \text{si } f \text{ est paire} \\ 0 & \text{si } f \text{ est impaire} \end{cases}$$

On verra comment toutes ces propriétés permettent souvent de simplifier considérablement les calculs, en profitant en particulier du fait qu'en choisissant $\alpha = -\frac{T}{2}$ dans la formule (*), on peut se placer sur une période centrée en 0.

1.2 Polynômes trigonométriques et séries de Fourier

1.2.1 Polynômes trigonométriques

Soient $T > 0$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$. On appelle polynôme trigonométrique de période T toute expression de la forme

$$P(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{i\omega kt} = \sum_{k=-N}^N c_k (\cos(\omega kt) + i \sin(\omega kt))$$

où les $c_{-N}, \dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots, c_N$ sont des nombres complexes appelés coefficients de P et N est le degré.

Les fonctions $[t \mapsto e^{i\omega kt}]$ étant toutes $\frac{T}{k}$ -périodiques, il est clair que P est alors une fonction T -périodique.

Exemple : les fonction sinus et cosinus sont toutes deux des polynômes trigonométriques :

$$\begin{aligned}\cos(t) &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{1}{2}e^{-it} + \frac{1}{2}e^{it} \\ \sin(t) &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = -\frac{1}{2i}e^{-it} + \frac{1}{2i}e^{it}\end{aligned}$$

Exercice : préciser le degré et les coefficients de ces deux polynômes trigonométriques.

Note : dans les deux exemples ci-dessus, on constate que les coefficients c_n du polynôme vérifient

$$c_{-n} = \overline{c_n}$$

Cela est en particulier caractéristique des polynômes trigonométriques à *valeurs réelles* (dont font partie les fonctions sinus et cosinus).

1.2.2 Séries de Fourier

Comme cela a été évoqué en introduction, la théorie de Fourier consiste donc à adapter la théorie des développements limités aux fonctions périodiques en remplaçant les polynômes classiques (au cœur de la théorie des développements limités) par des polynômes trigonométriques. Le premier travail de Fourier, analogue à celui de Taylor pour les D.L. a consisté à déterminer les meilleurs coefficients c_n . Il a utilisé pour cela une propriété importante des polynômes trigonométriques face à l'intégration.

Intégration des polynômes trigonométriques

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction $[t \mapsto e^{ikt}]$ admet 2π comme période. Par ailleurs, on peut montrer que

$$\int_{[2\pi]} e^{ikt} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ 2\pi & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

De façon générale, pour toute période T , si l'on note $\omega = \frac{2\pi}{T}$, la fonction $[t \mapsto e^{i\omega kt}]$ est une fonction T -périodique et

$$\frac{1}{T} \int_{[T]} e^{i\omega kt} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq 0 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

En appliquant cette propriété à un polynôme trigonométrique $P(t)$, on obtient alors un filtre permettant d'isoler n'importe quel coefficient de P .

Précisément, on verra en TD que pour tout $m \in \{-N, \dots, N\}$, on a

$$\frac{1}{T} \int_{[T]} P(t) e^{-i\omega mt} dt = c_m$$

Coefficients et série de Fourier d'une fonction périodique

Définition 1.2.1

Soit f une fonction T -périodique et soit $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

- Par analogie avec ce qui précède, on appelle *coefficients de Fourier de f* les nombres complexes définis par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) e^{-i\omega n t} dt.$$

- On appelle alors *polynôme de Fourier* de degré N le polynôme trigonométrique

$$P_{N,f}(t) = \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{i\omega k t}$$

- On appelle *série de Fourier de f* la somme infinie

$$S_f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) e^{i\omega n t}$$

Convergence de la série de Fourier

La série de Fourier d'une fonction f définie ci-dessus répond au cahier des charges posé par Fourier : elle représente la superposition d'une infinité de signaux périodiques élémentaires dont les fréquences sont des multiples de la fréquence de la fonction f .

Question : dans quelle mesure la série de Fourier de f permet-elle de reconstruire la fonction f de départ ?

Historiquement, il a fallu attendre longtemps avant de pouvoir répondre rigoureusement à cette question. La réponse a été apportée par Dirichlet, qui a montré qu'une fonction f et sa série de Fourier coïncident en tous points où f est continue.

Précisément, il a montré que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S_f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

où $f(t^+)$ et $f(t^-)$ désignent respectivement les limites à droite et à gauche de f en t .

En particulier, si f est une fonction continue sur \mathbb{R} , on a bien

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = S_f(t)$$

1.3 Fondamentale et harmoniques

1.3.1 Définitions

Soit f une fonction périodique de période T , de fréquence $\varphi = \frac{1}{T}$ et de pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et soit

$$S_f : t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{i\omega n t}$$

son DSF. Comme on l'a dit, cette série représente la décomposition du signal f en la superposition d'une infinité de signaux périodiques élémentaires. Ces composantes élémentaires sont appelées *les harmoniques* de f :

$$\sigma_n(t) = c_n(f) e^{i\omega n t} + c_{-n}(f) e^{-i\omega n t}$$

de sorte que la série de Fourier s'écrit

$$S_f(t) = c_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sigma_n(t).$$

Chaque harmonique σ_n est une fonction périodique de pulsation, de période et de fréquence respectives

$$\omega_n = n\omega, \quad T_n = \frac{T}{n}, \quad \varphi_n = n\varphi$$

Parmi les harmoniques de f , on distingue la première harmonique, ou *fondamentale*

$$\sigma_1 : t \mapsto c_1(f) e^{i\omega t} + c_{-1}(f) e^{-i\omega t}$$

qui représente la partie principale du signal. C'est en particulier la seule harmonique ayant exactement la même fréquence que f .

Notons enfin que pour $n = 0$, on peut également définir "l'harmonique constante" de f

$$\sigma_0(t) = c_0(f) = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) dt$$

qui correspond à la moyenne de la fonction f .

En pratique, la contribution de chaque harmonique dans le signal f complet est donnée par l'amplitude de la fonction σ_n associée :

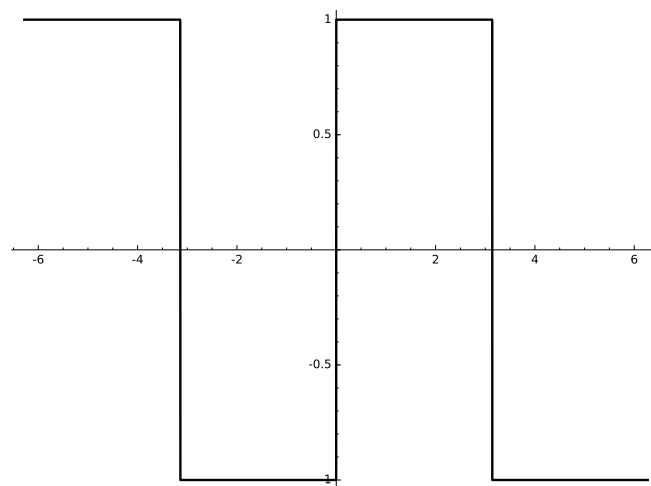
$$A_n = 2|c_n(f)|$$

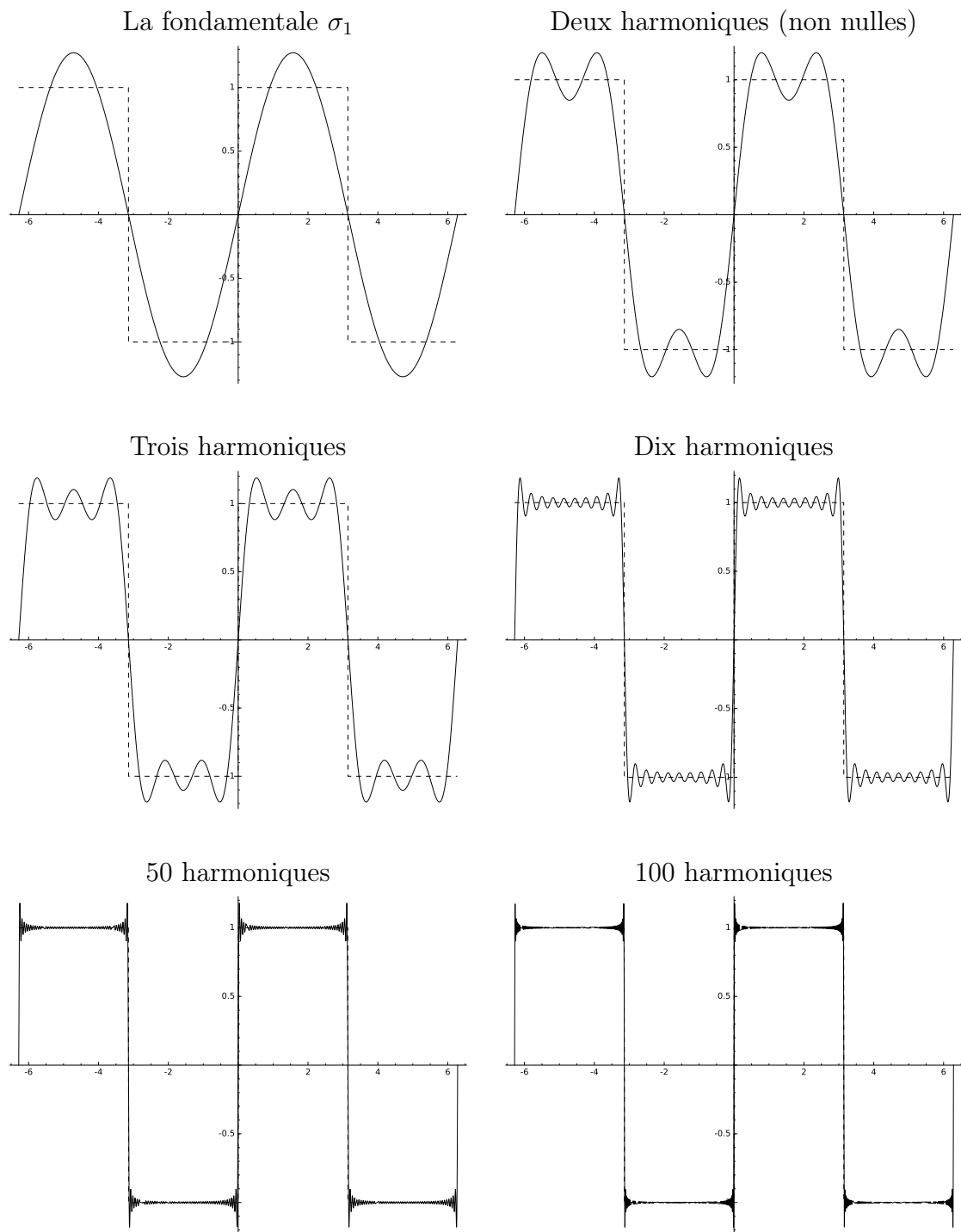
Note : pour $n = 0$, l'amplitude A_0 ne représente pas réellement l'amplitude d'un signal périodique, mais la moyenne de la fonction f de départ.

Il est possible de montrer que cette amplitude tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Autrement dit, il existe un rang partir duquel les amplitudes (et donc la contribution des harmoniques dans le signal complet) devient aussi petite que l'on veut. Quelque soit la précision à laquelle on travaille, il est alors possible de tronquer la série de Fourier de f en un polynôme trigonométrique dans lequel on retrouve l'essentiel du signal de départ.

Cette propriété s'illustre en particulier graphiquement, en superposant successivement à la courbe de f les courbes des différents polynômes de Fourier associés.

Exemple : considérons la fonction "créneau" représentée ci-dessous :





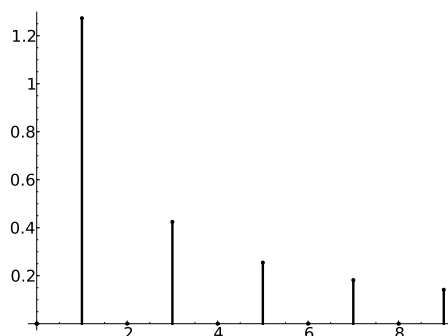
On constate que plus on garde d'harmoniques, plus la courbe de la troncature est proche de celle de f .

On peut également noter que lorsque le nombre d'harmoniques augmente, on voit apparaître des perturbations autour des points de discontinuité de f . C'est le phénomène de Gibbs, qui est à rapprocher du domaine de validité de l'égalité $S_f = f$.

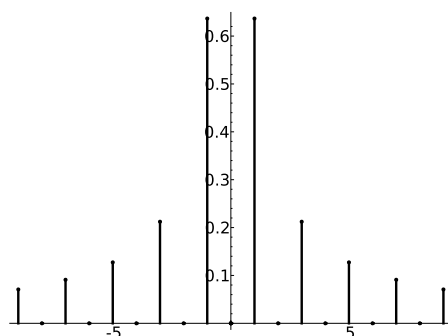
1.3.2 Diagrammes des amplitudes et diagramme des fréquences

Graphiquement, la décomposition en série de Fourier d'une fonction f donnée peut être représentée sous la forme de diagrammes en bâtons :

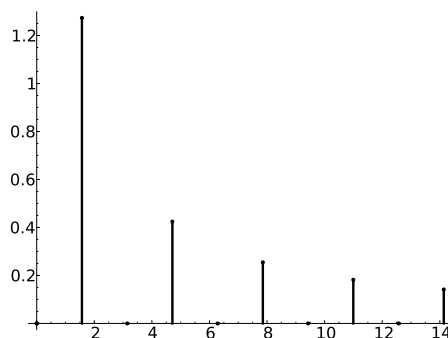
- le *diagramme des amplitudes* constitué des points (n, A_n) pour $n \in \mathbb{N}$:



- le *diagramme symétrique des amplitudes* constitué des points $(n, |c_n|)$ pour $n \in \mathbb{Z}$:



- le *diagramme des fréquences* constitué des points (φ_n, A_n) pour $n \in \mathbb{N}$:



Notes :

1. On constate que ces trois représentations sont quasiment identiques, les différences portant essentiellement sur des changements d'échelles.
2. Le passage au diagramme des fréquences revient, en pratique, à remplacer la représentation temporelle de f (donnée par son graphe) par une représentation en fréquences. Chaque bâton correspond à une fréquence présente dans le signal f et la hauteur du bâton indique l'importance de la fréquence en question dans le signal f . Notons en particulier que la connaissance de ce diagramme des fréquences permet

de reconstruire presque complètement la fonction de départ (ou au moins sa série de Fourier). La seule information que l'on perd en abandonnant la représentation temporelle est la présence d'un éventuel déphasage.

1.3.3 Égalité de Parseval

Il n'est pas rare que les signaux périodiques étudiés servent à modéliser un transport d'énergie (train d'onde de vagues, laser, etc). Dans ce cas, l'énergie totale du signal étudié correspond à

$$E(f) = \frac{1}{T} \int_{[T]} |f(t)|^2 dt.$$

Or il est possible d'exprimer cette énergie totale en fonction des coefficients de Fourier de f :

Égalité de Parseval : $\frac{1}{T} \int_{[T]} |f(t)|^2 dt = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$

Là encore, là décroissance globale des amplitudes $|c_n(f)|$ permet d'affirmer que l'essentiel de l'énergie du signal f est transportée par les premières harmoniques. Quitte à prendre $N \in \mathbb{N}$ assez grand, il est donc possible d'approximer le signal f par son polynôme de Fourier de degré N tout en conservant la majeure partie de l'énergie contenue dans le signal f .

Note : pour les mathématiciens, les séries de Fourier offrent également un outil permettant de calculer des sommes de séries. Ainsi, le théorème de Dirichlet et l'égalité de Parseval permettent d'exprimer certaines séries sous la forme de fonctions ou d'intégrales. L'évaluation de ces fonctions et les calcul de ces intégrales permettent alors d'obtenir la valeur exactes des sommes de séries étudiées. C'est en particulier grâce aux travaux de Fourier qu'il a été possible d'établir les formules

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

1.4 Calculs des coefficients de Fourier

1.4.1 Coefficients de Fourier réels

Du fait que la présence de la quantité $e^{ik\omega t}$ dans les formules ci-dessus, il est clair que les coefficients c_n ainsi définis sont des nombres complexes. Or si le signal étudié est modélisé par une fonction *réelle*, la série de Fourier associée est également réelle. En pratique, cela se démontre en notant que si f est une fonction réelle, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$$

Ainsi, chacune des harmoniques $\sigma_n : t \mapsto c_n(f)e^{in\omega t} + c_{-n}(f)e^{-in\omega t}$ est une fonction réelle (car $\sigma(t)$ est la somme de deux complexes conjugués).

Via la formule $e^{in\omega t} = \cos(n\omega t) + i \sin(n\omega t)$, il est alors possible d'exprimer la série de Fourier sous la forme

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n(f) \cos(n\omega t) + b_n(f) \sin(n\omega t) \quad (1) \quad (1.1)$$

les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ étant alors des nombres réels, donnés par les formules

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n(f) = \frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \cos(n\omega t) dt \\ b_n(f) = \frac{2}{T} \int_{[T]} f(t) \sin(n\omega t) dt \end{cases} \quad (2) \quad (1.2)$$

Exercice : à l'aide du système 1.2 ci dessus, exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les coefficients réels $a_n(f)$ et $b_n(f)$ en fonction des coefficients complexes associés $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$ et vérifier que la série 1.1 correspond bien à la série de Fourier définie dans les parties précédentes.

À partir de ces nouveaux coefficients, il est alors possible de retrouver toutes les grandeurs caractéristique de la théorie. Ains,

- Les harmoniques de f s'expriment alors sous la forme

$$\sigma_n(t) = a_n(f) \cos(n\omega t) + b_n(f) \sin(n\omega t)$$

et leurs amplitudes sont données par

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

- L'égalité de Parseval s'écrit

$$\frac{1}{T} \int_{[T]} f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n \geq 1} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}$$

1.4.2 Calcul pratique

En pratique, le calcul des coefficients de Fourier est souvent fastidieux car il nécessite l'intégration de fonctions trigonométriques (via de nombreuses IPP). On le confie souvent aux machines. Cependant, pour les calculs à la main, on a quelques astuces de calcul qui permettent de gagner du temps.

La première chose à faire pour le calcul des coefficients de Fourier consiste à déterminer l'intervalle sur lequel on va calculer l'intégrale. Puisque la fonction que l'on intègre est périodique, on peut en effet choisir n'importe quel intervalle de longueur 2π .

On commence donc par déterminer celui qui rendra les calculs les plus simples. Par exemple :

- Si la fonction f est *impaire* (comme la fonction sinus), le produit $f(t) \cos(nt)$ est encore impair. En choisissant l'intervalle $[-\pi, \pi]$ (centré en 0), on en déduit sans calcul que $a_n(f) = 0$ pour tout n .
- Si la fonction f est *paire* (comme la fonction cosinus), le produit $f(t) \sin(nt)$ est encore impair. En choisissant l'intervalle $[-\pi, \pi]$ (centré en 0), on en déduit sans calcul que $b_n(f) = 0$ pour tout n .

On verra qu'il existe d'autres découpages possibles selon la façon dont est définie la fonction f .

1.5 Transformée de Fourier

Outre l'étude théorique des signaux périodiques, la théorie de Fourier a également permis de mettre en place des outils pour l'étude et l'exploitation de données expérimentales associées à des phénomènes périodiques (trains de vagues et marées, sismique, astronomie, etc). Pour cela, il a fallu adapter la notion de série de Fourier à la forme des données expérimentales, i.e. des données de valeurs numériques.

D'un point de vue théorique, cette adaptation parle par la généralisation de la notion de série de Fourier aux fonctions non périodiques : la Transformée de Fourier.

1.5.1 Définition

Comme on l'a vu plus haut, le résultat principal issu de la théorie des séries de Fourier est le suivant : toute fonction f T -périodique est faite d'une superposition d'une infinité de signaux élémentaires de fréquences $\varphi_n = n\varphi$ pour $n \in \mathbb{Z}$ (où $\varphi = \frac{1}{T}$ est la fréquence de f). On a ainsi un coefficient ($c_n(f)$) associé à chacune de ces fréquences, et l'addition de tous ces signaux élémentaires permet de reconstituer globalement le signal de départ.

Pour généraliser la notion de série de Fourier aux fonctions non périodiques, on peut étendre cette idée en considérant toute fonction continue par morceaux est faite d'une superposition d'une infinité de signaux élémentaires de fréquences $s \in \mathbb{R}$. On passe ainsi d'un ensemble discret de fréquences (une fréquence par entier) à un ensemble continu (une fréquence pour chaque $s \in \mathbb{R}$).

A partir de cette idée générale, on peut alors étendre les formules principales de la théorie de Fourier à toutes les fonctions. Ainsi, le calcul des coefficients de Fourier

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) e^{in\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{[T]} f(t) e^{2i\pi(n\varphi)t} dt$$

devient :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \widehat{f}(s) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi st} dt$$

Formellement, on construit ainsi la fonction \widehat{f} , d'une variable réelle s , appelée *transformée de Fourier de f* .

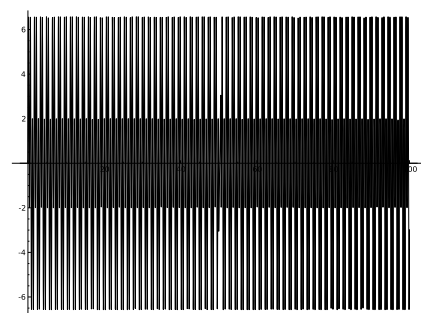
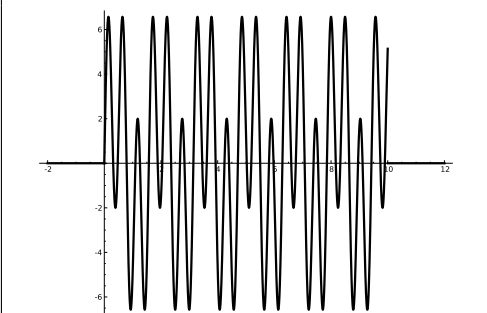
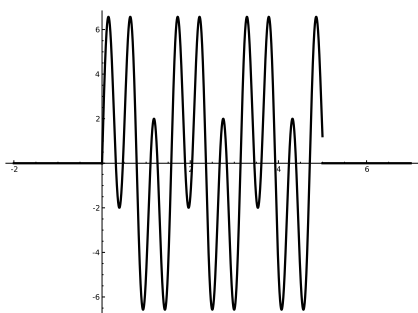
Il s'agit d'une fonction à valeurs complexes à partir de laquelle on peut généraliser la notion de diagramme des fréquences. Précisément, le graphe de la fonction $s \mapsto |\widehat{f}(s)|$ offre une représentation de la fonction f dans l'espace des fréquences.

Exemple : notons

$$f : t \mapsto 3 \sin(4t) + 5 \sin(12t).$$

et f_5, f_{10}, f_{100} les fragments de f définis respectivement sur les intervalles $[0, 5]$, $[0, 10]$ et $[0, 100]$:

$$f_5 : t \mapsto \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0, 5] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \left| \quad f_{10} : t \mapsto \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0, 10] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \left| \quad f_{100} : t \mapsto \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0, 100] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Chacune de ces fonctions admet une transformée de Fourier :

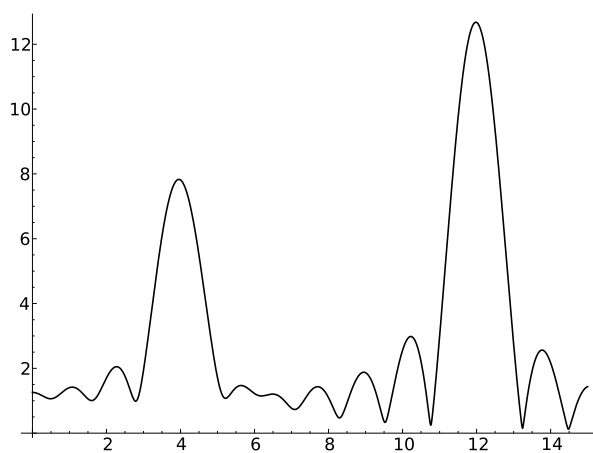
$$\widehat{f_5}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_5(t)e^{-2i\pi st} dt = \int_0^5 f(t)e^{-2i\pi st} dt$$

$$\widehat{f_{10}}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{10}(t)e^{-2i\pi st} dt = \int_0^{10} f(t)e^{-2i\pi st} dt$$

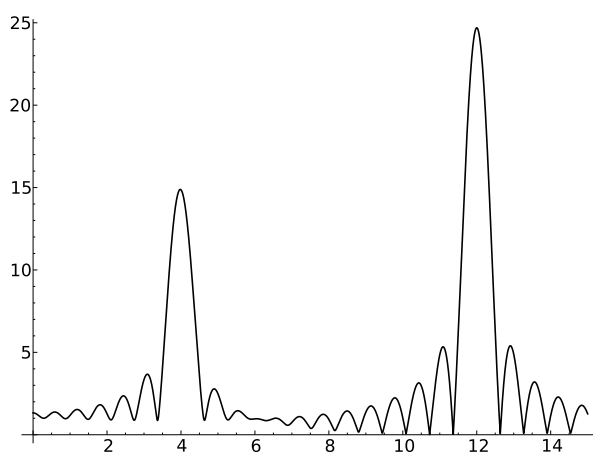
$$\widehat{f_{100}}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{100}(t)e^{-2i\pi st} dt = \int_0^{100} f(t)e^{-2i\pi st} dt$$

En traçant les graphes $(s, |\widehat{f_k}(s)|)$, on voit alors apparaître les pulsations principales du signal f de départ :

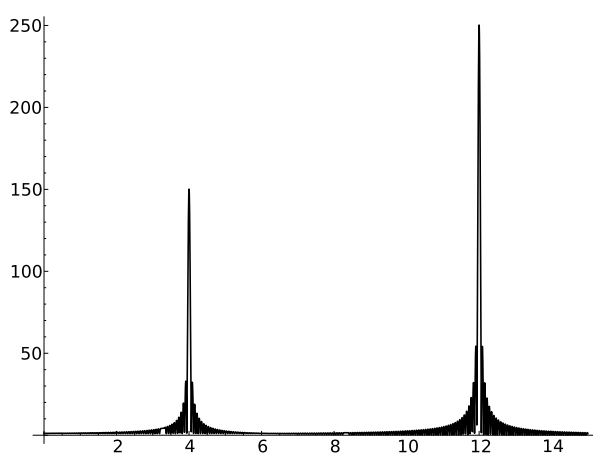
Transformée de Fourier de f_5 :



Transformée de Fourier de f_{10} :



Transformée de Fourier de f_{100} :



On constate dans chaque cas la présence de pics au niveau des pulsations présentes dans le signal de départ ($\vec{w} = 4$ et $\vec{w} = 12$). On constate également que l'intensité du pic est à chaque fois proportionnelle à l'amplitude de l'harmonique associée. On constate enfin que plus l'intervalle sur lequel on connaît la fonction f est grand, plus les pics sont marqués.

1.5.2 Transformée de Fourier inverse

Comme dans le cas discret, la transformée de Fourier \hat{f} d'une fonction f permet de reconstruire la fonction f d'origine. Dans le cas discret, il s'agissait d'une somme sur toutes les harmoniques : si f est continue sur \mathbb{R} , alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{in\omega t} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{2i\pi(n\varphi)t}$$

Dans le cas continu, l'ensemble des fréquences étant continu, on doit remplacer la somme discrète par une intégrale. Ainsi, on peut montrer que si f est continue, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(s) e^{2i\pi ts} ds.$$

D'un point de vue théorique, le caractère inversible de la transformée de Fourier permet de créer une dualité entre l'espace temporel et l'espace des fréquences. Autrement dit, la transformée de Fourier permet de remplacer la fonction f , de variable t par sa transformée \hat{f} de variable s .

Grâce aux propriétés du calcul intégral, certaines études sur la fonction f sont alors plus simples à effectuer sur sa transformée \hat{f} . La transformée inverse permet alors de revenir à l'espace temporel une fois toutes les opérations souhaitées effectuées.

Cette idée est à la base de la notion de filtre que l'on abordera en TP et qui permet de "nettoyer" un signal donné. Précisément, on passe dans un premier temps de la représentation temporelle à la représentation fréquentielle ($f \rightsquigarrow \hat{f}$). On peut alors sélectionner dans $\hat{f}(s)$ les fréquences que l'on souhaite conserver. On obtient ainsi une représentation "épurée" de f dans l'espace des fréquences. En appliquant la transformée de Fourier inverse à la fonction épurée, on récupère, dans l'espace temporel, une représentation filtrée de la fonction f de départ.

Enfin, nous verrons en fin de chapitre que la transformée de Fourier n'est en réalité qu'un cas particulier de la Transformée de Laplace, cette dernière offrant en particulier un nouvel outil de résolution des équations différentielles.

1.5.3 Transformée de Fourier discrète

La propriété de la transformée de Fourier évoquée plus haut est souvent utilisée dans le traitement de données expérimentales : elle permet en effet de tirer d'un signal relevé (ondes sismiques traversant un mur, train de vagues passant en un point donné, etc) une

expression analytique basée sur les fréquences données par la transformée.

Cependant, en pratique, les données sont en général obtenues sous la forme de points de mesure, i.e. la donnée d'une série de n valeurs x_0, x_1, \dots, x_{n-1} obtenus par exemple pour des temps ou des positions t_0, \dots, t_{n-1} différents.

Il a donc fallu adapter les définitions donnant la transformée de Fourier à ce type de données, l'idée principale étant de remplacer les intégrales par des sommes finies.

Ainsi, la transformée de Fourier discrète pour un jeu de données x_0, x_1, \dots, x_{n-1} est l'ensemble des valeurs X_0, X_1, \dots, X_{n-1} définies par

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad X_k = \sum_{j=0}^{n-1} x_j e^{-2i\pi \frac{jk}{n}} \quad (3) \quad (1.3)$$

Précisément, ces formules sont obtenues en supposant qu'il existe une fonction T -périodique f telle que

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad x_k = f(t_k)$$

et en supposant que l'intervalle de temps de mesure corresponde à un nombre entier de périodes de f .

En prenant f nulle hors de l'intervalle de mesures, la formule 1.3 correspond à une approximation en rectangles de l'intégrale

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi st} dt = \int_{t_0}^{t_{n-1}} f(t) e^{-2i\pi st} dt$$

prise en $s = \frac{k}{T}$.

En outre, un procédé identique permet d'obtenir des formules analogues pour la transformée de Fourier inverse, et l'on a :

$$\forall k \in \{0, \dots, n-1\}, \quad x_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} X_j e^{2i\pi \frac{jk}{n}}$$

Ces outils de transformation des signaux périodiques discrets, implémentés dans la grande majorité des logiciels de calcul permet de créer toutes sortes de filtres pour étudier les signaux périodiques et tout ce qui peut s'y ramener (ondes sismiques, sons, images, etc).

1.6 Transformée de Laplace

1.6.1 Définitions

Formellement, la transformée de Laplace est une généralisation théorique de la transformée de Fourier. Ainsi, étant donnée une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on appelle transformée de Laplace de f la fonction $\mathcal{L}(f)$, d'une variable complexe $p = a + ib$ définie par

$$\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt.$$

Notons que la transformée de Fourier correspond alors au cas particulier où p est imaginaire pure, i.e. de la forme $p = is$.

1.6.2 Domaine de définition

Si l'on se fixe une fonction f , le domaine de définition de sa transformée $\mathcal{L}(f)$ est une partie du plan complexe. C'est précisément l'ensemble des $p \in \mathbb{C}$ tels que la limite

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(t)e^{-pt} dt$$

définissant $\mathcal{L}(f)(p)$ existe.

En exploitant la propriétés $e(a + ib)t = e^{at}.e^{ibt}$ ainsi que les propriétés du calcul intégral, on peut montrer que les domaines de définition des transformées de Fourier des fonctions réelles sont tous de la forme

$$\{p \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(p) \geq K\}$$

Exemple : on note H la fonction *échelon* définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

On peut alors calculer la transformée de Laplace $\mathcal{L}(H)$ de la fonction échelon à l'aide de la définition :

$$\mathcal{L}(H)(p) = \int_0^{+\infty} H(t).e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt$$

Pour effectuer ce calcul en pratique, on commence par calculer

$$I_A = \int_0^A e^{-pt} dt = \left[-\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^A = \frac{1 - e^{-Ap}}{p}$$

On peut montrer que, lorsque $A \rightarrow +\infty$, la quantité I_A admet une limite finie si et seulement si $\operatorname{Re}(p) > 0$ et que, dans ce cas, cette limite vaut $\frac{1}{p}$. (Exercice : à démontrer). On a ainsi montré que la transformée de Laplace de la fonction échelon est

$$\mathcal{L}(H) : p \mapsto \frac{1}{p}$$

définie pour tout $p \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(p) > 0$.

1.6.3 Calcul pratique

L'étude théorique de la Transformée de Laplace a permis de déterminer une fois pour toutes les TL des fonctions usuelles, ainsi que les formules reliant Transformée de Laplace. Ainsi, en pratique, en s'appuyant sur les tableaux donnés en annexe et rassemblant l'ensemble de ces formules, on peut, en pratique, calculer des TL sans passer par le calcul intégral.

Exemples : calculer, à l'aide des tableaux, les TL des fonctions suivantes.

- $f(t) = (e^{-t} + 2t^2).H(t)$
- $f(t) = te^{3t}.H(t)$
- $f(t) = (t - 1)^3.H(t - 1)$

Exercice : démontrer les formules du second tableau à l'aide du calcul intégral (changement de variable, linéarité,...).

1.6.4 TL et TL inverse

L'une des propriétés principale de la TL est qu'elle est inversible. Autrement dit, étant donnée une fonction F de p , il n'existe qu'une fonction f telle que $F = \mathcal{L}(f)$. (On peut également exprimer cela en disant que l'opération $f \mapsto \mathcal{L}(f)$ est une bijection).

Ainsi, pour tous les problème consistant à trouver explicitement une fonction (typiquement, les équations différentielles), si l'on arrive à déterminer explicitement la TL d'une solution, on peut obtenir la fonction solution, à condition de savoir pratiquer la TL inverse. Or, là encore, la table donnant les TL des fonctions usuelles nous permet de faire de la TL inverse en ne faisant qu'un minimum de calculs.

Ainsi, si l'on reconnaît la TL d'une fonction usuelle (comme $\frac{1}{p}$, $\frac{p}{p^2+a^2}$,...) c'est immédiat. Mais cette table nous donne également toutes les informations nécessaires pour calculer la TL inverse d'une fraction rationnelle $F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ telle que $\deg P < \deg Q$. En effet, la décomposition en éléments simples nous permet d'écrire $F(p)$ sous la forme d'une somme de fractions rationnelles de la forme

$$\frac{\alpha}{p-a}, \frac{\alpha_n}{(p-a)^n}, \frac{\beta.p + \gamma}{p^2 + a^2}.$$

Or la table des TL nous donne les TL inverses de toutes ces fonctions :

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{\alpha}{p-a} \Rightarrow f(t) = \alpha e^{at}.H(t)$$

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{\alpha_n}{(p-a)^n} \Rightarrow f(t) = \alpha_n t^{n-1} e^{at}.H(t)$$

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{\beta p + \gamma}{p^2 + a^2} \Rightarrow f(t) = (\beta \cos(at) + \gamma/a \sin(at)).H(t)$$

Remarque : pour être tout à fait complet, il faudrait avoir la TL inverse des fonctions du type $\frac{\beta p + \gamma}{(p^2 + a^2)^n}$. Le calcul de ces TL inverse est plus compliqué que pour les autres termes issus de la décomposition en éléments simples. Cependant, on peut se passer de ce type de calculs en faisant de la décomposition dans \mathbb{C} et non plus dans \mathbb{R} . On n'obtient alors que des puissances de polynômes de degré 1 au dénominateur.

1.6.5 TL et équations différentielles

Toujours grâce au calcul intégral, on peut montrer qu'il existe un lien fort entre la TL d'une fonction et la TL de sa dérivée. Précisément, si f est une fonction dérivable, on a

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0).$$

De même, si f est deux fois dérivable, on a

$$\mathcal{L}(f'')(p) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0)$$

et de façon générale, si f est n fois dérivable, on a

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(p) = p^n\mathcal{L}(f)(p) - p^{n-1}f(0) - \dots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Combiné avec la linéarité de la TL, cela nous donne un outil supplémentaire pour traiter les équations différentielles linéaires : étant donnée une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(t), \\ y(0) = y_0, y'(0) = y_1, \dots, y^{(n)}(0) = y_n, \end{cases}$$

on peut passer cette équation au filtre de la TL. Précisément, les deux membres de cette équations sont des fonctions, et ces fonctions sont égales si et seulement si leurs TL respectives le sont :

$$\begin{aligned} y^{(n)} + \dots + a_0y = f(t) &\Leftrightarrow \mathcal{L}(y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y)(p) = \mathcal{L}(f)(p) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{L}(y^{(n)})(p) + a_{n-1}\mathcal{L}(y^{(n-1)})(p) + \dots \\ &\quad + a_1\mathcal{L}(y')(p) + a_0\mathcal{L}(y)(p) = \mathcal{L}(f)(p). \end{aligned}$$

En remplaçant chaque TL du membre de gauche par son expression en fonction de $\mathcal{L}(y)$, on transforme facilement cette équation en une équation de la forme

$$\mathcal{L}(y)(p) = F(p)$$

Il reste alors à retrouver la fonction d'origine dont la TL est égale à $F(p)$.

Exemple : retrouver, à l'aide de la Transformée de Laplace, l'unique solution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' &= ay \\ y(0) &= y_0 \end{cases} \quad a, y_0 \in \mathbb{R} \text{ fixés}$$

On verra en TD que la Transformée de Laplace donne également un outil efficace pour la résolution de certains *systèmes différentiels linéaires*.

1.6.6 Produit de convolution

Étant données deux fonctions f et g , on appelle *produit de convolution* de f et g la fonction $f \star g$ définie par

$$f \star g(t) = \int_0^t f(x)g(t-x) dx.$$

C'est bien une fonction de t , définie par une intégrale. On a alors une nouvelle opération sur l'ensemble des fonctions.

Propriétés

- Distributivité : $f \star (g + h) = f \star g + f \star h$.
- Commutativité : $f \star g = g \star f$.

D'autre part, le produit de convolution se comporte bien vis-à-vis de la TL. Précisément,

$$\mathcal{L}(f \star g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g).$$

Cela permet en particulier de retrouver la fonction originale d'un produit de TL.

Cela nous permet de généraliser un peu la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Ainsi, considérons l'équation

$$ay'' + by' + cy = f(t).$$

En notant $Y = \mathcal{L}(y)$ et $F = \mathcal{L}(f)$, on obtient, en appliquant la TL à cette équation

$$Y(p) = \frac{(ap + b)y(0) + ay'(0)}{ap^2 + bp + c} + \frac{1}{ap^2 + bp + c} F(p) \quad (E).$$

On peut alors isoler les termes suivants :

- Le terme $Y_H(p) = \frac{(ap + b)y(0) + ay'(0)}{ap^2 + bp + c}$ est la TL de la solution y_h de l'équation homogène associée à (E).
- Le terme $G(p) = \frac{1}{ap^2 + bp + c}$ est la TL d'une fonction g que l'on peut déterminer facilement en décomposant en éléments simples.

La TL Y de y est donc de la forme

$$Y(p) = Y_H(p) + G(p)F(p).$$

On en déduit que la solution de l'équation complète est

$$y(t) = y_h(t) + g \star f(t) = y_h(t) + \int_0^t g(x)f(t-x) dx.$$

En particulier, une fois que l'on connaît la fonction g (qui dépend uniquement de a , b et c), le produit de convolution

$$g \star f(t) = \int_0^t g(x)f(t-x) dx$$

donne une solution particulière de (E).

Transformée de Laplace, formulaire

Fonctions usuelles

Dans le tableau ci dessous, H désigne la *fonction échelon*, définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0, \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

D'autre part, a désigne un nombre complexe quelconque, ω un nombre réel quelconque et δ désigne la fonction de Dirac.

Rappel : $\mathcal{L}(f)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$

Fonction originale f	Transformée $\mathcal{L}(f)$	Domaine d'existence
$\delta(t)$	$\mathcal{L}(\delta)(p) = 1$	\mathbb{C}
$H(t)$	$\mathcal{L}(H)(p) = \frac{1}{p}$	$\text{Re}(p) > 0$
$t.H(t)$	$\mathcal{L}(t.H(t))(p) = \frac{1}{p^2}$	$\text{Re}(p) > 0$
$t^n.H(t)$	$\mathcal{L}(t^n.H(t))(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$	$\text{Re}(p) > 0$
$e^{at}.H(t)$	$\mathcal{L}(e^{at}.H(t))(p) = \frac{1}{p-a}$	$\text{Re}(p) > \text{Re}(a)$
$\cos(\omega t).H(t)$	$\mathcal{L}(\cos(\omega t).H(t))(p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\text{Re}(p) > 0$
$\sin(\omega t).H(t)$	$\mathcal{L}(\sin(\omega t).H(t))(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\text{Re}(p) > 0$
$\cosh(at).H(t)$	$\mathcal{L}(\cosh(at).H(t))(p) = \frac{p}{p^2 - a^2}$	$\text{Re}(p) > \text{Re}(a)$
$\sinh(at).H(t)$	$\mathcal{L}(\sinh(at).H(t))(p) = \frac{a}{p^2 - a^2}$	$\text{Re}(p) > \text{Re}(a)$

Formules

Dans le tableau ci-dessous, f et g sont deux fonctions admettant une transformée de Laplace, les paramètres λ , μ et α sont des nombres réels et l'opérateur \star désigne le produit de convolution :

$$(f \star g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du.$$

Linéarité	:	$\mathcal{L}(\lambda.f + \mu.g)(p) = \lambda.\mathcal{L}(f)(p) + \mu.\mathcal{L}(g)(p)$
-----------	---	---

Multiplication	:	$\mathcal{L}(f \times g)(p) = (\mathcal{L}(f) \star \mathcal{L}(g))(p)$
----------------	---	---

Convolution	:	$\mathcal{L}(f \star g)(p) = \mathcal{L}(f)(p) \times \mathcal{L}(g)(p)$
-------------	---	--

Dérivée	:	$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0)$
---------	---	--

Dérivée seconde	:	$\mathcal{L}(f'')(p) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0)$
-----------------	---	--

Primitive	:	$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p)$
-----------	---	---

Amortissement	:	$\mathcal{L}(f(t)e^{\alpha t})(p) = \mathcal{L}(f)(p - \alpha)$
---------------	---	---

Dilatation	:	$\mathcal{L}(f(\alpha t))(p) = \frac{1}{\alpha}\mathcal{L}(f)\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
------------	---	---

Retard	:	$\mathcal{L}(f(t - \alpha))(p) = e^{-\alpha p}\mathcal{L}(f)(p)$
--------	---	--

Chapitre 2

Systemes linéaires

Introduction

De nombreux problèmes (physiques et mathématiques) peuvent se traduire sous forme d'équations linéaires ou de familles d'équations linéaires. Or les matrices et le calcul matriciel donnent un outil très efficace pour représenter ces types de problèmes et plus généralement tout problème ayant un caractère linéaire :

- des familles d'équations ou inéquations linéaires,
- des familles de vecteurs (exprimés dans une base),
- des applications linéaires,
- des équations différentielles...

L'objectif de ce cours est de présenter des méthodes algorithmiques de résolution de systèmes linéaires, rendues possibles par la représentation matricielle.

Après quelques rappels théoriques sur systèmes linéaires et de leurs solutions, nous verrons comment, en traduisant la résolution d'un système en termes d'opérations matricielles, on peut élaborer ces méthodes algorithmiques.

Nous étudierons essentiellement une méthode : le pivot de Gauss ; dont l'idée générale est de construire, à partir du système de départ, un système équivalent (i.e. qui admet les mêmes solutions), plus simple à résoudre. Dans le cas du pivot de Gauss, l'objectif est d'obtenir un système *triangulaire*.

Dans un second temps, nous étudierons quelques exemples de problèmes pouvant se ramener à des systèmes linéaires. Nous verrons ainsi comment résoudre des systèmes linéaires comportant plus de contraintes que de degrés de liberté.

2.1 Généralités

2.1.1 Définitions

Définition (équation linéaire)

Une équation linéaire portant sur les inconnues x_1, \dots, x_p est une équation de la forme

$$(E) : a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p = b$$

où

- Les $a_i \in \mathbb{R}$ (connus) sont les coefficients de l'équation.
- Le réel $b \in \mathbb{R}$ (connu) est le second membre de l'équation.
Si $b = 0$, l'équation (E) est dite homogène.

Définition (système linéaire)

Un système linéaire portant sur les inconnues x_1, \dots, x_p est la donnée d'un ensemble d'équations linéaires portant sur les inconnues x_1, \dots, x_p :

$$(S) = \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 & (E_1) \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 & (E_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n & (E_n) \end{cases} = \{(E_1), \dots, (E_n)\}$$

Ici,

- $p \in \mathbb{N}^*$ est le nombre d'inconnues.
- $n \in \mathbb{N}^*$ est le nombre d'équations.
- Les réels $a_{ij} \in \mathbb{R}$ (connus) sont les coefficients du système (S) .
- Les réels $b_i \in \mathbb{R}$ (connus) forment le second membre de (S) .
S'ils sont tous nuls, le système est dit homogène.

Définition (solutions d'un système linéaire)

Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues.

- Une solution de (S) est un p -uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ satisfaisant *l'ensemble des équations*.
- Résoudre (S) , c'est déterminer *l'ensemble de ses solutions*.
- Deux systèmes linéaires (S_1) et (S_2) sont dits *équivalents* si *ils possèdent le même ensemble de solutions*.

Notes :

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire à p inconnues est donc un sous-ensemble de \mathbb{R}^p . Dans les cas $p = 2$ et $p = 3$, on pourra représenter cet ensemble comme une partie du plan ou de l'espace (muni d'un repère).
- On verra dans la suite que les méthodes algorithmiques de résolution d'un système linéaire consiste principalement en la transformation du système de départ en un système équivalent plus simple à étudier et à résoudre.

Enfin, on verra également que le traitement d'un système linéaire s'appuie principalement sur la représentation *matricielle* de celui ci. Précisément,

Définition (matrices d'un système linéaire)

Soit (S) un système linéaire de n équations à p inconnues. Avec les notations ci-dessus, on appelle

- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ la matrice des coefficients,
- $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ le vecteur inconnu,
- $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le vecteur second membre.

Par ailleurs, par définition du produit de matrice, on a

$$(S) \iff A \times X = B$$

Enfin, on appelle *matrice étendue* du système (S) la matrice

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & b_n \end{array} \right)$$

L'utilisation des matrices permet d'utiliser tous les outils de calcul matriciel pour étudier et résoudre les systèmes linéaires. La représentation sous forme de tableau permet en particulier de représenter et manipuler les systèmes linéaires à l'aide d'un ordinateur, toute manipulation dans (S) pouvant se traduire par une manipulation des lignes de la matrice A associée.

2.1.2 Structure de l'ensemble des solutions

Résoudre un système linéaire (S) de n équations à p inconnues consiste donc à déterminer le sous-ensemble Σ de \mathbb{R}^p rassemblant l'ensemble des p -uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ qui satisfont l'ensemble des contraintes du système, ces dernières étant représenté par les différentes équations.

Or, pour tout $p \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, on appelle *hyperplan de \mathbb{R}^p* l'ensemble des solutions d'une équations linéaire à p inconnues.

Il s'agit d'un *sous-espace affine* de l'espace vectoriel \mathbb{R}^p , de dimension $p - 1$ et l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaire à p peut alors être représenté par une intersection d'hyperplans de \mathbb{R}^p .

Note :

- Dans le cas $p = 2$, les hyperplans de \mathbb{R}^2 peuvent être représentées par [des droites du plan muni d'un repère](#).
- Dans le cas $p = 3$, les hyperplans de \mathbb{R}^3 peuvent être représentées par [des plans de l'espace muni d'un repère](#).

Une étude théorique des espaces affines de \mathbb{R}^p permet alors de mettre en évidence une propriété importante des systèmes linéaires :

Un système linéaire à p inconnues admet soit

- [une infinité de solutions](#),
- [une unique solution](#),
- [aucune solution](#).

Précisément,

- Un système linéaire admettant une unique solution est dit [inversible](#) ou encore appelé [système de Cramer](#).

On peut montrer qu'il est alors équivalent à un système carré (i.e. ayant autant d'équations que d'inconnues) dont la matrice A est [inversible](#).

C'est principalement pour ces systèmes inversible que l'on étudiera des méthodes de résolution algorithmique.

- Pour un système linéaire admettant une infinité de solutions, du fait du caractère linéaire des différentes équations, on peut montrer que l'ensemble Σ des solutions vérifie [le principe de superposition](#) :
 - si (S) est homogène, alors l'addition $X_1 + X_2$ de deux solutions $X_1, X_2 \in \Sigma$ est encore une solution.
 - si (S) n'est pas homogène, l'addition $X_0 + X_h$ d'une solution $X_0 \in \Sigma$ et d'une solution X_h du système homogène associé à (S) est encore une solution de (S) .

Exercice : à démontrer en s'appuyant par exemple sur la notation matricielle.

En pratique, cela signifie que si l'ensemble Σ est non vide, il peut être décrit à l'aide d'une paramétrisation linéaire à $d \leq p$ paramètres :

$$\Sigma = \{(f_1(t_1, \dots, t_d), \dots, f_p(t_1, \dots, t_d)), t_i \in \mathbb{R}\}$$

où chaque fonction coordonnée f_i est de la forme

$$f_i(t_1, \dots, t_d) = \alpha_{i1}.t_1 + \dots + \alpha_{id}.t_d + \beta_i, \quad \alpha_{ij}, \beta_i \in \mathbb{R}$$

Le nombre d de paramètres nécessaires à la description de l'ensemble Σ est la *dimension* de ce sous-espace. Cette dimension dépend directement du nombre d'inconnues et du nombre de contraintes effectives présentes dans le système étudié, i.e. du nombre d'équations *indépendantes* que contient celui-ci.

D'autre part, à partir d'une paramétrisation donnée, il est possible d'extraire une représentation vectorielle de Σ , formée des d vecteurs

$$u_j = (\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{pj}) \in \mathbb{R}^p, \quad j \in \{1, \dots, d\}$$

et du vecteur translation

$$v = (\beta_1, \dots, \beta_p) \in \mathbb{R}^p$$

- Il peut exister deux raisons distinctes pour qu'un système donné n'admette aucune solution :

— Le système contient trop de contraintes par rapport au nombre d'inconnues. Un tel système est dit *sur-déterminé*.

Exemples :

- Un système de trois équations à deux inconnues correspondant à trois droites non concourantes du plan.
- Un système de quatre équations à trois inconnues correspondant à quatre plans de l'espace n'ayant aucun point en commun.

— Le système contient, parmi l'ensemble de ses contraintes, deux contraintes incompatibles. Un tel système est dit *incompatible*.

Exemples :

- Un système à deux inconnues contenant les équations $x + y = 1$ et $x + y = 0$ est incompatible.
- De façon générale, un système linéaire contenant deux équations associées à des hyperplans parallèles et non confondus est incompatible.

On verra dans la suite comment traiter les systèmes sur-déterminer. On supposera d'ici là (et sauf mention contraire) que les systèmes étudiés admettent au moins une solution.

2.2 Le Pivot de Gauss et applications

Soit $(S) : AX = B$ un système de Cramer de n équations à n inconnues. D'un point de vue formel, les outils du calcul matriciel permettent d'exprimer l'unique solution de (S) :

$$AX = B \iff X = A^{-1} \times B$$

Cependant, en pratique, cette représentation ne permet pas de déterminer facilement l'unique solution cherchée car le calcul de la matrice inverse A^{-1} nécessite plus de calculs que la résolution du système lui-même. Précisément, on peut montrer que, pour calculer l'inverse d'une matrice carrée à n lignes en utilisant la formule explicite

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t(\text{co}A)$$

cela nécessite un nombre d'opérations de l'ordre de $(n - 1)!$.

2.2.1 Les systèmes triangulaires

Définition (système triangulaire)

Un système linéaire $(S) : AX = B$ est dit *triangulaire* supérieur (resp. inférieur) si sa matrice A est triangulaire supérieure (resp. inférieure) :

$$A = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad A = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ * & * & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Autrement dit, un système triangulaire (supérieur) est de la forme

$$(T) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = b_1 & (E_1) \\ \phantom{a_{11}x_1} + a_{22}x_2 + \dots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = b_2 & (E_2) \\ \phantom{a_{11}x_1} \phantom{a_{22}x_2} + \ddots \phantom{a_{2,n-1}x_{n-1}} + \phantom{a_{2n}x_n} = & \vdots \\ \phantom{a_{11}x_1} \phantom{a_{22}x_2} \phantom{a_{2,n-1}x_{n-1}} + a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{nn}x_n = b_n & (E_{n-1}) \\ \phantom{a_{11}x_1} \phantom{a_{22}x_2} \phantom{a_{2,n-1}x_{n-1}} \phantom{a_{n-1,n-1}x_{n-1}} + a_{nn}x_n = b_n & (E_n) \end{cases}$$

On peut montrer qu'un tel système est inversible si et seulement si aucun de ses coefficients diagonaux n'est nul.

Il existe alors un algorithme "simple" permettant de déterminer l'unique solution d'un tel système en un minimum d'opérations. Précisément, dans le cas d'un système triangulaire supérieur,

1. La dernière équation permet d'obtenir la dernière coordonnée de la solution cherchée au prix d'une division :

$$(E_n) \Rightarrow x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$$

2. L'avant-dernière équation permet d'exprimer l'avant dernière coordonnée de la solution cherchée en fonction de la dernière (calculée précédemment).

$$(E_{n-1}) \Rightarrow x_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}}(b_n - a_{n-1,n}x_n)$$

3. etc jusqu'à la première équation qui permet d'exprimer la première coordonnée en fonction des autres :

$$(E_1) \Rightarrow x_1 = \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - \sum_{k=2}^n a_{1k}x_k \right)$$

On obtient alors l'algorithme suivant :

	Entrées : $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), B = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$
1.	On initialise X à un vecteur à n coordonnées $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.
2.	Pour j allant de n à 1 :
3.	$s \leftarrow \sum_{k=j+1}^n a_{jk}x_k$
4.	$d \leftarrow b_j - s$
5.	$x_j \leftarrow x_j / a_{jj}$
6.	Renvoyer $X = (x_1, \dots, x_n)$

On peut montrer ici que cette méthode de résolution nécessite un nombre d'opérations de l'ordre de n^2 . En effet, à l'étape j , le calcul de x_j nécessite :

- $j - 2$ additions,
- une soustraction (sauf à l'étape 1)
- une division.

soit, au total

- $1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$ additions,
- $n - 1$ soustractions,
- n divisions.

2.2.2 Le pivot de Gauss

Opérations élémentaires

Le pivot de Gauss est une méthode de résolution des systèmes de Cramer consistant à transformer un système donné en un système triangulaire *équivalent*.

Le principe du pivot est basé sur deux opérations élémentaires que l'on peut effectuer sur les équations d'un système (ou sur les lignes de sa matrice étendue) permettant d'éliminer certaines inconnues de certaines équations, sans changer l'ensemble des solutions. Ces deux opérations élémentaires sont :

- La combinaison : $(E_i) \leftarrow (E_i) + \lambda.(E_j), i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
- La permutation : $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$.

Note : dans certaines applications, on pourra également faire appel à une troisième opération élémentaire : la multiplication extérieure :

$$(E_i) \leftarrow \lambda \cdot (E_i) \quad \lambda \neq 0$$

Un exemple

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

dont la matrice étendue est

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 4 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

La première étape du Pivot consiste à utiliser la première équation du système pour éliminer la variable x des autres équations (ou à placer des 0 dans la première colonne, sous le premier coefficient de la première ligne). Précisément, le premier coefficient de la première ligne (2) est *le premier pivot*. On s'appuie dessus pour effectuer les combinaisons suivantes :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1,$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + L_1.$$

On obtient alors la matrice

$$\tilde{A}^{(2)} = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -4 & 6 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 3 & -\frac{3}{2} & 3 \\ 0 & 3 & -4 & 0 & -3 \end{array} \right).$$

La première étape est terminée. On a traité la première colonne à l'aide de la première ligne. On passe ensuite à la deuxième colonne que l'on va traiter à l'aide de la deuxième ligne. Le nouveau pivot est alors le deuxième coefficient de la deuxième ligne (-3) et les opérations et l'on place des 0 dessous à l'aide des combinaisons

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + L_2$$

qui transforment $\tilde{A}^{(2)}$ en

$$\tilde{A}^{(3)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-3} & 8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 3 \end{array} \right).$$

Note : cette seconde étape revient, du point de vue du système à supprimer la variable y des deux dernières équations.

On a terminé le traitement de la seconde colonne. Il reste ici à traiter la troisième colonne en plaçant un dernier 0 sous le dernier pivot (-1). Cela se fait à l'aide de la combinaison

$$L_4 \leftarrow L_4 + 4L_3$$

qui transforme la matrice $\tilde{A}^{(3)}$ en

$$\tilde{A}^{(4)} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 8 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \end{array} \right).$$

On a ici terminé le pivot de Gauss. Le système (S) de départ est donc équivalent au système triangulaire

$$(S) : \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 6 \\ -x_3 - \frac{1}{2}x_4 = 0 \\ -2x_4 = 3 \end{cases}$$

On résout alors ce système triangulaire "en remontant" et on obtient la solution cherchée.

L'algorithme

À partir de l'exemple que l'on vient de voir, on peut construire les premières fonctions de l'algorithme du pivot de Gauss.

Pour cela, il faut généraliser les opérations précédentes à une matrice générale A de la forme

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Le premier pivot est a_{11} . Pour construire $A^{(2)}$, on effectue les opérations

$$\begin{aligned} L_2 &\leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}L_1 \\ L_3 &\leftarrow L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}L_1 \\ &\vdots \\ L_n &\leftarrow L_n - \frac{a_{n1}}{a_{11}}L_1 \end{aligned}$$

On obtient alors la matrice

$$A^{(2)} = (a_{ij}^{(2)}) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}$$

D'un point de vue algorithmique, cette opération correspond à une boucle **Pour** :

Pour i allant de 2 à n :

$$L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}L_1$$

De façon générale, pour passer de

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(j)} & a_{12}^{(j)} & \cdots & a_{1j}^{(j)} & \cdots & a_{1n}^{(j)} \\ 0 & a_{22}^{(j)} & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \boxed{a_{jj}^{(j)}} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & a_{j+1,j}^{(j)} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nj}^{(j)} & \cdots & a_{nn}^{(j)} \end{pmatrix}$$

à une matrice $A^{(j+1)}$ qui contient une colonne de zéros supplémentaire, on effectue les opérations

$$\begin{aligned} L_{j+1} &\leftarrow L_{j+1} - \frac{a_{j+1,j}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}} L_j \\ &\vdots \\ L_n &\leftarrow L_n - \frac{a_{nj}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}} L_j \end{aligned}$$

qui correspond là encore à une boucle **Pour** :

```
Pour i allant de j+1 à n :
  Li ← Li -  $\frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}}$  Lj
```

Dans une première approche, le pivot de Gauss se résume donc à une *double boucle Pour*, permettant de traiter toutes les colonnes ligne par ligne :

```
Pour j allant de 1 à n-1 :
  Pour i allant de j+1 à n :
    Li ← Li -  $\frac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}}$  Lj
```

Cependant, on constate qu'à chaque étape, on divise par le pivot a_{jj} . Cela n'est donc valable si, pour chaque colonne, le pivot est non nul. Or rien ne nous garantit que cela soit le cas.

Exemple : soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Après la première étape du pivot, on obtient la matrice

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour pouvoir continuer le Pivot, il faut échanger les deux dernières lignes de A_2 :

$$L_2 \leftrightarrow L_3 \rightsquigarrow A'_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une fois que l'on a échangé le pivot avec un pivot non nul, on peut continuer le procédé. (Ici, on a terminé car la matrice est petite).

Pour trouver un pivot non nul, on a donc parcouru la colonne se trouvant sous le pivot nul à la recherche d'un coefficient non nul. Une fois repéré, on a échangé la ligne correspondante avec la ligne du pivot nul.

On peut traduire cette recherche sous forme algorithmique. Précisément, si le j -ième pivot a_{jj} est nul, on effectue la recherche suivante :

```
Pour k allant de j+1 à n :
  Si  $a_{kj} \neq 0$  :
     $L_j \leftrightarrow L_k$ 
    break
```

Notons que, puisque chaque étape modifie l'ensemble des coefficients de la matrice traitée, il est impossible d'anticiper l'apparition d'éventuels pivots nuls. Pour avoir un algorithme qui marche, il faut donc ajouter cette boucle/test au cœur de la double boucle précédente afin de s'assurer que l'on travaille toujours avec un pivot non nul.

Notes :

- Dans cette boucle/test, on ne considère jamais la valeur du pivot a_{jj} que l'on veut remplacer.
- Cette boucle/test permet de produire un pivot non nul à condition que l'ordina-

teur puisse trouver, parmi les candidats au pivot, un coefficient non nul. On peut montrer que c'est toujours le cas si la matrice traitée est inversible.

- En pratique, même pour les matrices inversibles, il peut arriver que l'algorithme n'aboutisse pas ou renvoie un résultat erroné lorsque les coefficients sont trop gros ou trop petits, de sorte que l'on arrive aux limites de stockage et/ou de précision de la machine. Ces problèmes interviennent en particulier lorsque l'on travaille avec de très gros matrices, nécessitant un nombre important de calculs. Pour palier à ces problèmes, il est possible d'améliorer le choix du pivot, mais les problèmes de stabilité des coefficients reste un problème difficile en algorithmique.
- Cet algorithme ne marche que pour les matrices inversibles. Dans de nombreux domaines (notamment en mécanique ou en modélisation numérique), cet algorithme suffit pour traiter les problèmes linéaires rencontrés. Cependant, il est possible de l'adapter au cas des matrices non inversibles de sorte qu'il renvoie une matrice triangulaire dans laquelle les dernières lignes sont des lignes de 0. Les lignes restantes correspondent alors à des équations indépendantes et, si le système étudié admet des solutions, le nombre de lignes de 0 indique la dimension de l'espace affine des solutions.
Enfin, l'étude du système triangulaire obtenu à l'issue du pivot permet de construire une paramétrisation de cet ensemble de solutions, basé sur les dernières variables du problème.

2.2.3 Décomposition LU

L'algorithme que l'on vient de voir (modifié ou non pour traiter les matrices non inversibles) est un algorithme très général. Or en pratique, si l'on a à utiliser ces outils pour traiter des problèmes linéaires, les systèmes que l'on a à étudier peuvent avoir des caractéristiques particulières (matrices symétriques en mécanique, matrices à bandes en discrétisation, matrices creuses...). Selon les cas, on peut donc encore améliorer l'algorithme pour qu'il soit plus efficace dans le cas particulier qui nous concerne.

Ces améliorations passent en particulier par le passage à la représentation matricielle du Pivot. En effet, en détaillant les actions de la multiplication matricielle, on va voir que l'on peut traduire les opérations du pivot de Gauss en opérations matricielles.

Formellement, on a le résultat suivant :

Théorème

Soit A une matrice carrée inversible. Si le pivot de Gauss effectué sur A ne nécessite pas de permutation (i.e. si l'on ne rencontre pas de pivot nul), alors il existe

1. Une matrice U triangulaire supérieure,
2. Une matrice L triangulaire inférieure dont la diagonale est composée de 1,

telles que

$$A = L \times U$$

Note : dans le théorème ci-dessus, la matrice U est précisément la matrice triangulaire supérieure issue du pivot de Gauss appliqué à A . La matrice L représente, elle, l'ensemble des combinaisons de lignes effectuées au cours du pivot.

Matrices de combinaisons

Pour modéliser le Pivot de Gauss par un produit de matrices, il faut, dans un premier temps, traduire les opérations du type

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j.$$

Or soit

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si l'on multiplie un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ par E_1 , on obtient

$$E_1 \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b + \lambda a \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

De façon générale, si l'on multiplie une matrice A (à 4 lignes) par E_1 à gauche, on agit sur chaque colonne de A comme sur le vecteur précédent. Autrement dit, on effectue la combinaison

$$L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1$$

Bien entendu, les indices 2 et 1 de la combinaison ci-dessus correspondent à la place du coefficient λ dans la matrice E_1 . Précisément :

- Le numéro de la ligne modifiée correspond au numéro de ligne du coefficient λ dans E_1 .
- Le numéro de la ligne sur laquelle est basée la combinaison correspond au numéro de colonne du coefficient λ dans E_1

De façon générale, pour $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout couple d'entiers $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $i > j$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $E(i, j, \lambda)$ la matrice carrée à n lignes définie par

$$E(i, j, \lambda) = \begin{matrix} & & & C_j & & & & & \\ & & & \downarrow & & & & & \\ & & & & & & & & \\ L_i \longrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} & & & & & & & \end{matrix}$$

$E(i, j, \lambda)$ est appelée *matrice de combinaison élémentaire* et on peut montrer que pour toute matrice A à n lignes, le produit $E(i, j, \lambda) \times A$ est la matrice obtenue en effectuant, dans A , la combinaison

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda \cdot L_j$$

Note : la matrice $E(i, j, \lambda)$ est clairement inversible et

$$E(i, j, \lambda)^{-1} = E(i, j, -\lambda)$$

De ce point de vue, un pivot de Gauss sans permutation étant une succession de combinaisons élémentaires de lignes, cela correspond à une multiplication successive à gauche par des matrices de combinaisons élémentaires :

$$A \longrightarrow E_1 \times A \longrightarrow E_2 \times E_1 \times A \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_p \times \cdots \times E_1 \times A = U$$

En notant $M = E_p \times \cdots \times E_1$, on montre qu'il existe une matrice M telle que $MA = U$.
En notant

$$L = M^{-1} = E_1^{-1} \times \cdots \times E_p^{-1}$$

on a alors la décomposition $A = L \times U$ cherchée.

Par ailleurs, on peut montrer que, A étant un produit de matrices de combinaisons élémentaires, c'est une matrice triangulaire inférieure dont

- les coefficients diagonaux valent 1,
- les coefficients non nuls, sous la diagonale correspondent exactement aux coefficients $\frac{a_{ij}}{a_{jj}}$ des combinaisons linéaires que l'on souhaite appliquer à A .

D'un point de vue algorithmique, on peut donc ajouter aux boucles vues plus haut une commande permettant de remplir la matrice L au fur et à mesure.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Le pivot de Gauss permet de construire les matrices L et U de la décomposition au fur et à mesure :

Étape	Combinaisons	Matrice U	Matrice L
0		$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
1	$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2	$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Matrices de permutation

Pour obtenir une représentation *complète* du Pivot de Gauss sous forme matricielle, il reste à prendre en compte les éventuelles permutations lignes. Or, là encore, on peut représenter la permutation de deux lignes d'une matrice A par la multiplication d'une matrice P à gauche.

Ainsi, en dimension 3, on peut vérifier rapidement que la matrice

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

échange les lignes 1 et 2 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}$$

De façon générale, pour tout entier n et tous entiers $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on appelle *matrice de permutation élémentaire* P_{ij} la matrice

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

obtenue en permutant, dans la matrice I_n , les lignes numéro i et j .

On peut alors montrer que la multiplication à gauche d'une matrice A à n lignes effectuée, dans A , la permutation

$$L_i \longleftrightarrow L_j$$

Par ailleurs, on peut montrer que toute matrice permutation élémentaire P_{ij}

- est inversible,
- vérifie $\det(P_{ij}) = -1$,
- vérifie $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.

Du point de vue du Pivot de Gauss, d'éventuelle permutations (dues par exemple à l'apparition de pivots nuls) se traduit, dans la chaîne de multiplications, par l'apparition de matrices de permutations élémentaires P_i . Bien que ces permutations se fassent au fur et à mesure, on peut montrer que l'on obtient le même résultat en rassemblant l'ensemble des permutations élémentaires au début de la chaîne. On obtient alors une matrice de permutation (générale)

$$P = P_s \times \cdots \times P_1$$

telle que le pivot de Gauss sur la matrice $P \times A$ ne nécessite aucune permutation.

Notes :

- La matrice P ainsi construite n'est faite que de 1 et de 0, avec un 1 et un seul sur chaque ligne et chaque colonne.
- La matrice P ainsi construite est inversible et $\det(P) = (-1)^s$.

Décomposition LU générale

On peut désormais énoncer le théorème général de la décomposition LU :

Théorème

Soit A une matrice carrée inversible. Il existe

1. Une matrice P de permutations,
2. Une matrice U triangulaire supérieure,
3. Une matrice L triangulaire inférieure dont la diagonale est composée de 1,

telles que

$$P \times A = L \times U$$

En pratique, on ne connaît pas à l'avance les permutations qui seront nécessaires à l'aboutissement du pivot. On doit donc construire la matrice de permutations P au fur et à mesure à partir de la matrice identité. Or il n'est pas rare qu'une telle permutation

intervienne alors que l'on a déjà commencé à remplir la matrice L des combinaisons. Dans ce cas, on doit alors effectuer, dans L , la permutation des coefficients déjà placés.

ATTENTION : dans L , on permute uniquement les coefficients placés sous la diagonale et non l'ensemble des lignes. On doit en particulier garder la diagonale de 1.

Exemple : déterminer les matrices P , L et U de la décomposition LU de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ -4 & -2 & 3 & 7 \\ 4 & 1 & -2 & 8 \\ 0 & -3 & -12 & -1 \end{pmatrix}$$

Note : la décomposition LU d'une matrice A donnée n'est pas unique. En effet, si l'on rencontre un pivot nul au cours du procédé, on peut choisir comme pivot non nul n'importe lequel des coefficients non nuls qui se trouvent dessous. Selon les choix que l'on fait, les matrices P , L et U que l'on obtient peuvent être totalement différentes, mais vérifient toujours la relation $PA = LU$.

2.2.4 Applications du Pivot de Gauss et de la décomposition LU

Résolution de système

La première application du Pivot de Gauss est évidemment la résolution de (gros) systèmes linéaires.

Si l'on n'a qu'un seul système à résoudre, on se contente d'appliquer le pivot à la matrice étendue du système, puis on résout le système triangulaire ainsi obtenu.

Cependant, il est également possible de se baser sur la décomposition LU de la matrice A du système étudié.

Précisément, si P , L et U sont les trois matrices issues de la décomposition LU de A , on peut alors remplacer tout système de la forme $AX = B$ par le couple d'équations

$$\begin{cases} LY = PB \\ UX = Y \end{cases}$$

Autrement dit, on commence par résoudre le système $LY = PB$. On utilise alors l'unique solution Y_0 obtenue comme second membre pour le système $UX = Y_0$. On obtient alors une unique solution X_0 et on peut montrer que X_0 est également l'unique solution du système $AX = B$ cherché.

Puisque $A = P^{-1}.L.U$, on a

$$A.X_0 = P^{-1}.L.\underbrace{U.X_0}_{Y_0} = P^{-1}.\underbrace{L.Y_0}_{P.B} = \underbrace{P^{-1}.P}_{I_n}.B = B$$

Le vecteur X_0 correspond donc bien à l'unique solution du système $AX = B$.

Cette méthode permet donc de remplacer la résolution d'un système linéaire quelconque par la résolution de deux systèmes linéaires triangulaires.

Cette méthode est en particulier utilisée pour résoudre plusieurs systèmes linéaires de la forme $AX = B_i$ associés à une même matrice A mais avec différents seconds membres B_i . On commence par calculer la décomposition LU de A puis on remplace chacun des systèmes $AX = B_i$ par les couples de systèmes triangulaires

$$\begin{cases} LY = PB_i \\ UX = Y \end{cases}$$

Calcul de déterminant

Une autre application importante du Pivot de Gauss est le calcul de déterminant.

En effet, d'après les propriétés du déterminant, si l'on connaît la décomposition $PA = LU$ d'une matrice A donnée, on a

$$\det(PA) = \det(LU) \implies \det(P). \det(A) = \det(L). \det(U)$$

Or

- La matrice P vérifie $\det(P) = (-1)^s$ où s compte le nombre de permutations effectuées au cours du pivot.
- La matrice L vérifie $\det(L) = 1$.
- Le déterminant de la matrice U est égale au produit de ses termes diagonaux.

Autrement dit, on a

$$\det(A) = \det(P)^{-1}. \det(L). \det(U) = (-1)^s. \det(U)$$

Inversion de matrice

Le Pivot de Gauss peut également servir au calcul de l'inverse d'une matrice $A = (a_{ij})$ donnée.

D'un point de vue théorique, on peut en effet montrer que pour toute matrice A inversible, les colonnes de la matrice A^{-1} sont exactement les solutions des systèmes

$$A \times X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A \times X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A \times X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On est alors exactement dans le cas où l'on souhaite résoudre plusieurs systèmes linéaires associés à une même matrice A . La décomposition LU permet alors une résolution efficace de ces n systèmes.

D'autre part, il est également possible d'étendre la méthode du pivot de Gauss en une méthode directe de calcul d'inverse basée sur la double matrice

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right)$$

1. En étendant l'opération de "vide-colonne" à l'ensemble d'une colonne (sauf le pivot), on transforme la matrice A en **une matrice diagonale**.
2. En divisant alors chaque ligne par le coefficient diagonal (non nul), on transforme la matrice A en **la matrice identité**.

Or on a vu plus haut que l'ensemble de ces opérations peuvent être représentées par la multiplication par une matrice M . Cette matrice est nécessairement la matrice A^{-1} (puisque le produit par A donne I_n). Ayant également effectué ces opérations sur la matrice identité, on obtient, à droite de la double matrice, la matrice

$$A^{-1} \times I_n = A^{-1}$$

Exemple : calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.