



Mathématiques générales ISA4

Mourad ABOUZAIID

ISABTP 4^e année
2019-2020
version enseignant

Version du 28 août 2019

Table des matières

1	Systèmes différentiels	5
	Introduction	5
1.1	Généralités	6
1.1.1	Définitions	6
1.1.2	Courbes intégrales et portrait de phase	8
1.1.3	Problème de Cauchy	8
1.2	Systèmes différentiels linéaires	9
1.2.1	Définitions et représentation matricielle	9
1.2.2	Structure de l'ensemble des solutions	10
1.2.3	Matrice résolvante	11
1.2.4	Système linéaires à coefficients constants	13
1.2.5	Classification des portraits de phases (systèmes linéaires 2×2)	15
1.3	Étude qualitative des systèmes autonomes	17
1.3.1	Systèmes autonomes et champs de vecteurs	17
1.3.2	Points d'équilibre et stabilité	18
1.3.3	Linéarisation	19
1.3.4	Cycles limites et attracteurs étranges	20
2	Résolution numériques d'équations différentielles	21
2.1	Position du problème	22
2.2	Différences finies	22
2.3	Application à la résolution des EDO	25
2.3.1	Schémas d'Euler (explicite)	25
2.3.2	Schémas numériques	27
2.3.3	Consistance, stabilité, convergence	28
3	Résolution numériques d'équations aux dérivées partielles	33
3.1	Notions de base	33
3.1.1	Définitions et notations	33
3.1.2	Exemples d'EDP classiques	34
3.1.3	Classification des EDP linéaires d'ordre 2	35
3.1.4	Conditions initiales et conditions limites	36
3.2	Différences finie	38
3.3	Illustrations de la méthode des différences finies	41
3.3.1	Équation de la chaleur 2D, stationnaire	41
3.3.2	Équation de la chaleur 1D instationnaire	52

3.4	Résolution exacte par séparation des variables	58
-----	--	----

Chapitre 1

Systemes différentiels

Introduction

Les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles sont au cœur de la modélisation des phénomènes physiques.

L'étude théorique et pratique de ces équations et des systèmes associés a pour cela rapidement constitué une part importantes des mathématiques modernes. Ces études on en particulier produit de nombreuses méthodes d'études qualitatives et quantitatives pour ce type de problèmes, ainsi que des méthodes de résolution approchées, spécifiquement développées pour pouvoir être confiées à un ordinateur.

Dans les années précédentes, nous avons étudié différentes méthodes d'études pour les équations différentielles (méthodes avant tout basées sur une classification rigoureuse de ce type d'équations).

Le but de ce chapitre est de présenter les résultats spécifiques aux *systemes différentiel*, i.e. aux systèmes de plusieurs équations différentielles, portant sur un ensemble de fonctions d'une même variable.

Nous verrons en particulier que de nombreux résultats théoriques vus pour les équations seules restent valables pour les systèmes différentiels.

Précisément, après quelques généralités, nous présenterons des méthodes de résolution algébrique valable pour un certain type de systèmes : les systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.

Dans un second temps, nous présenterons des méthodes d'étude qualitative de systèmes plus généraux : les systèmes autonomes.

Les méthodes numériques de résolution approchées évoquées ci-dessus seront abordées dans les chapitres suivants de cette année. Les méthodes d'étude qui suivent nous permettrons alors de comparer aux résultats attendus les résultats approchés obtenus à l'aide de méthodes algorithmiques.

1.1 Généralités

1.1.1 Définitions

Formellement, une équation différentielle est une équation liant une fonction d'une variable réelle à ses dérivées. D'autre part, on appelle *système différentiel* la donnée d'un ensemble d'équations différentielles, liant entre elles différentes fonctions d'une même variable réelle et leurs dérivées. Précisément,

Définition (équation différentielle - système différentiel)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. On appelle *équation différentielle d'ordre n* , portant sur une fonction y d'une variable t , toute équation de la forme

$$(E) : y^{(n)} = \varphi(y, y', \dots, y^{(n-1)}, t)$$

où φ est une fonction connue.

2. On appelle *système différentiel d'ordre n* , portant sur un ensemble y_1, \dots, y_p de fonctions d'une même variable t , un ensemble d'équations de la forme

$$(S) : \begin{cases} y_1^{(n)} = \varphi_1(y_1, \dots, y_1^{(n-1)}, \dots, y_p, \dots, y_p^{(n-1)}, t) \\ y_2^{(n)} = \varphi_2(y_1, \dots, y_1^{(n-1)}, \dots, y_p, \dots, y_p^{(n-1)}, t) \\ \vdots \\ y_p^{(n)} = \varphi_p(y_1, \dots, y_1^{(n-1)}, \dots, y_p, \dots, y_p^{(n-1)}, t) \end{cases}$$

Les fonctions inconnues peuvent représenter différentes quantités évoluant conjointement au sein d'un même système dynamiques (coordonnées, température, pression, position, etc) en fonctions, par exemple du temps. Résoudre un tel système consiste à déterminer explicitement chacune des fonctions inconnues. Cela permet alors de connaître l'état du système étudié à chaque instant.

L'objet de ce chapitre est donc de présenter des méthodes mathématiques permettant de *résoudre* ces systèmes différentiels.

Dans le cas d'un système linéaire, il s'agit précisément de déterminer l'ensemble des *p -uplets de fonctions* (y_1, \dots, y_p) qui vérifient *l'ensemble* des équations différentielles du système.

Comme dans le cas d'une équation seule, la première étape permettant la mise en place de méthodes d'étude consiste en une *classification* des différents types de systèmes différentiels.

Ainsi, comme dans le cas d'une seule équation, on peut distinguer les systèmes différentiels en fonction de leur *ordre*, i.e. la plus haute dérivée intervenant dans ses équations. Cependant, la proposition ci-dessous permet de transformer n'importe quel système différentiel en un système d'ordre 1, quitte à augmenter le nombre d'équations et d'inconnues :

Proposition

Soit (E) une équation différentielle d'ordre n :

$$(E) : \varphi(y, y', \dots, y^{(n)}, t) = 0$$

En posant

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ \vdots \\ y_n = y^{(n-1)} \end{cases}$$

toute solution de (E) peut être associée à une et une seule solution du système

$$(S) : \begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \vdots \\ y'_{n-1} = y_n \\ y'_n = \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \end{cases}$$

Ce résultat s'étendant aux équations d'ordre $n > 1$ issues d'un système, nous pourrons nous contenter, dans la suite, d'étudier les systèmes différentiels *d'ordre 1* :

$$(S) : \begin{cases} y'_1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_p, t) \\ y'_2 = \varphi_2(y_1, \dots, y_p, t) \\ \vdots \\ y'_p = \varphi_p(y_1, \dots, y_p, t) \end{cases}$$

Notons en particulier qu'un tel système est *carré*.

Par ailleurs, en note Y la fonction vectorielle

$$Y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^p \\ t \longmapsto (y_1(t), \dots, y_p(t))$$

on peut construire une forme vectorielle pour le système (S) ci-dessus sous la forme

$$(S) \iff Y' = F(Y, t)$$

basée sur une fonction $F : \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}^p$ définie à partir des fonctions φ_1 à φ_p .

1.1.2 Courbes intégrales et portrait de phase

En petites dimensions (i.e. si $p = 2$ ou $p = 3$), on peut définir une représentation géométrique de l'ensemble des solutions d'un tel système. En effet, dans le cas $p = 2$, on a

$$(S) : \begin{cases} x' &= \varphi(x, y, t) \\ y' &= \psi(x, y, t) \end{cases}$$

Toute solution de (S) est alors un couple de fonctions (x, y) dépendant d'une même variable t et définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. En se plaçant dans le plan muni d'un repère (orthonormé), on peut alors représenter une telle solution par l'ensemble

$$T_{(x,y)} = \{(x(t), y(t)), t \in I\}$$

Les fonctions x et y étant continues, cet ensemble est *une courbe du plan* appelée *courbe intégrale* du système (S) ou *trajectoire* de (S) .

Enfin, dans ce cas, l'ensemble des solutions de (S) peut être représenté par une famille de courbes formant *le portrait de phase* du système (S) .

Note : dans le cas $p = 3$, chaque solution de (S) peut être associée à une courbe de l'espace muni d'un repère. L'ensemble de ces courbes forme, là encore, le portrait de phase de (S) . Enfin, bien que l'on n'ait plus accès à l'outil géométrique, il est formellement possible de définir les courbes intégrales et le portrait de phase pour des systèmes différentiels de toutes tailles.

1.1.3 Problème de Cauchy

Comme dans le cas $p = 1$, on peut montrer que, sauf cas particulier, tout système différentiel de p équations d'ordre 1 admet une infinité de solutions. On peut alors isoler une unique solution en ajoutant au système un ensemble de p conditions initiales

$$y_1(t_0) = y_{10}, \quad y_2(t_0) = y_{20}, \dots, y_p(t_0) = y_{p0}$$

en une valeur t_0 fixée du paramètre.

Note : via l'écriture vectoriel du système (S) , l'ensemble des conditions initiales peuvent se donner sous la forme $Y(t_0) = Y_0 \in \mathbb{R}^p$ fixé.

On obtient ainsi un *problème de Cauchy* et l'on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème

Soit (P) un problème de Cauchy de la forme

$$(P) : \begin{cases} Y' = F(Y, t) & (S) \\ Y(t_0) = Y_0 & (C.I.) \end{cases}$$

Si la fonction F vérifie certaines hypothèses de continuité (que l'on supposera toujours vraies), alors le problème (P) **admet une unique solution**.

D'un point de vue géométrique, cela signifie qu'en chaque point $Y_0 \in \mathbb{R}^p$ passe une et une seule courbe intégrale. Autrement dit, dans le portrait de phase d'un système différentiel, les courbes intégrales ne peuvent se couper.

1.2 Systèmes différentiels linéaires

1.2.1 Définitions et représentation matricielle

Définition

1. Un système différentiel est dit *linéaire* si chacune des fonctions φ_i qui le définit est linéaire :

$$(S) : \begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + \dots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t) \\ \vdots \\ y_p' = a_{p1}(t)y_1 + a_{p2}(t)y_2 + \dots + a_{pp}(t)y_p + b_p(t) \end{cases}$$

2. Les fonctions a_{ij} sont appelées **les coefficients de (S)** .

3. Les fonctions b_i forment **le second membre**.

Si elles sont toutes nulles, le système est dit **homogène**.

Le caractère linéaire d'un tel système permet alors d'en donner une représentation sous la forme d'une matricielle. Précisément, avec les notations ci-dessus, en notant

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1p}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2p}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}(t) & a_{p2}(t) & \cdots & a_{pp}(t) \end{pmatrix}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_p(t) \end{pmatrix}$$

on a

$$(S) \iff Y' = A(t)Y + B(t)$$

1.2.2 Structure de l'ensemble des solutions

Le caractère *linéaire* des systèmes différentiels linéaires permet d'étudier en détail la structure de l'ensemble Σ des solutions d'un tel système. En effet, on peut montrer (notamment via la notation matricielle) qu'un système différentiel de la forme $Y' = A(t)Y + B(t)$ vérifie le *principe de superposition* :

Théorème

Soient

$$(S) : Y' = A(t)Y + B(t) \quad \text{et} \quad (H) : Y' = A(t)Y$$

un système différentiel linéaire et son système homogène associé.

1. Pour toutes solutions Y_1 et Y_2 de (H) , et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction vectorielle

$$Y : t \longmapsto \lambda Y_1(t) + Y_2(t)$$

est une solution de (S) .

2. Si Y_p est une solution de (S) , pour toute solution Y_h de (H) , la fonction vectorielle

$$Y : t \longmapsto Y_p(t) + Y_h(t)$$

est une solution de (H) .

Exercice : à démontrer.

D'un point de vue pratique, cela signifie que :

1. L'ensemble Σ_h des solutions d'un système différentiel linéaire homogène est un *espace vectoriel*.
2. L'ensemble Σ des solutions d'un système différentiel quelconque est un *espace affine*, dirigé par l'ensemble Σ_h des solutions du système homogène associé.

On peut en outre montrer que ces espaces sont de dimension p , soit le nombre d'inconnues du système. En pratique cela signifie que

1. L'ensemble Σ_h des solutions d'un système différentiel linéaire *homogène* à p inconnues est engendré par p solutions indépendantes Y_1, \dots, Y_p :

$$\begin{aligned}\Sigma_h &= \{Y : t \mapsto \alpha_1 \cdot Y_1(t) + \dots + \alpha_p \cdot Y_p(t), \alpha_k \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ Y : t \mapsto \sum_{k=1}^p \alpha_k \cdot Y_k(t), \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}\end{aligned}$$

2. Si Y_p est solution d'un système différentiel linéaire (H) , l'ensemble Σ des solutions de (S) est

$$\Sigma = \{Y : t \mapsto Y_p(t) + Y_h(t), Y_h \in \Sigma_h\}$$

Autrement dit,

1. Pour résoudre un système différentiel linéaire et homogène à p inconnues, on doit déterminer p solutions vectorielles Y_1, \dots, Y_p indépendantes.
2. Pour résoudre un système différentiel linéaire non homogène, on doit résoudre le système différentiel homogène associé et trouver une solution du système complet.

On va voir dans la suite comment, dans le cas d'un système linéaire homogène à *coefficients constants* $Y' = AY$ (avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), il peut être possible de construire p solutions d'un système homogène à l'aide des *éléments propres* (i.e. valeurs propres et vecteurs propres) de la matrice A .

Dans le cas d'un système non homogène, la recherche d'une solution particulière Y_p est, en général, un problème compliqué. Bien qu'il existe quelques méthodes spécifiques à certains types de second membre, la détermination d'une solution particulière s'appuie le plus souvent sur le problème physique dont est issue le système étudié.

1.2.3 Matrice résolvante

Soit $(H) : Y' = A(t)Y$ un système différentiel linéaire homogène à p inconnues. Là encore, le fait que l'ensemble des solutions Σ_h de (H) s'exprime sous la forme de *combinaisons linéaires* de p solutions de base induit une représentation matriciel de cet ensemble de solutions. Précisément, si Y_1, \dots, Y_p sont p solutions indépendantes de (H) , en notant

$$M(t) = \begin{pmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) & \cdots & Y_p(t) \end{pmatrix}$$

on a

$$\Sigma_h = \left\{ Y : t \mapsto M(t) \times C, \quad C = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p \right\}$$

On note en particulier que cet ensemble de solution dépend de p constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ que l'on peut choisir librement pour construire une solution de (H) . Il est alors possible d'isoler une unique solution en ajoutant à (H) un ensemble de conditions initiales de la forme

$$(C.I.) : Y(0) = Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ \vdots \\ y_{p0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$$

On peut montrer qu'il existe alors une unique matrice $R(t)$ carrée à p lignes telle que l'unique solution du problème de Cauchy $(H) + (C.I.)$ soit

$$Y : t \mapsto R(t) \times Y_0$$

Cette matrice est appelée *la résolvante* du système (H) .

En pratique, on peut montrer que si $M(t)$ est une matrice de solutions de base, alors

$$R(t) = M(t) \times M(0)^{-1}$$

En effet, si $Y(t) = M(t) \times C$, alors

$$\begin{aligned} Y(0) = Y_0 &\iff M(0) \times C = Y_0 \\ &\iff C = M(0)^{-1} \times Y_0 \end{aligned}$$

On a alors

$$Y(t) = \underbrace{M(t) \times M(0)^{-1}}_{R(t)} \times Y_0$$

1.2.4 Système linéaires à coefficients constants

Solutions et éléments propres

Un système différentiel linéaires homogène $(H) : Y' = A(t)Y$ est dit à *coefficients constants* si aucun de ses coefficients a_{ij} de la matrice A ne dépend pas de t .

La matrice A de ce système est alors une matrice à coefficients réels (ou complexes) et, comme annoncé plus haut, il est possible de construire des solutions de (H) en s'appuyant sur les éléments propres de A .

Rappels : soit A une matrice carrée à p lignes. On appelle *vecteur propre de A* tout vecteur $V \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$V \neq 0 \quad \text{et} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} / A \times V = \lambda.V$$

Le coefficient λ de la relation liant $A \times V$ et V est alors appelé *valeur propre de A* associée au vecteur propre V .

Mais alors, si A est la matrice d'un système différentiel linéaire, homogène à coefficients constants, pour tout vecteur propre $V \in \mathbb{R}^p$ de A , en notant λ la valeur propre associée à V , la fonction vectorielle

$$Y : t \longmapsto e^{\lambda t}.V$$

est une solution du système $Y' = AY$.

En effet, si $Y(t) = e^{\lambda t}.V$, on a

$$Y'(t) = \lambda.e^{\lambda t}.V$$

et

$$A \times Y(t) = A \times (e^{\lambda t}.V) = e^{\lambda t}.A \times V = e^{\lambda t}.\lambda.V = Y'(t)$$

Ainsi, si A admet p vecteurs propres V_1, \dots, V_p indépendants (autrement dit, si la matrice A est *diagonalisable*), en notant λ_i la valeur propre associée à V_i , les p fonctions vectorielles

$$Y_1(t) = e^{\lambda_1 t}V_1, \dots, Y_p(t) = e^{\lambda_p t}V_p$$

forment une base de l'ensemble des solutions du système $Y' = AY$ et

$$\Sigma_h = \left\{ Y : t \mapsto \sum_{k=1}^p \alpha_k \cdot e^{\lambda_k t} V_k, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\}$$

Note : avec les notations du paragraphe précédent, la matrice $M(t)$ est ici

$$M(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} V_1 & \dots & e^{\lambda_p t} V_p \end{pmatrix}$$

Valeurs propres complexes

Si la matrice A du système $Y' = AY$ admet des valeurs propres complexes, la méthode présentée ci-dessus reste valable, les exponentielles apparaissant dans les solutions de base étant alors des exponentielles complexes. Cependant, si la matrice A est à coefficients réels, les solutions du problème sont alors des fonctions vectorielles réelles et il est alors possible d'exprimer ces solutions à l'aide des fonctions trigonométriques.

Précisément, si A est à coefficients réels, on peut montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A , alors $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A . D'autre part, si $Z \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de A associé à λ , alors $\bar{Z} \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur propre de A associé à $\bar{\lambda}$.

Ainsi, les fonctions

$$Y_1 : t \mapsto e^{\lambda t} Z \quad \text{et} \quad Y_2 : t \mapsto e^{\bar{\lambda} t} \bar{Z}$$

sont des solutions de base du système $Y' = AY$.

Cependant, on peut montrer que dans la base de solutions, on peut remplacer ces deux solutions par

$$\tilde{Y}_1 : t \mapsto \operatorname{Re}(e^{\lambda t} Z) \quad \text{et} \quad \tilde{Y}_2 : t \mapsto \operatorname{Im}(e^{\lambda t} Z)$$

dont les coefficients sont réels et s'expriment à l'aide des fonctions trigonométriques sinus et cosinus.

Exemple : déterminer les solutions (réelles) du système différentiel $Y' = AY$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice non diagonalisable

Si la matrice A du système $Y' = AY$ n'est pas diagonalisable, pour chaque couple (λ, X) de (vap, vep) de A , la fonction vectorielle

$$Y : t \mapsto e^{\lambda t} X$$

est encore une solution du système, mais A ne possède pas assez de vecteurs propres indépendants pour pouvoir extraire n fonctions vectorielles de base.

Deux méthodes différentes permettent alors de déterminer l'ensemble des solutions du système $Y' = AY$:

- L'algèbre linéaire montre qu'il est possible d'associer à A une matrice triangulaire supérieure dont les termes diagonaux sont les valeurs propres de A et dont seuls quelques coefficients de la surdiagonale sont non nuls et peuvent être pris égaux à 1. Il est alors possible de calculer directement la résolvante $R(t) = e^{At}$ du système en généralisant la notion d'exponentielle aux matrices à l'aide de la formule

$$e^M = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} M^n$$

- Si la matrice A n'est pas diagonalisable, on ne peut trouver suffisamment de vecteurs propres pour constituer une base de \mathbb{R}^n . Formellement, cela se produit lorsque la dimension d d'un sous-espace propre E_λ est strictement inférieure à l'ordre α de la valeur propre λ associée dans la factorisation du polynôme caractéristique de A . Cependant, à l'image de ce qui se fait en dimension 1, on peut montrer que la valeur propre λ produit $r = \alpha - d$ solutions différentes, de la forme

$$Y_i(t) = t^i e^{\lambda t} V_i, \quad i \in \{0, \dots, r-1\}$$

On peut en outre obtenir les $V_i \in \mathbb{C}^n$ donnant ces solutions en cherchant une solution particulière au système sous la forme

$$Y(t) = e^{\lambda t} (V_0 + tV_1 + \dots + t^{r-1}V_{r-1})$$

que l'on injecte dans le système $Y' = AY$.

1.2.5 Classification des portraits de phases (systèmes linéaires 2×2)

Dans le cas des systèmes linéaires, homogènes, à coefficients constants, on peut montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de type de portraits de phases possibles. Précisément, on peut montrer que la forme générale du portrait de phase d'un système $Y' = AY$ où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dépend

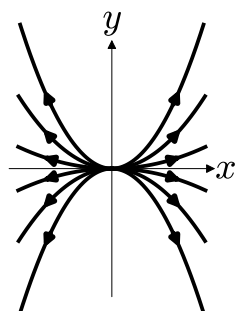
- du signe des valeurs propres de A si celles-ci sont réelles,

- du signe de la partie réelle des valeurs propres de A si celles-ci sont complexes conjuguées.

Ainsi,

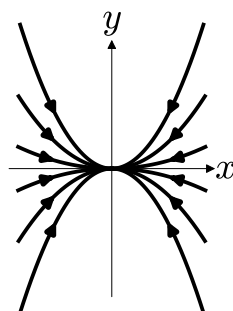
- Si λ_1 et λ_2 sont réelles et de même signe, le portrait de phase du système (S) est *un nœud*.

$$\lambda_1, \lambda_2 > 0$$



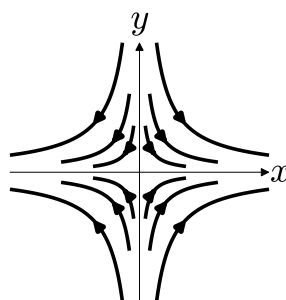
nœud répulsif

$$\lambda_1, \lambda_2 < 0$$



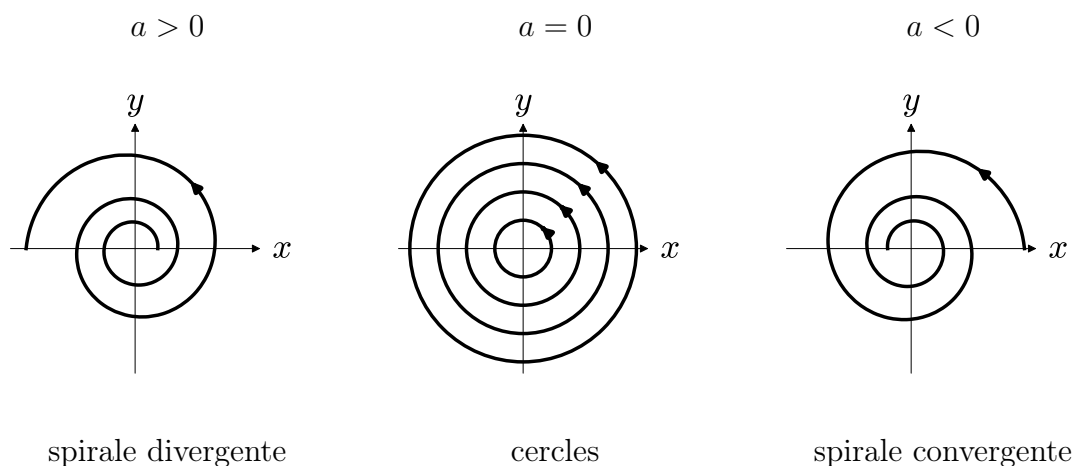
nœud attractif

- Si λ_1 et λ_2 sont réelles et de signes opposés, le portrait de phase du système (S) est *un col*.



- Si $\lambda_1 = a + ib$ et $\lambda_2 = a - ib = \overline{\lambda_1}$, le portrait de phase de (S) fait apparaître des

phénomènes tournants :



1.3 Étude qualitative des systèmes autonomes

Hormis les systèmes différentiels *linéaires*, il n'existe que très peu de systèmes différentiels que l'on sait résoudre de façon exacte. Cependant, il est possible, dans certains cas, d'effectuer une étude *qualitative* des solutions.

1.3.1 Systèmes autonomes et champs de vecteurs

Définition (système différentiel autonome)

Un système différentiel (S) est dit *autonome* s'il est de la forme

$$(S) : Y' = F(Y)$$

Autrement dit, un système différentiel est dit *autonome* si la fonction F le définissant (sous forme vectorielle) ne dépend que des inconnues y_1, \dots, y_p (et non de t).

Exemple : les systèmes différentiels linéaires, homogènes à coefficients constants sont des systèmes autonomes. Si l'on ajoute un second membre *constant* à ce type de système, on obtient encore un système autonome.

D'un point de vue théorique, la fonction F définissant un système différentiel autonome est un *champ de vecteurs* de \mathbb{R}^p :

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^p & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ X = (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & F(X) = (f_1(X), \dots, f_p(X)) \end{array}$$

On peut alors montrer que, d'un point de vue géométrique, il existe un lien fort entre les vecteurs du champ F et les courbes intégrales du portrait de phase de l'équation (S) . Précisément, en chaque point $X = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, le vecteur $F(X)$ est *tangent* à la courbe intégrale de (S) passant par X .

Ainsi, dans les cas $p = 2$ et $p = 3$, le tracé du champ de vecteur F permet une première approche du portrait de phase du système (S) . Dans le cas des systèmes linéaires autonomes, on retrouve ainsi les différents portraits de phases possibles :

Enfin, on verra que, dans le cas général (i.e. pour les systèmes non linéaires), bien qu'il n'existe plus de méthode systématique de résolution, l'étude du champ de vecteurs F permet d'obtenir de l'information qualitative sur certaines des solutions de (S) .

1.3.2 Points d'équilibre et stabilité

Définition (point fixe)

Soit $(S) : Y' = F(Y)$ un système différentiel autonome, défini par un champ de vecteurs

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ X &\longmapsto (f_1(X), \dots, f_p(X)) \end{aligned}$$

On appelle *point d'équilibre* de (S) , ou point fixe de (S) tout vecteur $X^* \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$F(X^*) = 0_{\mathbb{R}^p} \iff \forall i \in \{1, \dots, p\}, f_i(X^*) = 0$$

D'un point de vue théorique, il est clair que les points d'équilibre d'un système autonome (S) correspondent à ses solutions *constantes*.

Exemple : si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est une matrice *inversible*, le système différentiel $Y' = AY$ admet pour unique point d'équilibre le vecteur $X^* = 0_{\mathbb{R}^p}$.

On va voir comment l'étude du champ de vecteurs F au voisinage de ses points fixes permet d'obtenir de l'information sur les solutions de (S) passant "proche" d'un point d'équilibre.

Nous verrons en particulier qu'il est possible d'établir une classification des points d'équilibre d'un système différentiel autonome en fonction du comportement asymptotique des solutions voisines de ces points fixes.

Définition (stabilité des points d'équilibres)

Soit $(S) : Y' = F(Y)$ un système différentiel autonome associé à un champ de vecteurs F de \mathbb{R}^p et soit $X^* \in \mathbb{R}^p$ un point d'équilibre de (S) .

1. X^* est dit *stable* si toute solution de (S) passant "proche" de X^* reste proche de X^* .
2. X^* est dit *asymptotiquement stable* si toute solution de (S) passant "proche" de X^* converge vers X^* .

Notes :

- Un point d'équilibre X^* qui n'est pas stable est dit *instable*. Dans ce cas, les solutions de (S) passant proche de X^* ont tendance à s'éloigner de X^* .
- Il existe une définition plus rigoureuse de la notion de stabilité, basée sur la notion de *voisinage* dans \mathbb{R}^p .

Exemples : si $(S) : Y' = AY$ est un système différentiel linéaire associé à une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ inversible, la nature du point fixe $X^* = 0_{\mathbb{R}^p}$ dépend des valeurs propres de A :

- $X^* = 0_{\mathbb{R}^p}$ est stable si toute valeur propre λ de A vérifie $\text{Re}(\lambda) \leq 0$.
- $X^* = 0_{\mathbb{R}^p}$ est asymptotiquement stable si toute valeur propre λ de A vérifie $\text{Re}(\lambda) < 0$.

1.3.3 Linéarisation

Si $(S) : Y' = F(Y)$ n'est pas un système *linéaire*, il n'est en général pas possible de déterminer de façon explicite les solutions de (S) . Cependant, si l'on parvient à déterminer les points d'équilibre de (S) , il est possible (comme cela a été annoncé) d'effectuer une étude qualitative des solutions de (S) en étudiant de près le champ de vecteurs F au voisinage de ses points fixes.

Précisément, soit X^* un point fixe de (S) . Si les fonctions coordonnées admettent des dérivées partielles en X^* , le champ de vecteurs F admet un développement limité d'ordre 1 en X^* :

$$F(X) = \underbrace{F(X^*)}_{=0} + \nabla(F)(X^*)(X - X^*) + o(\|X - X^*\|)$$

où $\nabla(F)(X^*)$ est la matrice jacobienne (ou le gradient) de F en X^* :

$$\nabla(F)(X^*) = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X^*) \end{array} \right)$$

Au voisinage de X^* (i.e. tant que $Y(t) - X^*$ reste petit), les courbes intégrales de (S) sont proches des courbes intégrales du système linéaire à coefficients constants

$$Y' = \nabla(F)(X^*)(Y - X^*)$$

La nature du point X^* (stable/asymptotiquement stable/instable) et la forme de ces courbes dépend alors des valeurs propres de la matrice $\nabla(F)(X^*)$.

Exemple : soit

$$(S) : \begin{cases} x' &= (1 - y)x \\ y' &= -(1 - x)y \end{cases}$$

Le champ de vecteurs F associé à (S) est

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto ((1 - y)x, -(1 - x)y)$$

Le point $X^* = (0, 0)$ est alors un point d'équilibre de (S) et

$$\nabla(F)(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Le point $X^* = (0, 0)$ est donc un col et il est instable.

1.3.4 Cycles limites et attracteurs étranges

Chapitre 2

Résolution numériques d'équations différentielles

Introduction

En modélisation, les lois de la physique se traduisent en général sous la forme d'équations faisant le lien entre la valeur d'une ou plusieurs quantités caractéristiques du problème étudié et les variations de ces mêmes quantités.

En pratique, ces lois se traduisent donc sous la forme d'*équations différentielles*. La résolution de ces équations permet alors de déterminer les grandeurs caractéristiques associées et comprendre et prédire les phénomènes étudiés.

Formellement, il n'existe que peu d'équations différentielles que l'on sait résoudre de façon exacte. Elles sont en général issue de problèmes simplifiés, qui permettent une première approche du problème étudié.

Pour une étude plus poussée, on doit se rabattre sur des *méthodes de résolution approchée*.

Les méthodes que l'on va exposer ici ont été étudiées et développées au XVIII^{ème} siècle (par Euler, notamment) mais ont connu un essor important depuis l'apparition des calculateurs.

Elles consistent à construire, à l'aide de *suites numériques*, des solutions approchées pour les équations différentielles que l'on ne sait pas résoudre de façon exacte.

L'étude théorique de ces méthodes consiste d'abord à déterminer les processus mathématiques permettant d'aboutir au résultat voulu puis à déterminer des critères permettant d'évaluer la qualité de ces méthodes.

2.1 Position du problème

Dans un premier temps, on considère *un problème de Cauchy*, défini sur un intervalle de la forme $I = [0, T_{\max}]$ et constitué d'une équation différentielle d'ordre 1 et d'une condition initiale :

$$(P) : \begin{cases} y' = f(t, y) & (E) \\ y(0) = y_0 & (C.I.) \end{cases}$$

La théorie nous assure que, sous certaines hypothèses de régularité portant sur la fonction f définissant l'équation (E) (hypothèses que l'on supposera toujours vérifiées), le problème (P) admet une unique solution, encore notée y .

Précisément, il existe une unique fonction y telle que

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = f(t, y(t)) \quad \text{et} \quad y(0) = y_0$$

Les méthodes de résolution commencent par fixer *une discrétisation* de l'intervalle d'étude I : pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on découpe l'intervalle I en n intervalles de même longueur

$$h = \frac{T_{\max}}{n}$$

Ces intervalles sont définis par $n + 1$ points

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T_{\max}$$

Il est alors possible d'approcher la solution y cherchée, sous la forme d'un nuage de points $(t_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad y_i \approx y(t_i)$$

2.2 Différences finies

Les différentes méthodes d'approximation varient en fonction de la méthode de calcul des valeurs y_i évoquées plus haut. Elles sont cependant toutes basées sur une approximation de la notion de dérivée à l'aide de la *formule de Taylor* : soient

- y une fonction d'une variable, dérivable autant que nécessaire,
- un point t du domaine de y ,
- un "décalage" $h > 0$.

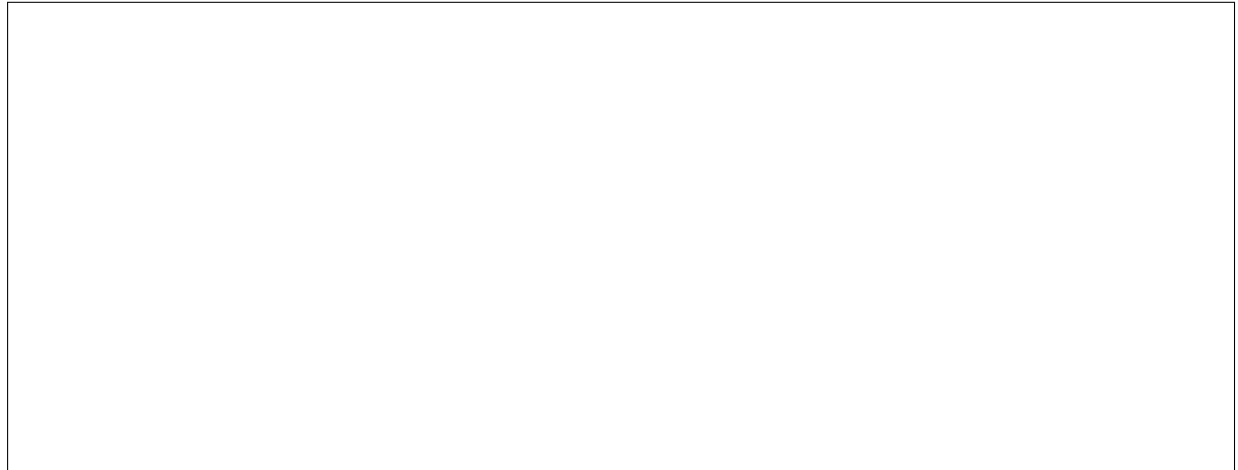
On a alors

$$y(t+h) = y(t) + h.y'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + \dots + \frac{h^n}{n!}y^{(n)}(t) + O(h^{n+1})$$

À l'ordre 1, la formule de Taylor permet une approximation de la dérivée $y'(t)$ en un point t donné :

$$\begin{aligned}\text{Taylor ordre 1} & : y(t+h) = y(t) + h.y'(t) + O(h^2) \\ \Rightarrow y'(t) & = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} + O(h)\end{aligned}$$

D'un point de vue géométrique, cette approximation revient à approcher la tangente à la courbe \mathcal{C}_y en t en une corde :



Cette formule est donc appelée *différence finie d'ordre 1, décentrée à droite*.

Note : la formule de Taylor permet en outre de mesurer l'erreur commise en fonction du décalage h . Précisément, l'approximation

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$$

introduit une erreur *de l'ordre de grandeur de h* .

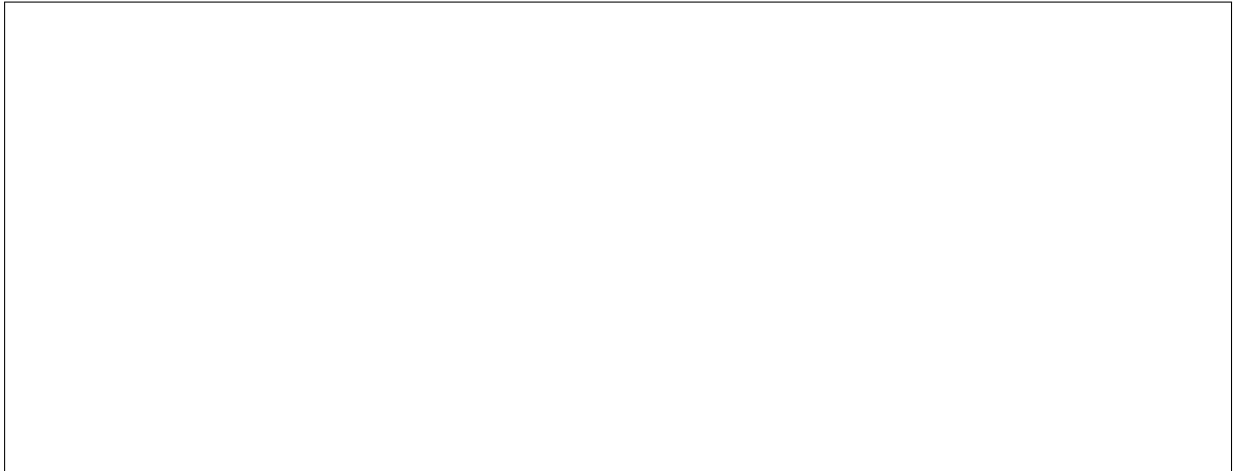
En s'appuyant encore sur le développement de Taylor, il est possible d'obtenir d'autres approximations pour la dérivée $y'(t)$. Ces différentes formes sont à la base des différentes méthodes connues.

Ainsi, en appliquant la même formule en $-h$, on a :

$$\begin{aligned}f(x-h) & = f(x) - h.f'(x) + O(h^2) \\ \Rightarrow f'(x) & = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)\end{aligned}$$

On peut là encore donner une interprétation géométrique de l'approximation

$$y'(t) \approx \frac{y(t) - y(t-h)}{h}$$



Cette formule donne ainsi la *différence finie d'ordre 1, décentrée à gauche*.

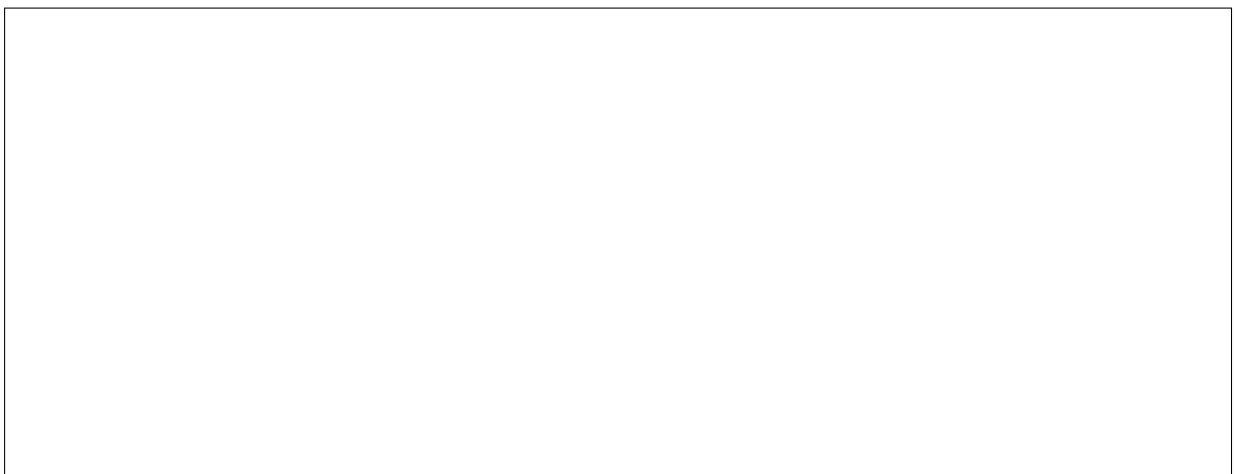
À l'aide du développement de Taylor à l'ordre 2 appliqué en $x+h$ et en $x-h$, on peut obtenir une troisième approximation pour la dérivée $f'(x)$:

$$(1) \quad : \quad f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2}.f''(x) + O(h^3)$$

$$(2) \quad : \quad f(x-h) = f(x) - h.f'(x) + \frac{h^2}{2}.f''(x) + O(h^3)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

On obtient ainsi une approximation plus précise de la dérivée $f'(x)$, que l'on peut là encore illustrer graphiquement :



Enfin, les formules (1) et (2) ci-dessus permettent également d'obtenir une approximation pour la dérivée seconde $f''(x)$:

$$(1) + (2) \Rightarrow f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Note : d'un point de vue théorique, il est bien entendu possible de généraliser ces approximations à tous ordres. Cependant, il est rare que l'on ait besoin d'appliquer ces méthodes aux ordres supérieurs à 2.

2.3 Application à la résolution des EDO

2.3.1 Schémas d'Euler (explicite)

Revenons maintenant au problème de Cauchy

$$(P) : \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

et son unique solution y , définie sur un intervalle $I = [0, T_{\max}]$.

On note encore un découpage de I sous la forme de n intervalles de même longueur h :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T_{\max}$$

La fonction y étant solution de (P) , on a, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$

$$y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$$

Par ailleurs, la formule de différence finie d'ordre 1 décentrée à droite, appliquée en t_i nous donne

$$y'(t_i) \approx \frac{y(t_i+h) - y(t_i)}{h} = \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h}$$

Ainsi, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, on a

$$\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{h} \approx f(t_i, y(t_i)) \iff y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + h \cdot f(t_i, y(t_i))$$

Cette approximation est à l'origine de la formule de récurrence caractérisant la *méthode d'Euler explicite* :

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i, y_i)$$

Cette formule permet, à partir de la valeur initiale y_0 , de calculer, de proche en proche, n valeurs numériques y_1, \dots, y_n qui, *a priori*, sont des valeurs approchées des ordonnées $y(t_i)$.

Exemples :

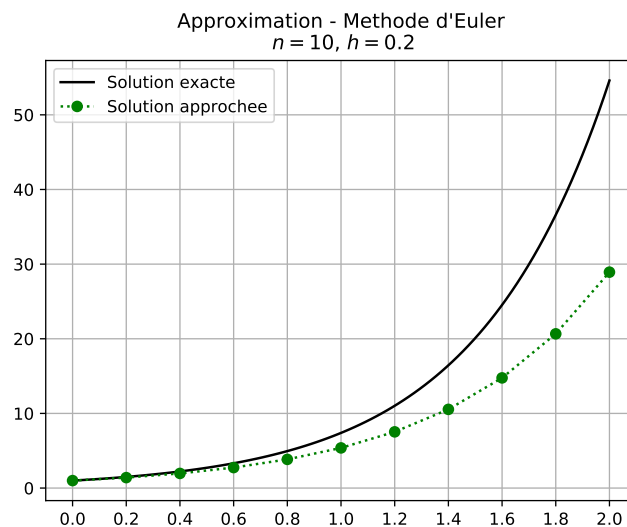
1. Soit

$$(P_1) : \begin{cases} y' = 2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

dont l'unique solution est

$$y : t \mapsto e^{2t}$$

La méthode d'Euler, appliquée sur l'intervalle $[0, 2]$, découpé en $n = 10$ intervalles réguliers donne le graphe ci-dessous.



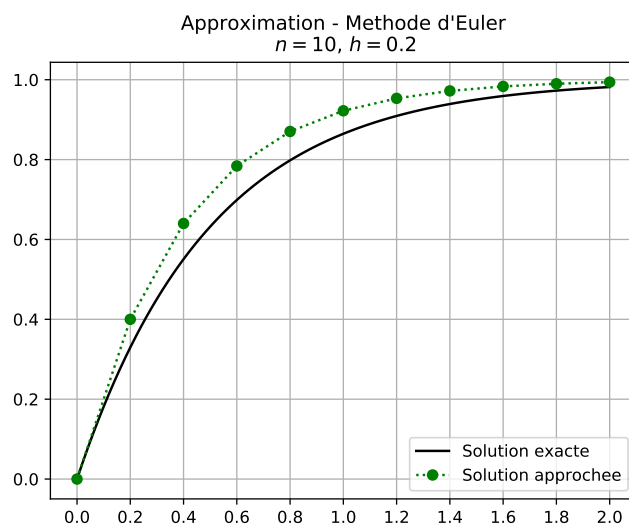
2. Soit

$$(P_2) : \begin{cases} y' = 2(1 - y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est

$$y : t \mapsto 1 - e^{-2t}$$

La méthode d'Euler, appliquée sur l'intervalle $[0, 2]$, découpé en $n = 10$ intervalles réguliers donne le graphe ci-dessous.



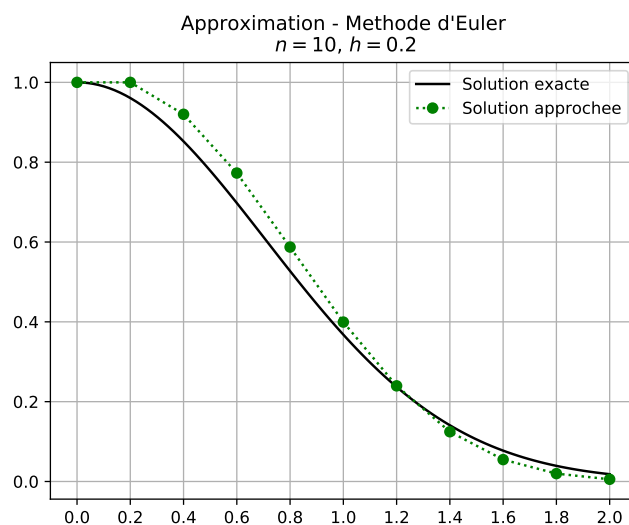
3. Soit

$$(P_3) : \begin{cases} y' = -2ty \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

dont l'unique solution est

$$y : t \mapsto e^{-t^2}$$

La méthode d'Euler, appliquée sur l'intervalle $[0, 2]$, découpé en $n = 10$ intervalles réguliers donne le graphe ci-dessous.



2.3.2 Schémas numériques

Le schéma d'Euler explicite présenté ci-dessus est un exemple de schéma numérique permettant de résoudre de façon approchée un problème de Cauchy.

En exploitant les différentes formes de différences finies, il est possible de construire d'autres types de schémas numériques.

Précisément, on appelle *schéma numérique* toute méthode de construction permettant de générer, pour un problème de Cauchy, une approximation de la solution y sous la forme d'une suite de points $\{(t_i, y_i), i \in \{0, \dots, n\}\}$ telle que

- la suite

$$t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T_{\max}$$

réalise un découpage régulier de l'intervalle d'étude $[0, T_{\max}]$ en n intervalles de longueur $h = \frac{T_{\max}}{n}$,

- la suite (y_0, \dots, y_n) , construite sur une relation de récurrence de la forme

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \varphi(t_i, y_i, h)$$

vérifie

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad y_i \approx y(t_i)$$

Exemple : le schéma d'Euler explicite correspond à

$$\varphi : (t, y, h) \longmapsto f(t, y)$$

2.3.3 Consistance, stabilité, convergence

Convergence

Sur les exemples ci-dessus, on constate que, bien que l'allure de la courbe soit globalement respectée, certaines approximations sont meilleures que d'autres, pour le même intervalle et le même pas de temps.

À l'aide des outils de l'analyse, il est alors possible d'étudier la qualité des approximations obtenues.

Définition (convergence)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{P} = \{(t_i, y_i), i \in \{0, \dots, n\}\}$ un nuage de points produit par un schéma numérique et approchant la solution y d'un problème de Cauchy.

- On appelle *erreurs locales* de l'approximation les distances

$$\varepsilon_i^{(n)} = |y_i - y(t_i)|, \quad i \in \{0, \dots, n\}$$

- On appelle *erreur globale* de l'approximation la valeur

$$\varepsilon^{(n)} = \max_{i \in \{0, \dots, n\}} \varepsilon_i^{(n)} = \max_{i \in \{0, \dots, n\}} \{|y_i - y(t_i)|\}$$

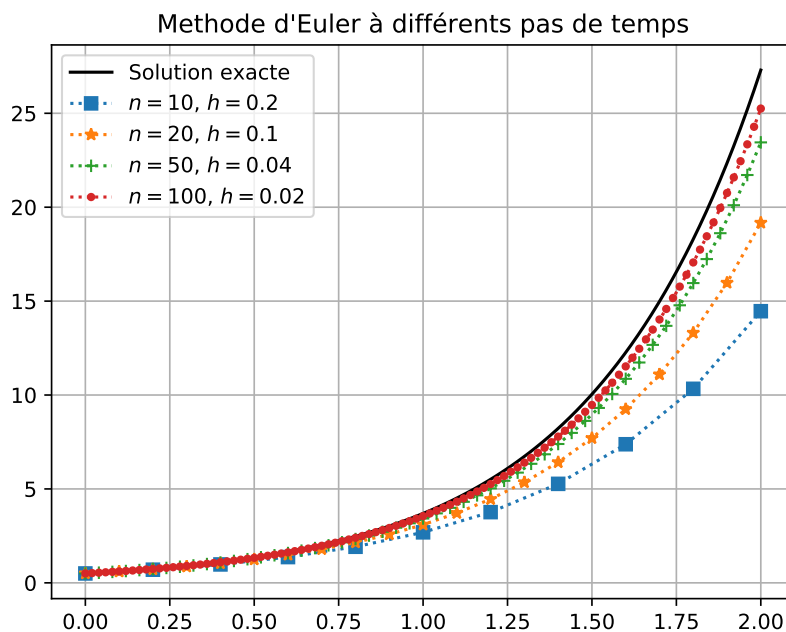
Le schéma numérique associé au nuage de points \mathcal{P} est alors dit *convergent* si

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ h \rightarrow 0}} \varepsilon^{(n)} = 0$$

Exemple : soit

$$(P_1) : \begin{cases} y' = 2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Le schéma d'Euler explicite appliqué pour différentes valeurs de n produit les approximations suivantes :

**Consistance et stabilité**

D'un point de vue pratique, les erreurs locales apparaissant dans un schéma numérique (i.e. la différence entre les valeurs calculées y_i et les valeurs souhaitées $y(t_i)$) sont issues

de deux sources :

1. Les erreurs “théoriques”, appelées *erreurs de consistance*, issues du schéma choisi.
2. Les erreurs numériques, issues de l'incertitude inhérente à tout calcul effectué par un ordinateur.

Ces deux notions sont formalisées dans les définitions ci-dessous.

Définition (Consistance)

Considérons un schéma numérique basé sur une relation de la forme

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \varphi(t_i, y_i, h)$$

1. L'*erreur de consistance locale du schéma* (au temps t_i), relativement à une fonction y est la différence

$$\epsilon_i(y) = y(t_{i+1}) - (y(t_i) + h \cdot \varphi(t_i, y(t_i), h))$$

2. L'*erreur de consistance du schéma*, relativement à y est

$$\epsilon^{(n)}(y) = \sum_{i=0}^{n-1} |\epsilon_i(y)|$$

3. Le schéma numérique est alors dit *consistant* si, pour toute solution y de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \epsilon^{(n)}(y) = 0$$

4. Le schéma numérique est dit *d'ordre* $d \in \mathbb{N}^*$ si

$$\epsilon^{(n)} = O\left(\frac{1}{n^d}\right)$$

Par ailleurs, un schéma numérique est dit *stable* si une petite perturbation dans lors des calculs successifs ne conduit pas à une divergence de la méthode, malgré son caractère consistant. Précisément,

Définition (stabilité)

Un schéma numérique, associé à une fonction φ , est dit *stable* s'il existe une constante S (appelée constante de stabilité) telle que pour toutes suites (y_n) et (\tilde{y}_n) vérifiant les relations

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h \cdot \varphi(t_i, y_i, h) \\ \tilde{y}_{i+1} = \tilde{y}_i + h \cdot \varphi(t_i, \tilde{y}_i, h) + \delta_i \end{cases}$$

on a

$$\max_{i \in \{0, \dots, n\}} |y_i - \tilde{y}_i| \leq S \left(|y_0 - \tilde{y}_0| + \sum_{i=0}^n |\delta_i| \right)$$

Conditions de convergence

Considérons un schéma numérique construit sur une relation de récurrence de la forme

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \varphi(t_i, y_i, h)$$

appliqué à une équation différentielle

$$(E) : y' = f(t, y)$$

On peut montrer qu'un tel schéma, appliqué à la résolution de (E) est *consistant* si et seulement si

$$\varphi(t, y, 0) = f(t, y)$$

C'est en particulier le cas pour le schéma d'Euler explicite puisque dans ce schéma, on a

$$\varphi(t, y, h) = f(t, y) \quad \forall h \geq 0$$

On peut également montrer qu'un tel schéma, appliqué à (E) est stable sur l'intervalle $[0, T_{\max}]$ si φ est *lipschitzienne* en y , i.e. il existe une constante $L > 0$, dite *constante de Lipschitz* telle que

$$\forall (x, y), \quad |\varphi(t, x, h) - \varphi(t, y, h)| \leq L \cdot |x - y|$$

Dans ce cas, la constante de stabilité est

$$S = e^{L \cdot T_{\max}}$$

Note : le caractère lipschitzien induit, en pratique, une contrainte sur les variations de la fonction φ , relativement à la variable y . Cette condition est en réalité la condition principale à l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy. Cette condition n'apporte donc pas de contrainte supplémentaire dans le cadre qui nous occupe.

D'autre part on peut noter que si φ est *continue* par rapport à chacune de ses variables, le fait de travailler sur un intervalle fermé borné de la forme $[0, T_{\max}]$ induit automatiquement le caractère lipschitzien de φ .

Enfin, notons que toutes ces notions sont bien cohérentes avec la notion de convergence (qui est en définitive la seule condition qui importe) via le théorème suivant :

Théorème (Convergence d'un schéma numérique)

Tout schéma numérique stable et consistant est convergent.

Chapitre 3

Résolution numériques d'équations aux dérivées partielles

3.1 Notions de base

Comme cela a été évoqué en introduction de ce cours, les équations aux dérivées partielles (EDP) sont au cœur de la modélisation des phénomènes physiques.

L'un des rôles des mathématiques dans cette modélisation consiste à donner des outils de résolution pour ce type d'équations.

Cela passe, comme à chaque fois, par une étude théorique des EDP, permettant dans un premier temps d'établir différentes classifications, correspondant aux différents types d'équations que l'on peut obtenir grâce aux lois de la physique.

L'objectif de ces classifications est de pouvoir développer des méthodes de résolutions spécifiques à chaque classe, en s'appuyant à chaque fois sur les caractéristiques communes aux équations de chaque classe.

Dans le cas des équations aux dérivées partielles, il n'existe en réalité que très peu d'équations que l'on sait résoudre de façon exacte. Cependant, les efforts de classification ont tout de même permis de mettre en évidence certains liens théorique existant entre différents phénomènes physiques à priori indépendants.

Par ailleurs, cette classification se retrouve également dans les méthodes de résolution *approchée*, qui font l'objet principal de ce cours.

3.1.1 Définitions et notations

Une équation aux dérivées partielles est une équations dont l'inconnue est une fonction u de plusieurs variables (x, y, z, t, \dots) , liant entre elles les dérivées partielles de u .

Notation : soit u une fonction dépendant des variables (x, y, z, t, \dots) . Pour alléger les notations, on notera

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \dots$$

Parmi les caractéristiques principales d'une EDP, on appelle *ordre* d'une EDP la plus haute dérivée partielle intervenant dans l'équation. Les lois de la physique produisent en général des équations d'ordre 2 (via notamment le *Laplacien*).

Comme dans le cas des équations différentielles ordinaires (EDO), on distingue également les EDP *linéaires*, i.e. linéaires en l'inconnue u et ses dérivées. Une EDP linéaire sera de plus dite à *coefficients constants* si les coefficients de la combinaison linéaire (qui en toute généralité peuvent dépendre des inconnues du problème) sont des réels fixés.

On a vu dans les années précédentes qu'il existait des méthodes de résolution spécifiques aux EDP linéaires d'ordre 1 à coefficients constants. Il est parfois possible d'étendre ces techniques à certaines EDP linéaires (toujours d'ordre 1) à coefficients non constants.

Dans la suite, on verra que le caractère linéaire des EDP auxquelles on appliquera les méthodes de résolution approchée est fondamental pour la mise en œuvre de ces méthodes.

3.1.2 Exemples d'EDP classiques

- Équation de Laplace 2D :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \iff \Delta u = 0$$

Elle apparaît dans tous les domaines de la physique. Ainsi, si u représente une distribution de chaleur dans un domaine 2D, cette équation régit par exemple la répartition de chaleur dans le domaine, une fois l'équilibre atteint.

- Équation de diffusion de la chaleur régissant l'évolution de la température dans un milieu homogène :

$$1D : u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

$$2D : u_t = \alpha^2 (u_{xx} + u_{yy})$$

$$3D : u_t = \alpha^2 (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$$

Note : la forme générale de cette équation est

$$u_t = \Delta u$$

- Équation de propagation des ondes 3D :

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \iff u_{tt} = c^2 \Delta u$$

- Équation de Poisson (électrostatique, gravitation, ets) :

$$\Delta u = f(x, y, z)$$

Notes :

- Toutes les équations ci-dessus sont linéaires, à coefficients constants.
- Hormis la dernière, toutes les équations ci-dessus sont *homogènes*. Le terme $f(x, y, z)$ de l'équation de Poisson est appelé *second membre* de l'équation. Dans la modélisation, il correspond en général à un apport extérieur au système, au cours de l'expérience.
- Bien que formellement, toutes les variables d'un problème soient équivalentes, on peut, d'un point de vue physique, distinguer les variables d'espace (x, y, z) de la variable de temps (t) . Cette distinction permet en particulier de distinguer deux types de problèmes :
 - Les problèmes *stationnaires* ou problèmes d'équilibre, indépendants du temps : l'équation de Laplace et l'équation de Poisson.
 - Les problèmes *dynamiques* (ou transitoires) dépendant du temps : les quatre autres exemples ci-dessus.

On verra dans la suite que l'on retrouve cette distinction dans les différentes méthodes de résolution approchée. On verra également réapparaître cette distinction lorsque l'on évoquera les notions de conditions limites et/ou conditions initiales.

3.1.3 Classification des EDP linéaires d'ordre 2

Sous sa forme générale, une EDP linéaire d'ordre 2 portant sur deux variables (x, y) est de la forme

$$(E) : Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

Par analogie avec les polynômes de degré 2 en deux variable et la classification des formes quadratiques, on peut classer ces équations aux dérivées partielles en fonction des coefficients A , B et C . Précisément,

- (E) est dite *elliptique* si $B^2 - 4AC < 0$.

- (E) est dite *parabolique* si $B^2 - 4AC = 0$.
- (E) est dite *hyperbolique* si $B^2 - 4AC > 0$.

Outre qu'il existe différentes méthodes de résolution liées à cette classification, chaque type d'équation peut également être associé à une classe de problèmes physiques analogues :

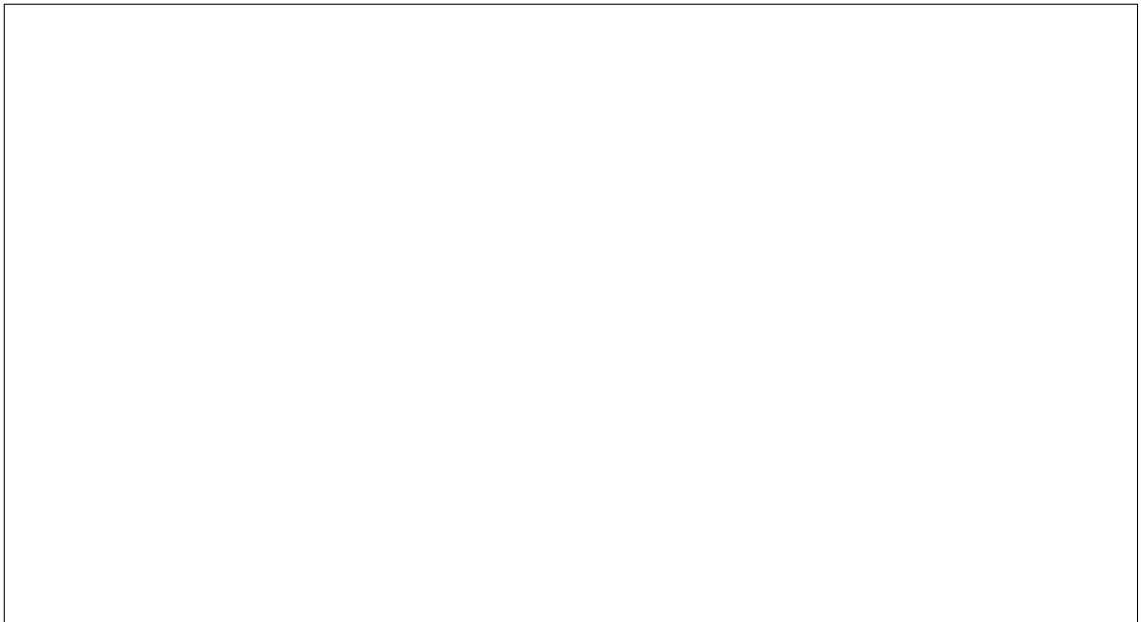
- Les équations *elliptiques* apparaissent dans de nombreux problèmes stationnaires (i.e. indépendants du temps).
- Les équations *paraboliques* apparaissent dans des problèmes de conduction et diffusion (chaleur, réactions chimiques, etc).
- Les équations *hyperboliques* apparaissent dans des problèmes de propagation d'ondes (vibration, vagues, etc).

3.1.4 Conditions initiales et conditions limites

Comme pour les EDO, chaque EDP admet une infinité de solutions. Du point de vue de la modélisation, cela signifie que la réponse attendue dépend de conditions supplémentaires portant d'abord sur l'état du système étudié aux bords ∂D du domaine d'étude D : *les conditions limites*.

Ces conditions limites peuvent être de trois types différents selon le problème étudié :

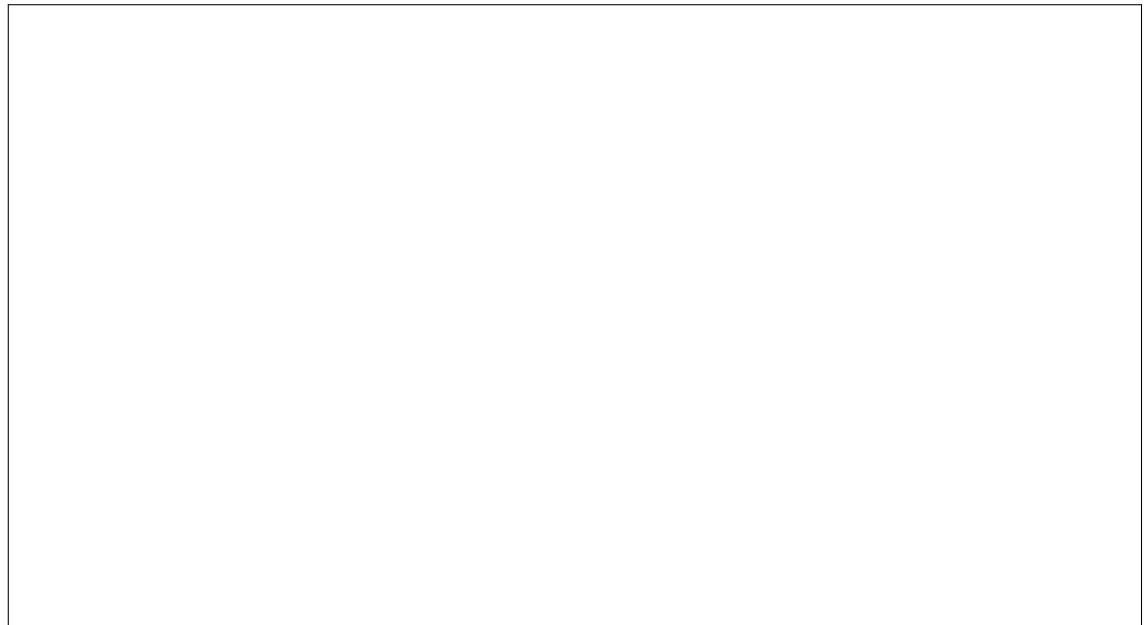
- Conditions limites type *Dirichlet* (CLD) : la valeur de la fonction u est imposée sur l'ensemble de la frontière ∂D du domaine d'étude D .



Exemple : CLD pour un problème 1D sur un segment de longueur L ramené au segment $[0, L]$:

$$\begin{cases} u(t, 0) = u_0(t) & \forall t \geq 0 \\ u(t, L) = u_L(t) & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

- Conditions limites type *Neumann* (CLN) : la valeur de la dérivées directionnelle normale $\frac{\partial u}{\partial n}$ est imposée sur l'ensemble de la frontière ∂D .



Exemple : CLN pour un problème 1D sur le segment $[0, L]$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = v_0(t) & \forall t \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(t, L) = v_L(t) & \forall t \geq 0 \end{cases}$$

Du point de vue du modèle, cette condition correspond à “la porosité” de la frontière ∂D .

- Conditions limite *mixtes* : des conditions limites de la forme

$$\forall X_0 \in \partial D, \quad \forall t \geq 0, \quad a \cdot u(t, X_0) + b \cdot \frac{\partial u}{\partial n}(t, X_0) = u_0(t)$$

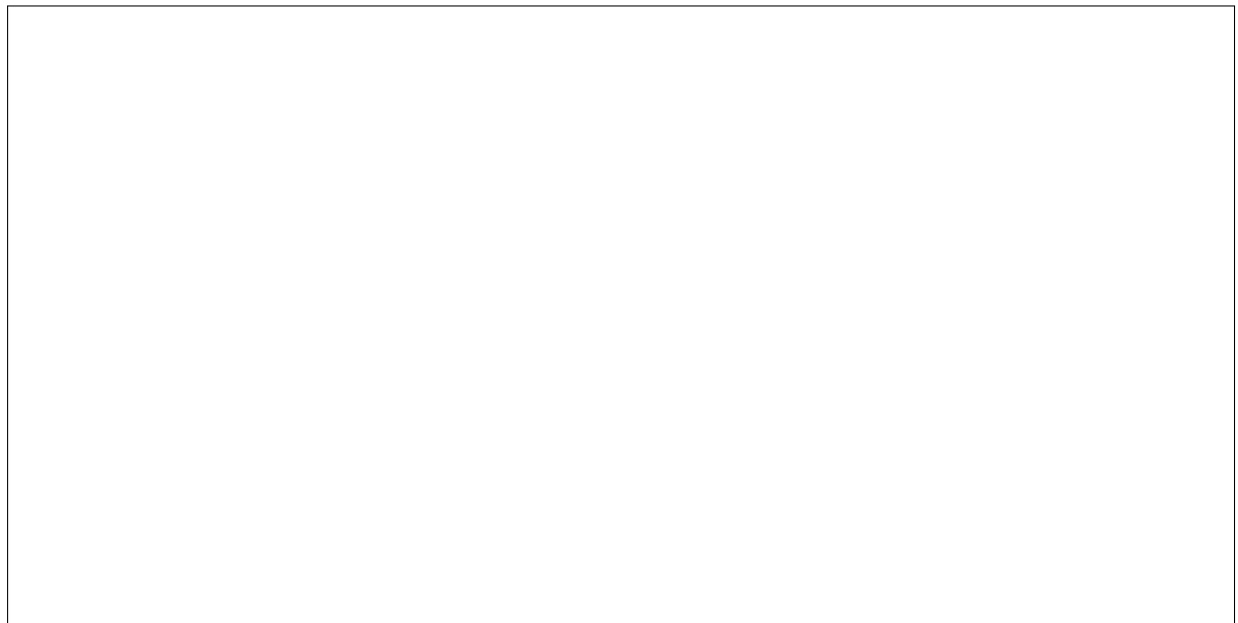
sont imposées au bord de D .

Par ailleurs, dans le cas d'un problème dynamique (i.e. dépendant du temps t), on peut également ajouter *des conditions initiales*, donnant l'état général du système au début de l'expérience (i.e. à $t = 0$).

Dans ce cas, la nature de ces conditions initiales dépendent alors de l'ordre de la plus haute dérivée temporelle (u_t , u_{tt} , etc) intervenant dans l'équation :

- Si (E) est d'ordre 1 en temps, $u(X, 0)$ est imposée pour tout $X \in D$.
- Si (E) est d'ordre 2 en temps, $u(X, 0)$ et $\frac{\partial u}{\partial t}(X, 0)$ sont imposées pour tout $X \in D$.

Exemple : problème transitoire 1D sur le segment $[0, L]$:



3.2 Différences finie

Faute de méthode générale permettant de résoudre toutes les EDP, il a fallu développer des méthodes de résolution approchée.

L'objectif est ici de présenter la méthode *des différences finies*, permettant de transformer une EDP donnée en un ensemble de systèmes d'équations algébriques.

Le cœur de la méthode est basé sur une approximation de la notion de dérivée à l'aide de la *formule de Taylor* : soient

- f une fonction d'une variable, dérivable autant que nécessaire,
- un point x du domaine de f ,

- un “décalage” $h > 0$.

On a alors

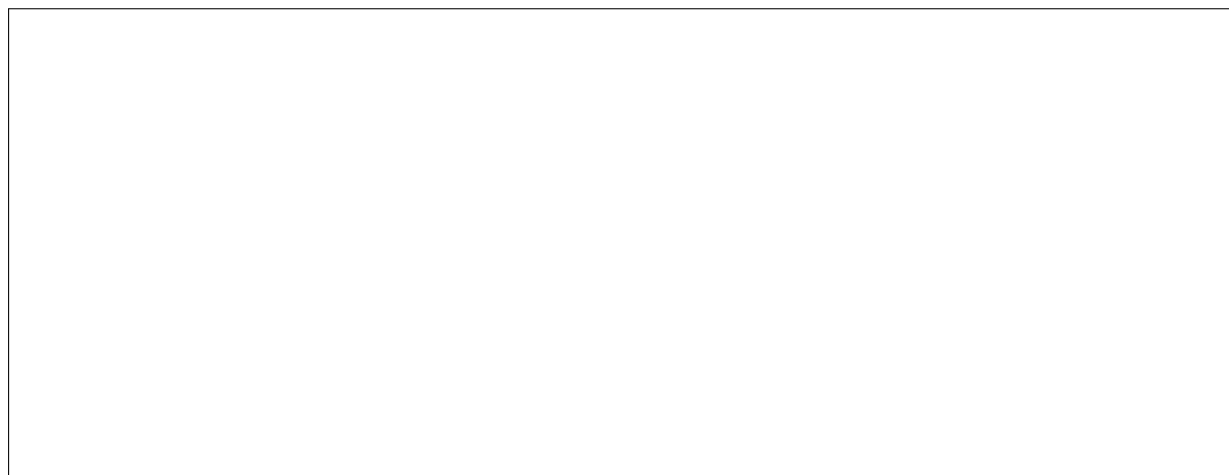
$$f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + O(h^{n+1})$$

Ainsi, à l'ordre 1, la formule de Taylor permet une approximation de la dérivée $f'(x)$:

$$\text{Taylor ordre 1 : } f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \text{Dérivée première décentrée à droite : } f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h)$$

D'un point de vue géométrique, cette approximation revient à approcher la tangente à \mathcal{C}_f en x en une corde :

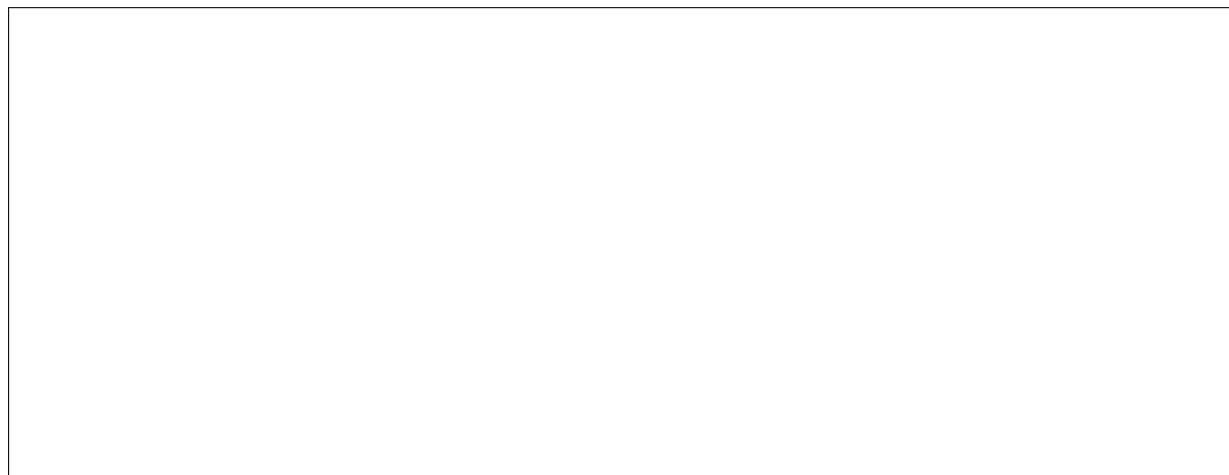


La formule de Taylor permet alors de mesurer l'erreur commise en fonction du décalage h .

En appliquant la même formule en $-h$, on obtient une seconde approximation possible :

$$\text{Taylor ordre 1 : } f(x-h) = f(x) - h.f'(x) + O(h^2)$$

$$\Rightarrow \text{Dérivée première décentrée à gauche : } f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h)$$



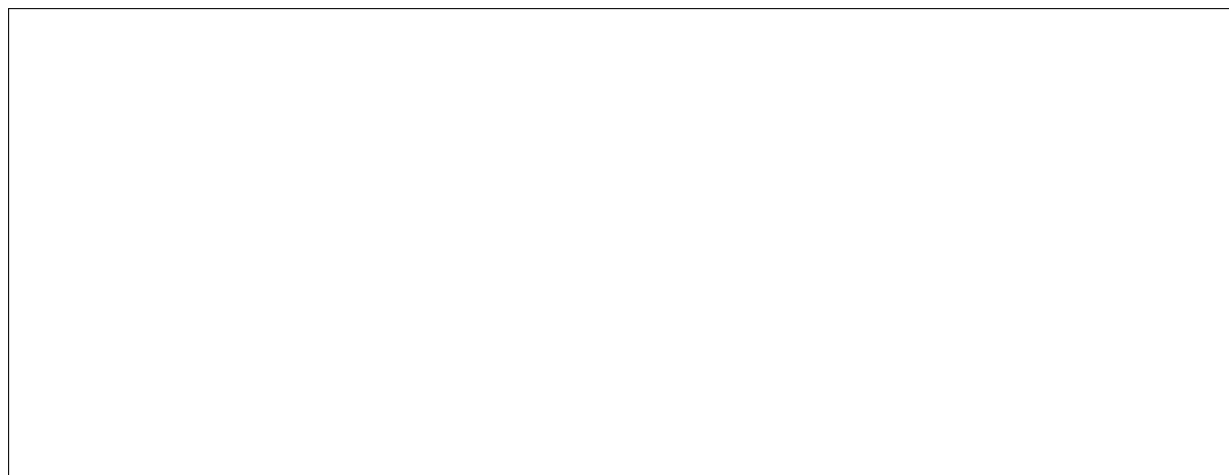
À l'aide du développement de Taylor à l'ordre 2 appliqué en $x+h$ et en $x-h$, on peut obtenir une troisième approximation pour la dérivée $f'(x)$:

$$(1) \quad : \quad f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2}.f''(x) + O(h^3)$$

$$(2) \quad : \quad f(x-h) = f(x) - h.f'(x) + \frac{h^2}{2}.f''(x) + O(h^3)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2)$$

On obtient ainsi une approximation plus précise de la dérivée $f'(x)$, que l'on peut là encore illustrer graphiquement :



Enfin, les formules (1) et (2) ci-dessus permettent également d'obtenir une approximation pour la dérivée seconde $f''(x)$:

$$(1) + (2) \Rightarrow f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

Il est bien entendu possible de généraliser ces approximations à tous ordres.

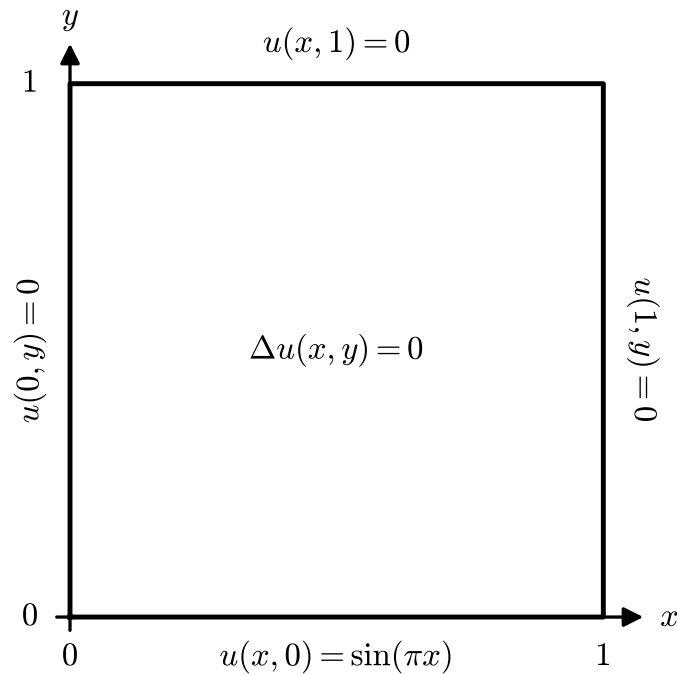
D'autre part, il est également possible d'adapter rapidement ces formules aux dérivées partielles de fonctions de plusieurs variables. Ainsi, si u est une fonction de deux variables (x, y) , on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = u_x(x, y) &\approx \frac{u(x+h, y) - u(x, y)}{h} \\ u_y(x, y) &\approx \frac{u(x, y+k) - u(x, y)}{k} \\ u_{xx}(x, y) &\approx \frac{u(x+h, y) - 2u(x, y) + u(x-h, y)}{h^2} \\ u_{yy}(x, y) &\approx \frac{u(x, y+k) - 2u(x, y) + u(x, y-k)}{k^2} \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

3.3 Illustrations de la méthode des différences finies

3.3.1 Équation de la chaleur 2D, stationnaire

On souhaite dans cet exemple résoudre l'équation de la chaleur stationnaire sur un domaine carré D du plan, sous des conditions limites de Dirichlet. Précisément, considérons le carré $[0, 1]^2$ du plan muni d'un repère (xOy) .



On souhaite connaître la température $u(x, y)$ en tout point $(x, y) \in D$ une fois l'équilibre atteint. Cette distribution de température est déterminée par

- l'équation de la chaleur à l'intérieur du domaine D :

$$\forall (x, y) \in]0, 1[^2, \quad \Delta u(x, y) = 0$$

- les conditions limites :

$$\text{Nord} : \forall x \in [0, 1], \quad u(x, 1) = 0$$

$$\text{Sud} : \forall x \in [0, 1], \quad u(x, 0) = \sin(\pi x)$$

$$\text{Est} : \forall y \in [0, 1], \quad u(1, y) = 0$$

$$\text{Ouest} : \forall x \in [0, 1], \quad u(0, y) = 0$$

Discrétisation du problème

Faute de pouvoir obtenir explicitement la fonction u , on remplace le calcul exacte en chaque point du domaine D par un calcul (approché) en un nombre fini de points (x_j, y_i) .

Pour cela, on commence par discrétiser le domaine D :

- On découpe l'intervalle d'abscisses $[0, 1] \subset (0x)$ en p intervalles de même longueur

$$h = \frac{1}{p}$$

($p \in \mathbb{N}^*$ fixé).

On obtient ainsi $p + 1$ bornes $x_0 < \dots < x_p$ vérifiant

$$\forall j \in \{0, \dots, p\}, \quad x_j = j.h = \frac{j}{p}$$

- On découpe l'intervalle d'ordonnées $[0, 1] \subset (Oy)$ en n intervalles de même longueur

$$k = \frac{1}{n}$$

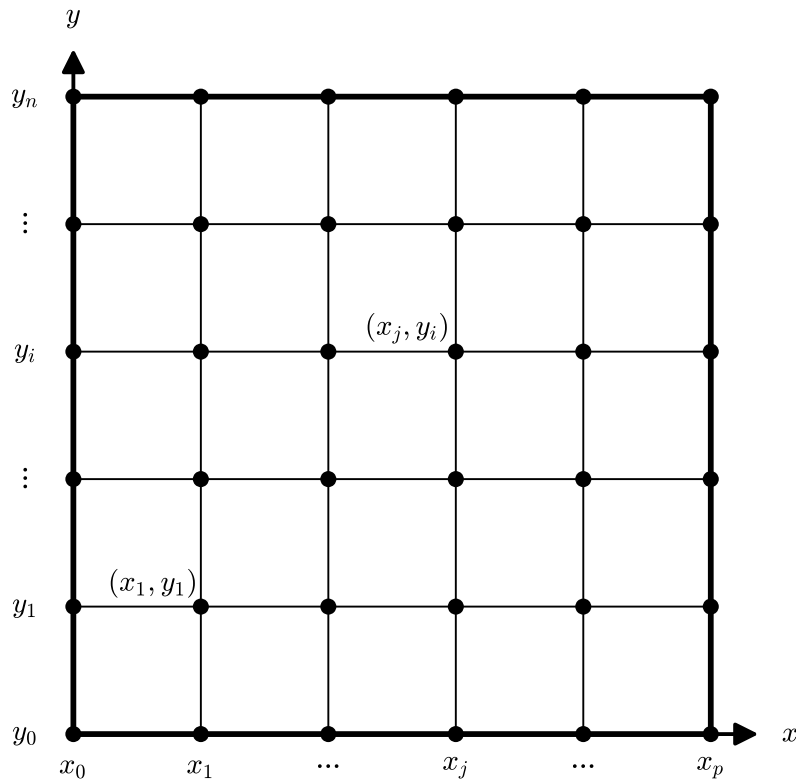
($n \in \mathbb{N}^*$ fixé).

On obtient ainsi $n + 1$ bornes $y_0 < \dots < y_n$ vérifiant

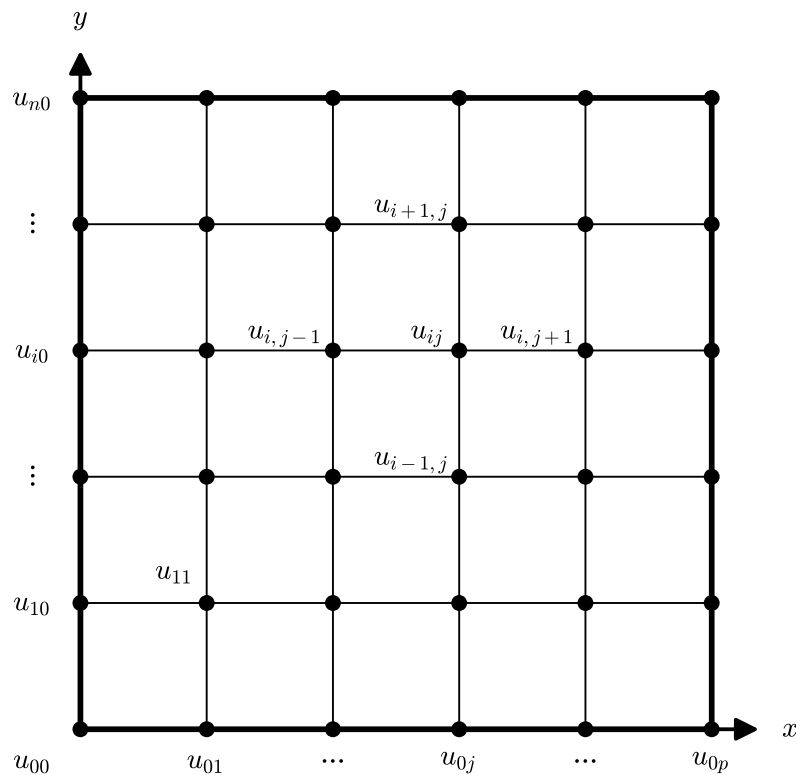
$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad y_i = i.k = \frac{i}{n}$$

On obtient ainsi un maillage de $(n + 1).(p + 1)$ points du domaine D :

$$M = \{(x_j, y_i), \quad 0 \leq i \leq n, \quad 0 \leq j \leq p\}$$

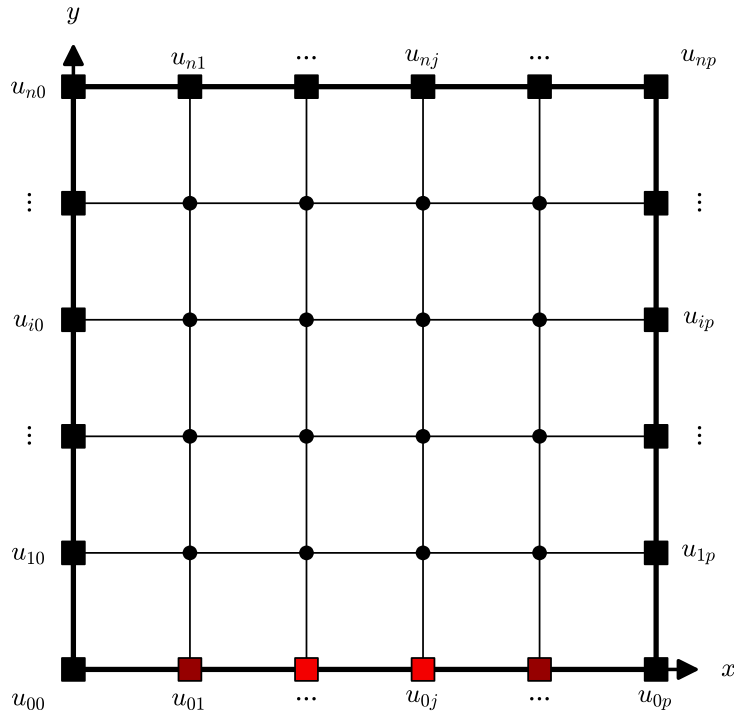


On cherche alors à calculer $u_{ij} = u(x_j, y_i)$ en chacun de ces points :



Les conditions limites donnent les valeurs exactes de la température en chacun des $2n + 2p$ points situés aux bords de D :

$\forall i \in \{0, \dots, n\},$	Condition Ouest $u_{i0} = 0$	Conditions Est $u_{in} = 0$
$\forall j \in \{0, \dots, p\},$	Condition Sud $u_{0j} = \sin(\pi.x_j) = \sin(\pi.j.h)$	Conditions Nord $u_{pj} = 0$



Par ailleurs, les approximations des différentes dérivées partielles de u à l'aide des formules de différences divisées permettent de traduire l'équation $\Delta u = 0$ en un système d'équations linéaire portant sur les valeurs u_{ij} cherchées. En effet, en tout point $(x, y) \in D$, on a

$$u_{xx}(x, y) \approx \frac{u(x + h, y) - 2u(x, y) + u(x - h, y)}{h^2}$$

$$u_{yy}(x, y) \approx \frac{u(x, y + k) - 2u(x, y) + u(x, y - k)}{k^2}$$

Aux points du maillage intérieurs au domaine D , on a donc, pour tout $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ et pour tout $j \in \{1, \dots, p - 1\}$:

$\left\{ \begin{array}{l} u_{xx}(x_j, y_i) \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2} \\ u_{yy}(x_j, y_i) \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{k^2} \end{array} \right.$

et

$$\begin{aligned}
 (E_{ij}) : \Delta u(x_j, y_i) = 0 &\iff u_{xx}(x_j, y_i) + u_{yy}(x_j, y_i) = 0 \\
 &\iff \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{k^2} = 0 \\
 &\iff \boxed{k^2(u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - 2(h^2 + k^2)u_{ij} + h^2(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) = 0}
 \end{aligned}$$

On transforme ainsi l'équation de la chaleur en un système linéaire de $(n-1).(p-1)$ équations portant sur les $(n-1).(p-1)$ valeurs u_{ij} encore inconnues.

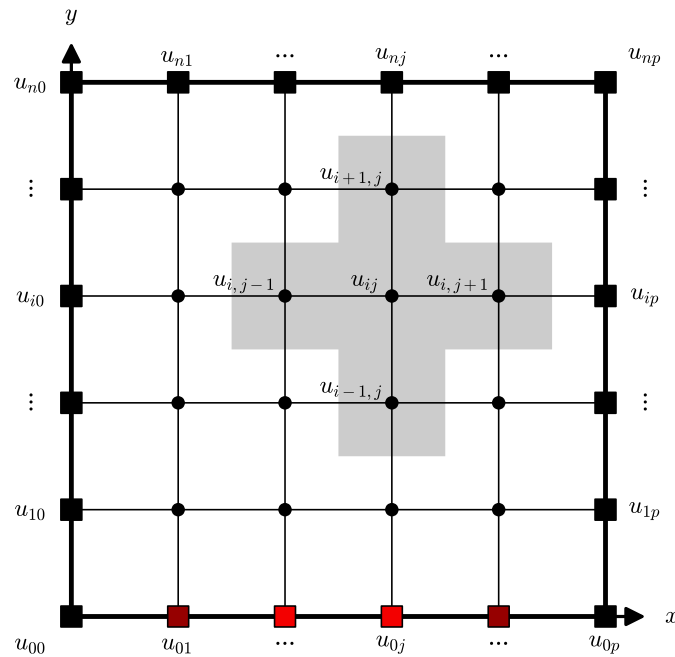
Dans la suite, on prendra $n = p$ (et donc $h = k$) afin de simplifier les formules. Les équations du système linéaires sont donc

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n-1\}, \quad u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} = 0$$

Note : dans le système ci-dessus, on note que chaque équation (E_{ij}) peut être associée au point (x_j, y_i) du maillage et fait intervenir la température u_{ij} en ce point ainsi que les températures aux quatre points les plus proches. On peut alors noter que

$$(E_{ij}) \iff u_{ij} = \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{4}$$

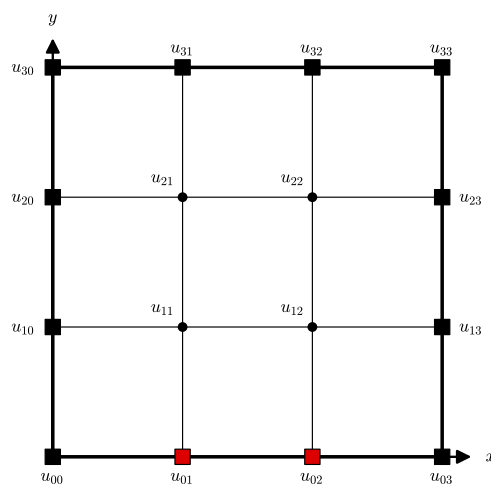
Cela traduit le fait qu'à l'équilibre, la température en chaque point du maillage est égale à la moyenne des températures aux quatre points du maillage les plus proches.



Construction du système linéaire

Pour terminer la résolution approchée du problème étudié, il reste à déterminer les matrices du système linéaire (S) : $MU = B$ correspondant aux équations (E_{ij}) obtenues lors de la discrétisation. Le système portant sur $(n-1)^2$ inconnues liées par $(n-1)^2$ équations, la matrice M est carrée à $(n-1)^2$ lignes et les vecteurs U et B sont des vecteurs de $\mathbb{R}^{(n-1)^2}$.

Exemple : pour $n = 3$, on a le maillage présenté sur la figure ci-dessous. Les conditions limites imposent les valeurs de la température aux 16 points du bord et les inconnues du système à résoudre correspondent aux températures des 4 points du maillage intérieur au domaine, parcours ligne par ligne du bas vers le haut.



L'équation de Laplace en chacun des quatre points inconnus donne :

- En (x_1, y_1) :

$$(E_{11}) : \boxed{u_{01}} + \boxed{u_{10}} - 4u_{11} + u_{12} + u_{21} = 0$$

- En (x_2, y_1) :

$$(E_{12}) : \boxed{u_{02}} + u_{11} - 4u_{12} + \boxed{u_{13}} + u_{22} = 0$$

- En (x_1, y_2) :

$$(E_{21}) : u_{11} + \boxed{u_{20}} - 4u_{21} + u_{22} + \boxed{u_{31}} = 0$$

- En (x_2, y_2) :

$$(E_{22}) : u_{12} + u_{21} - 4u_{22} + \boxed{u_{23}} + \boxed{u_{32}} = 0$$

les températures encadrées correspondant aux points du bord (connues).

On peut alors trier ce système linéaire de quatre équations portant sur les quatre inconnues $(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22})$:

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -4u_{11} + u_{12} + u_{21} & = -u_{01} - u_{10} \\ u_{11} - 4u_{12} & + u_{22} = -u_{02} - u_{13} \\ u_{11} & - 4u_{21} + u_{22} = -u_{20} - u_{31} \\ & u_{12} + u_{21} - 4u_{22} = -u_{23} - u_{32} \end{cases}$$

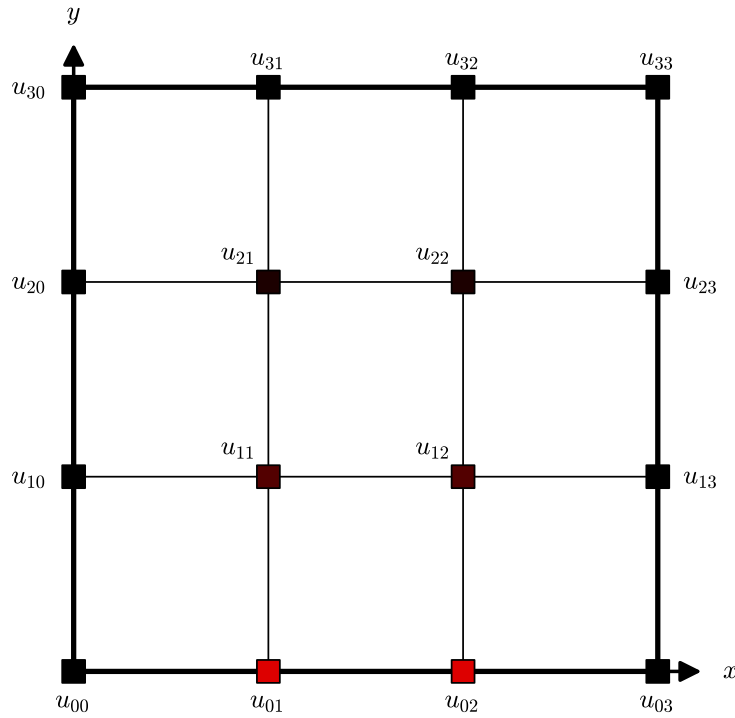
$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{21} \\ u_{22} \end{pmatrix}}_U = - \underbrace{\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_B$$

forme matricielle

En confiant la résolution de ce système à la machine, on obtient

$$U = \frac{\sqrt{3}}{16} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que l'on peut représenter par une matrice de couleur :



Dans le cas général (i.e. pour $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$ quelconque), le même procédé produit un système linéaire $MU = B$ similaire, de taille $(n-1)^2$ où

- M est la matrice par blocs, carrée à $(n-1)^2$ lignes suivante :

$$M = \begin{pmatrix} A & I_{n-1} & \mathbb{O}_{n-1} & \cdots & \mathbb{O}_{n-1} \\ I_{n-1} & A & I_{n-1} & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O}_{n-1} & I_{n-1} & A & \ddots & \mathbb{O}_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & I \\ \mathbb{O}_{n-1} & \cdots & \mathbb{O}_{n-1} & I_{n-1} & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n-1)^2}(\mathbb{R})$$

où A est la matrice carrée à $n-1$ lignes définie par

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$$

I est la matrice identité à $n-1$ lignes et \mathbb{O} est la matrice carrée nulle à $n-1$ lignes.

- U est le vecteur inconnu

$$U = - \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1,n-1} \\ u_{21} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{2,n-1} \\ \vdots \\ u_{n-1,1} \\ u_{n-1,2} \\ \vdots \\ u_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)^2}$$

- B est le second membre du système, construit à partir des conditions limites :

$$B = - \begin{pmatrix} u_{10} + u_{01} \\ u_{02} \\ \vdots \\ u_{0,n-2} \\ u_{0,n-1} + u_{1n} \\ u_{20} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{2n} \\ \vdots \\ u_{n-1,0} + u_{n1} \\ u_{n2} \\ \vdots \\ u_{n,n-2} \\ u_{n,n-1} + u_{n-1,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1)^2}$$

Notes :

- La matrice M du système à inverser est creuse (i.e. elle contient de très nombreux zéros). L'utilisation d'algorithmes de résolution spécifique à ce type de matrice permet de réduire considérablement le nombre d'opérations nécessaires à son inversion et permet ainsi de gagner en précision.
- Si l'on remplace les conditions limites de Dirichlet par des conditions de Neumann

de la forme $\frac{\partial u}{\partial n} = \text{Cste}$, on doit approcher ces dérivées normales par des différences finies (décentrée) faisant là encore intervenir les températures aux points du maillage. On ajoute ainsi au système autant d'équations que nécessaires; ce qui modifie quelque peu la matrice M , le second membre B ainsi que le vecteur inconnue U .

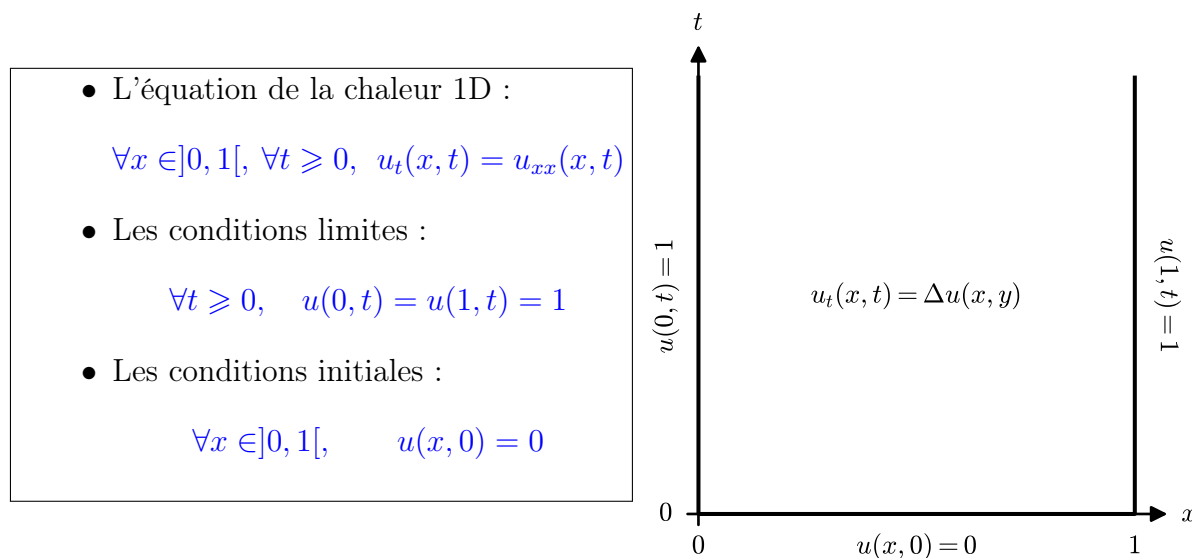
- Il est également possible de tenir compte d'un éventuel second membre

$$\Delta u = f(x, y)$$

Les valeurs de f aux points du maillage (i.e. les valeurs $f_{ij} = f(x_j, y_i)$ connues) apparaissent alors dans le second membre B du système ci-dessus.

3.3.2 Équation de la chaleur 1D instationnaire

Il est également possible d'appliquer la méthode des différences finie à la résolution d'équations paraboliques, portant par exemple sur l'évolution au cours du temps de la température au sein d'une barre homogène de longueur 1. Précisément, on souhaite connaître la température $u(x, t)$ en tout point de l'intervalle $x \in [0, 1]$ et à chaque instant $t \geq 0$, connaissant la température en chaque point à $t = 0$ et la température aux extrémités pour chaque $t \geq 0$. La fonction u de deux variables (x, t) est alors l'unique solution du problème constitué des contraintes suivantes.



Discrétisation du domaine

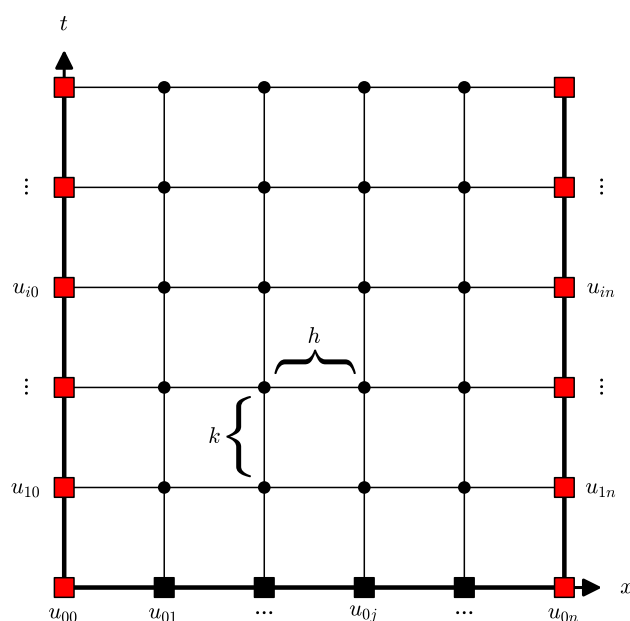
Là encore, la résolution approchée à l'aide des différences finies commence par une discrétisation du domaine de résolution. Pour cela, on commence par découper l'intervalle $[0, 1]$ en n intervalles de même longueur $h = \frac{1}{n}$. On obtient ainsi $n + 1$ abscisses distinctes

$$x_j = j.h, \quad j \in \{0, \dots, n\}$$

On choisit ensuite un pas de temps $k = \Delta t$ qui permettent une discrétisation de \mathbb{R}^+ :

$$t_i = i.k, \quad k \in \mathbb{N}$$

On obtient ainsi un maillage du plan (xOt)



les conditions limites et initiales permettant de connaître les valeurs de la température aux bords sud, est et ouest du domaine :

$$\forall j \in \{1, \dots, n-1\}, \quad u_{0j} = 0$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad u_{i0} = u_{in} = 1$$

En exprimant les dérivées partielles de u à l'aide des différences finies, on peut alors discrétiser l'équation de la chaleur, à l'image de ce que l'on a fait dans le cas stationnaire. Cependant, dans le cas instationnaire, il existe différentes méthodes de discrétisation.

Discrétisation de l'équation (méthode explicite)

La méthode explicite est basée sur une approximation de la dérivée première u_t par une différence finie décentrée à droite (et la différence finie d'ordre 2 pour u_{xx}) :

$$\forall(x, t), \quad u_t(x, t) \approx \frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k}$$

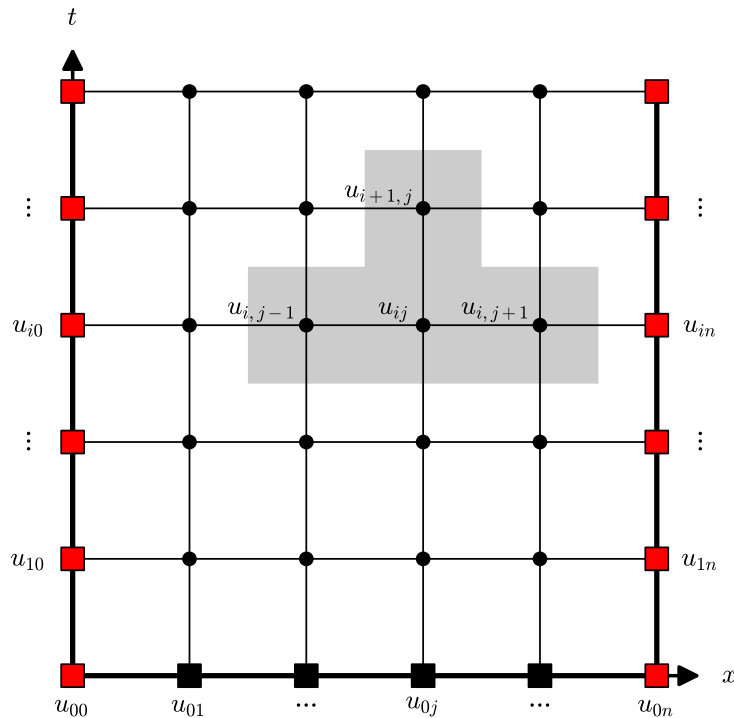
$$u_{xx}(x, t) \approx \frac{u(x-h, t) - 2u(x, t) + u(x+h, t)}{h^2}$$

En appliquant ces approximations aux point (x_j, y_i) du maillage intérieurs au domaine, on obtient, pour tout $i \geq 0$ et pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$,

$$\begin{aligned}
u_t(x_j, t_i) = u_{xx}(x_j, y_i) &\iff \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h^2} \\
&\iff u_{i+1,j} = u_{ij} + \frac{k}{h^2} (u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}) \\
&\iff \boxed{u_{i+1,j} = \delta u_{i,j-1} + (1 - 2\delta)u_{ij} + \delta u_{i,j+1}} \quad (E_{ij})
\end{aligned}$$

où $\delta = \frac{k}{h^2}$.

Cette mise en équation permet de montrer que la température en un point x_j au temps $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ dépend de la température aux points x_{j-1} , x_j et x_{j+1} au temps t_i :



Les conditions initiales donnant la température en chaque point à l'instant $t = 0$, on peut ainsi calculer, par récurrence, la température en tout point en tout temps.

Formellement, on peut alors représenter l'ensemble des équations (E_{ij}) sous la forme d'équations vectorielles. Précisément, à $i \in \mathbb{N}$ fixé, on note

$$U_i = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{i,n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$$

Les conditions initiales donnent alors la valeur du vecteur U_0 et l'ensemble des équations $\{(E_{ij}), j \in \{1, \dots, n-1\}\}$ se traduit alors sous la forme d'une relation de récurrence matricielle, à l'aide de laquelle on peut calculer les vecteurs U_i de proche en proche :

$$U_{i+1} = M_\delta \times U_i + V_i$$

où

$$M_\delta = \begin{pmatrix} 1-2\delta & \delta & 0 & \cdots & 0 \\ \delta & 1-2\delta & \delta & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \delta \\ 0 & \cdots & 0 & \delta & 1-2\delta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_i = \delta \cdot \begin{pmatrix} u_{i0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{in} \end{pmatrix}$$

Discretisation de l'équation (méthodes semi-implicites)

D'un point de vue qualitatif, la méthode ci-dessus étant issue des différences finies, on peut l'erreur théorique ε_{ij} à chaque pas de temps t_i , au point x_j vérifie

$$\varepsilon_{ij} = O(k + h^2)$$

Autrement dit, la méthode ci-dessus est

- D'ordre 1 en temps.
- D'ordre 2 en espace.

Cependant, bien que naturelle et relativement simple à mettre en œuvre, elle peut être particulièrement instable.

Précisément, on peut montrer que, pour éviter que les erreurs de calculs issus des approximations numériques, le paramètre δ vérifie $\delta \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, il faut que

$$\text{Condition CFL : } k \leq \frac{1}{2}h^2$$

Or la précision de la solution obtenue dépendant en particulier du nombre $n+1$ de points de discrétisation, une forte augmentation de n impose restriction importante sur la taille du pas de temps k et augmente d'autant le nombre de calculs nécessaires sur un même intervalle de temps.

On peut palier à cette instabilité à l'aide de méthodes implicites ou semi-implicites.

Précisément, la méthode implicite consiste à approcher la dérivée première $u_t(x, t)$ par la différence finie décentrée à gauche :

$$u_t(x, t) \approx \frac{u(x, t) - u(x, t - k)}{k} \Leftrightarrow u_t(x, t + k) \approx \frac{u(x, t + k) - u(x, t)}{k}$$

En appliquant cette approximation aux points du maillage (x_j, y_{i+1}) , $1 \leq j \leq n - 1$, on remplace l'équation de la chaleur en un ensemble d'équations linéaires :

$$\begin{aligned} u_t(x_j, y_{i+1}) = u_{xx}(x_j, y_{i+1}) &\Leftrightarrow \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{h^2} \\ &\Leftrightarrow -\delta u_{i+1,j+1} + (2\delta + 1)u_{i+1,j} - \delta u_{i+1,j-1} = u_{ij} \end{aligned}$$

En posant comme dans la méthode explicite $U_i = \begin{pmatrix} u_{i1} \\ \vdots \\ u_{i,n-1} \end{pmatrix}$ et $V_i = \delta \cdot \begin{pmatrix} u_{i0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ u_{in} \end{pmatrix}$, on

rassemble l'ensemble de ces équations en un système vectoriel

$$M_{-\delta} \times U_{i+1} = U_i + V_{i+1}$$

où

$$M_{-\delta} = \begin{pmatrix} 1 + 2\delta & -\delta & 0 & \cdots & 0 \\ -\delta & 1 + 2\delta & -\delta & \ddots & \vdots \\ 0 & -\delta & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\delta \\ 0 & \cdots & 0 & -\delta & 1 + 2\delta \end{pmatrix}$$

On peut alors, comme dans le cas explicite, déterminer les températures au temps t_{i+1} à partir des températures au temps t_i et des conditions limites, au prix ici de l'inversion de la matrice $M_{-\delta}$. Du point de vue de l'efficacité, le coup de cette matrice est largement compensé par la possibilité d'augmenter le pas de temps k (pour un même pas d'espace h). On peut en particulier s'affranchir de la contrainte $k \leq \frac{1}{2}h^2$.

Notons que là encore, la méthode est, d'un point de vue théorique, d'ordre 1 en temps

et d'ordre 2 en espace.

Enfin, il est possible d'augmenter encore l'efficacité de la méthode en choisissant un procédé hybride de discrétisation de l'équation de Laplace :

Schéma explicite :	$\frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h^2}$
Schéma implicite :	$\frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{k} = \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{h^2}$
θ -Schéma ($\theta \in [0, 1]$) :	$\frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{k} = \theta \cdot \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i+1,j} + u_{i+1,j-1}}{h^2} + (1 - \theta) \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h^2}$

Note : concernant le θ -schéma,

- On retrouve le schéma explicite pour $\theta = 0$.
- On retrouve le schéma implicite pour $\theta = 1$.

Du point de vue du problème modélisé, les θ -schémas permettent de prendre en compte, en chaque point de la barre étudiée, la température aux points voisins au temps présent en plus du temps précédent.

Par ailleurs, pour $\theta = \frac{1}{2}$, on obtient le schéma de Crank-Nicholson. On peut alors montrer que ce schéma est d'ordre 2 en espace et en temps et qu'il est inconditionnellement stable, i.e. on peut s'affranchir de la contrainte CFL.

Dans le schéma de Crank-Nicholson se traduit alors, chaque équation s'écrit

$-\frac{\delta}{2} \cdot u_{i+1,j+1} + (1 + \delta)u_{i+1,j} - \frac{\delta}{2} \cdot u_{i+1,j-1} = \frac{\delta}{2} \cdot u_{i,j+1} + (1 - \delta) \cdot u_{ij} + \frac{\delta}{2} \cdot u_{i,j-1}$
--

On peut alors représenter l'ensemble de ces équations par le système vectoriel

$M_{-\frac{\delta}{2}} \times U_{i+1} = M_{\frac{\delta}{2}} \times U_i + \frac{1}{2}(V_i + V_{i+1})$

où les matrices M_δ et V_i ont été définies aux paragraphes précédents.

On obtient là encore la température en chaque point de la barre au temps t_{i+1} au prix d'une inversion de matrice carrée à $n - 1$ lignes.

3.4 Résolution exacte par séparation des variables

Bien qu'il ne soit pas possible de déterminer de façon analytique les solutions de la plupart des équations aux dérivées partielles, il existe tout de même quelques méthodes permettant, dans certains cas spécifiques, de déterminer la solution d'un problème constitué d'une équation aux dérivées partielles complétée par des conditions limites et/ou des conditions initiales.

L'une d'entre elle (dite par séparation des variable), basée sur la recherche de solutions de la forme

$$u(x, t) = X(x).T(t)$$

permet par exemple de résoudre l'équation de la chaleur 1D instationnaire sous des conditions limites linéaires et homogènes, i.e. de la forme

$$a.u_x(0, t) + b.u(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad c.u_x(1, t) + d.u(1, t) = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

Ainsi, considérons le problème de diffusion de chaleur 1D suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (E) & : \quad u_t = \alpha^2 u_{xx} & \forall x \in]0, 1[, \forall t > 0 \\ (C.L.) & : \quad u(0, t) = u(1, t) = 0 & \forall t > 0 \\ (C.I.) & : \quad u(x, 0) = \Phi(x) & \forall x \in [0, 1] \end{array} \right.$$

Φ étant une fonction supposée connue, donnant la distribution de chaleur le long de la barre à $t = 0$.

1. Montrer que si u est une solution de (E) de la forme $u : (x, t) \mapsto X(x).T(t)$, alors les fonctions X et T vérifient des équations différentielles (ordinaires!) de la forme

$$(E_X) : X'' - kX = 0 \quad \text{et} \quad (E_T) : T' - k.\alpha^2.T = 0$$

pour une certaine constante k .

2. On pose $k = -\lambda^2 < 0$. Résoudre les équations (E_X) et (E_T) .
3. En déduire une expression de $u(x, t)$ en fonction de λ , α et deux constantes $A, B \in \mathbb{R}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction u_n de la forme

$$u_n(x, t) = e^{-n^2\pi^2\alpha^2t}.A_n.\sin(n\pi x)$$

vérifiant à la fois l'équation (E) et les conditions initiales $(C.L.)$.

5. Montrer que la fonction

$$u : (x, t) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x, t)$$

est également une solution de (E) vérifiant les conditions initiales $(C.L.)$.

6. En exploitant la condition limite $(C.I.)$ établir un lien entre les coefficients A_n obtenus à la question précédente et la fonction Φ .
7. Détermine les coefficients A_n dans le cas ou $\Phi(x) = \sin(\pi x)$ pour tout $x \in [0, 1]$.
8. Même chose pour $\Phi(x) = 1$ pour tout $x \in [0, 1]$.