Espaces Euclidiens. Novembre 2007.

Exercice 1 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique et de son produit scalaire usuel. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y - z = 0$.

1. Déterminer une base orthonormée de $\mathcal{P}$.
2. Déterminer la symétrie orthogonale de $(0, -4, 1)$ par rapport au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 2

1. Écrire la matrice de la symétrie de $\mathbb{R}^2$ d'axe la droite d'équation $ax + by = 0$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (On rappelle que la symétrie σ_D d'axe D vaut $2\pi_D - id$ où π_D est la projection orthogonale sur D).
2. Quelle est la symétrie orthogonale du vecteur $\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ par rapport à la droite d'équation $x - 2y = 0$?

Exercice 3 Soit

$$\begin{array}{rcl} \Phi : \mathbb{R}[X]^2 & \to & \mathbb{R}[X] \\ (P, Q) & \mapsto & \int_0^\infty e^{-t} P(t) Q(t) dt \end{array}$$

1. Montrer que Φ est un produit scalaire.
2. Déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t}(t^2 - at - b)^2 dt$.

Exercice 4 Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $u = (u_1, \ldots, u_n)$ un vecteur unitaire de E. On note $\mathcal{D}$ la droite de E engendrée par u.

1. Montrer que la matrice de la projection orthogonale sur $\mathcal{D}$ est ${}^t uu$.
2. En déduire la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan $\mathcal{P} : x + 2y + 3z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$. On définit également l'application N_1 sur E par :

$$N_1(f) = \int_0^1 e^t |f(t)| dt.$$

1. Montrer que N_1 est une norme sur E.
2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de E définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx \text{ si } 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   Étudier cette suite pour les normes $\|.\|_\infty$ et N_1. Que peut-on en conclure ?

Exercice 6 On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle. Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x - 2y + z = 0$.

1. Déterminer une BON $\{u_1, u_2\}$ de $\mathcal{P}$ et un vecteur normé $\{u_3\}$ de $\mathcal{P}^\perp$.
2. On pose $v = (4, -1, -1)$. Déterminer le projeté orthogonal $\pi_{\mathcal{P}}(v)$ de v sur $\mathcal{P}$.
3. Donner la matrice de la projection $\pi_{\mathcal{P}}$ dans la base $\mathcal{B}$ puis dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7 Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on note

$$N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \frac{x + ty}{1 + t + t^2} \right|.$$

Montrer que N définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ et tracer la boule unité fermée

$$B'_N(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, N(x,y) \leqslant 1\}.$$