Espaces Euclidiens. Novembre 2007.

Exercice 1 Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. On définit également l'application N_1 sur E par :

$$N_1(f) = \int_0^1 e^t |f(t)| dt.$$

1. Montrer que N_1 est une norme sur E.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de E définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   Étudier cette suite pour les normes $\|.\|_\infty$ et N_1. Que peut-on en conclure ?

Exercice 2 Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{x+ty}{1+t+t^2} \right|.$$

Montrer que N définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ et tracer la boule unité fermée

$$B'_N(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, N(x,y) \leqslant 1\}.$$

Exercice 3 On définit sur $\mathbb{R}^2$ l'application N suivante :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{x+ty}{\sqrt{1+t^2}} \right|.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Est-elle équivalente à la norme euclidienne $\|.\|_2$?
3. Déterminer la boule unité pour N.
4. Conclure.

Exercice 4 Soit E un evn et soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.

1. Montrer que $x \in \overline{A}$ ssi il existe une suite (x_n) de points de A qui converge vers x.
2. Montrer que A est fermé ssi toute suite d'éléments de A qui converge converge vers A.
3. Application : Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \ / \ f \text{ est bornée}\}$ muni de la norme infinie et soit $A = \{f \in E \ / \ \lim_{+\infty}(f) = 0\}$. Montrer que A est fermé dans$E$.

Exercice 5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. A tout n-uplet $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on associe le polynôme $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$. Montrer que pour toute racine $z \in \mathbb{C}$ de P, on a
$$|z| \leqslant \max \left\{ 1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right\}.$$
2. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ unitaires, et scindés sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{S}_n$ est fermé dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 6 Soit
$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}[X]^2 & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ (P,Q) & \mapsto & \int_0^\infty e^{-t} P(t)Q(t)dt \end{array}.$$

1. Montrer que Φ est un produit scalaire.
2. Déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t}(t^2 - at - b)^2 dt$.

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel normé, et soit V un sous espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\overline{V}$ est encore un sous espace vectoriel de E.
2. Montrer que si V est d'intérieur non vide, alors $V = E$. (Ind : on pourra commencer par montrer que V contient une boule ouverte centrée en 0).