

# Principe de Hasse

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Motivation</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Principe de Hasse</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Quelques classes d'équations vérifiant le principe de Hasse</b>	<b>4</b>
3.1	Théorème de Hasse-Minkowski . . . . .	4
3.2	Équations aux normes . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Contres-exemples et obstructions</b>	<b>6</b>
4.1	Un polynôme en une variable . . . . .	6
4.2	Une surface singulière . . . . .	6
4.3	Un dernier contre-exemple caractéristique . . . . .	7

La plupart des résultats présents dans ce résumé sont disponible à l'adresse suivante avec force détails et références.

<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre/articles/textes/obstructions.ps.gz>

## 1 Motivation

Une équation polynomiale, c'est la donnée d'un corps de nombres  $K$ , et d'un polynôme  $F(X_1, \dots, X_n)$  à coefficients dans  $K$  ou dans  $\mathcal{O}_K$ . Une première étape dans la résolution de cette équation peut être de déterminer l'existence de points  $\underline{x}$  de  $K^n$  ou de  $\mathcal{O}_K^n$  tels que  $F(\underline{x}) = 0$ .

Si l'équation est définie sur  $\mathbb{Z}$ , une première approche est donc de regarder ce problème modulo un nombre premier  $p$ . Si l'équation modulo  $p$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{F}_p^n$ , il est clair qu'elle n'aura pas de solution dans  $\mathbb{Z}$ . Si cela ne donne rien (i.e.  $F(\underline{x}) \equiv 0 \pmod{p}$  admet une solution dans  $\mathbb{F}_p^n$ ), on peut alors regarder modulo  $p^2, p^3, \dots, p^k, \dots$ . C'est pour traiter tous ces cas d'un coup qu'Hensel introduisit les entiers  $p$ -adiques  $\mathbb{Z}_p$  comme étant :

$$\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}.$$

(Un élément  $x$  de  $\mathbb{Z}_p$  est une suite d'entiers  $(\alpha_k)_{k \geq 1}$  telle que  $\alpha_k \in \{0, \dots, p^k - 1\}$  et telle que pour tout  $k \geq 1$ , on ait  $\alpha_{k+1} \equiv \alpha_k \pmod{p^k}$ .) On peut montrer que  $\mathbb{Z}_p$  est un anneau local, intègre, qui contient  $\mathbb{Z}$  et encore une fois, il est clair que si notre équation n'admet pas de solution dans  $\mathbb{Z}_p^n$ , elle n'en aura pas non plus dans  $\mathbb{Z}$ .

De même, si le problème est posé sur  $\mathbb{Q}$ , on peut commencer par l'étudier sur les corps  $p$ -adiques  $\mathbb{Q}_p = \text{Frac}(\mathbb{Z}_p)$ .

Pour l'instant, on a donc une condition nécessaire à l'existence de solutions rationnelles : l'existence d'une solution dans chacun des  $\mathbb{Q}_p$ ,  $p$  premier à laquelle on peut ajouter l'existence d'une solution réelle. Or pour un nombre premier  $p$  fixé, on peut construire une valeur absolue  $p$ -adique  $|\cdot|_p$  sur  $\mathbb{Q}_p$  : tout nombre rationnel  $a/b$  s'écrit de façon unique sous la forme  $a/b = p^v \cdot a'/b'$  avec  $a'$  et  $b'$  premiers à  $p$ . On définit alors

$$|a/b|_p = p^{-v}.$$

Le corps  $\mathbb{Q}_p$  apparaît alors comme étant le complété de  $\mathbb{Q}$  pour la métrique induite par  $|\cdot|_p$ . Cette structure analytique sur  $\mathbb{Q}_p$  est donc plus agréable que celles que l'on peut se donner sur  $\mathbb{Q}$ , d'autant que  $|\cdot|_p$  est une valeur absolue ultramétrique (i.e.  $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ ), ce qui nous permet par exemple de dire que chaque point à l'intérieur d'une boule est centre de cette boule, ou encore qu'une série converge si et seulement si son terme général tend vers 0...

Enfin, Hensel a établi un certain nombre de lemmes qui permettent de réduire l'étude de notre équation à un nombre fini de nombres premiers  $p$ , tous explicites une fois que le polynôme est fixé.

**Proposition 1.1** *Soit*

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad 1 \leq i \leq r$$

*un système d'équations polynomiales à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  (ou même  $\mathbb{Z}_p$ ). Alors si la réduction modulo  $p$  de ce système possède une solution **non singulière** dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , le système possède une solution dans  $\mathbb{Z}_p$ .*

Une solution est non singulière, si la matrice des dérivées partielles  $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}$ , prise en cette solution est de rang maximale. En langage géométrique, cela signifie que si une variété définie sur  $\mathbb{Z}_p$  possède un point lisse modulo  $p$ , alors elle possède un point à coordonnées dans  $\mathbb{Z}_p$ .

**Exemple 1 :** Soient  $p$  un nombre premier distinct de 2 et  $a, b, c$  trois entiers relatifs non divisibles par  $p$ . Alors l'équation  $ax^2 + by^2 = c$  possède une solution dans  $\mathbb{Z}_p$ . En effet, la réduction modulo  $p$  de cette équation s'écrit

$$\bar{a}x^2 + \bar{b}y^2 = \bar{c},$$

avec  $\bar{a}, \bar{b}$  et  $\bar{c}$  non nuls dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Mais cette dernière équation admet une solution dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  (pour le voir, on peut par exemple compter le nombre de carrés dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  : il y en a  $\frac{p+1}{2}$ , donc au moins un élément de  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est à la fois de la forme  $\bar{a}x^2$  et  $\bar{c} - \bar{b}y^2$ ). Une telle solution est nécessairement non singulière, car le seul point où les deux dérivées partielles s'annulent est  $(0,0)$ , qui n'est pas solution. En appliquant alors le lemme de Hensel, on obtient le résultat souhaité.

**Exemple 2 :** D'après le théorème de Chevallay-Warning (voir [1]), un polynôme homogène en  $n$  variables, de degré  $d$  sur un corps fini admet au moins un point non trivial si  $n > d$ . Ainsi, si  $P(X_1, \dots, X_n) = \sum_{k=1}^n a_k X_k^d$  est un polynôme homogène de degré  $d$ , diagonal, à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  et tel que  $n > d$ , alors pour tout premier  $p \nmid d \prod a_k$ , l'équation  $P = 0$  admet une solution non triviale dans  $\mathbb{Z}_p$ .

Finalement, le lemme de Hensel règle le cas de presque tous les localisés (sauf un nombre fini, correspondant essentiellement aux nombres premiers divisant les coefficients de notre polynôme, ainsi que les différentes puissances qui apparaissent). De plus, certains raffinements du lemme de Hensel permettent de régler le cas de quelques premiers supplémentaires, quitte à se placer modulo une puissance de ces premiers.

Enfin, de façon générale, étant donné un corps  $K$ , son anneau d'entiers  $\mathcal{O}_K$  est un anneau de Dedekind, et pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $\mathcal{O}_K$ , on peut construire le corps

local  $K_{\mathfrak{p}}$  des nombres  $\mathfrak{p}$ -adiques. Précisément, tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  permet de définir une valeur absolue  $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$  sur  $K$  et  $K_{\mathfrak{p}}$  apparaît alors comme le complété de  $K$  pour la métrique induite par  $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ . Comme on a ajouté le complété  $\mathbb{R}$  de  $\mathbb{Q}$  pour la métrique usuelle, il faut ici ajouter les complétés de  $K$  pour les métriques induites par les plongements  $\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C} : |x|_{\sigma} = |\sigma(x)|$  où  $|\cdot|$  est le module dans  $\mathbb{C}$  (on remarque en particulier que si  $\sigma$  est un plongement complexe, il définit la même métrique que son conjugué...). Ainsi, étant donné un corps de nombres  $K$ , si l'on note  $M_K$  l'ensemble des idéaux premiers de  $\mathcal{O}_K$ , auquel on ajoute les plongements réels et les couples de plongements complexes conjugués (c'est ce qu'on appelle l'ensemble des places de  $K$ ),  $M_K$  nous permet d'indicer l'ensemble des complétés de  $K$ , et tout ce que l'on vient de voir sur  $\mathbb{Q}$  reste valable sur  $K$  : les complétés  $K_v$ ,  $v \in M_K$  ont une structure analytique plus agréable que  $K$ , et les lemmes de Hensel nous permettent de n'étudier qu'un nombre fini de places, explicites une fois que l'on a fixé le polynôme  $F(X)$ .

## 2 Principe de Hasse

D'un point de vue géométrique, tout ce que l'on vient de dire peut se résumer de la façon suivante : étant donnée une variété  $V$  définie sur un corps de nombre  $K$ , si l'on note  $V(K)$  l'ensemble des points de  $V$  à coordonnées dans  $K$ , alors

$$(V(K) \neq \emptyset) \Rightarrow (\forall v \in M_K, V(K_v) \neq \emptyset).$$

La réciproque est en général fautive (sinon, on aurait une méthode algorithmique permettant de résoudre n'importe quelle équation diophantienne...). Cependant, il existe certaines classes d'équations vérifiant cette réciproque, et c'est ce que l'on appelle le *principe de Hasse* : on dira que  $V/K$  vérifie le principe de Hasse, si

$$(\forall v \in M_K, V(K_v) \neq \emptyset) \Rightarrow (V(K) \neq \emptyset). \tag{1}$$

On va donc commencer par étudier rapidement deux classes d'équations vérifiant ce principe, puis dans un second temps, on étudiera quelques contre-exemples, en tentant de regarder de plus près pourquoi ces exemples ne marchent pas.

## 3 Quelques classes d'équations vérifiant le principe de Hasse

### 3.1 Théorème de Hasse-Minkowski

Une première classe importante de polynômes vérifiant le principe de Hasse est l'ensemble des formes quadratiques à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ .

**Théorème 3.1 (Hasse-Minkowski)** *Étant donnée une forme quadratique  $q(x_1, \dots, x_n)$  à coefficients dans un corps de nombres  $K$ , l'équation  $q(x_1, \dots, x_n) = 0$  admet une solution*

non triviale dans  $K^n$  si et seulement si elle admet une solution non triviale dans chacun des complétés  $K_v$ ,  $v \in \mathcal{M}_K$  de  $K$ .

**idée de preuve :** Le cas  $n = 2$  ne se pose pas vraiment car

**Proposition 3.2** *Pour tout corps  $K$  de caractéristique autre que 2, toute forme quadratique  $ax^2 + bxy + cy^2$  admet un zéro non nul si et seulement si  $b^2 - 4ac$  est un carré dans  $K$ .*

Or si le discriminant est un carré dans tous les complétés, c'est également un carré dans  $\mathbb{Q}$ .

Pour le cas  $n = 3$  dû à Legendre, on exploite l'existence de solutions dans tous les localisés pour obtenir des conditions de congruence sur les coefficients de la forme quadratique  $q$  puis l'on construit un sous-réseau de  $\mathbb{Z}^3$  et un convexe de  $\mathbb{R}^3$  associés à  $q$  tel que le convexe contienne un point du réseau vérifiant  $q = 0$ .

Pour les cas  $n \geq 4$ , on commence à avoir suffisamment de variables pour avoir la place de travailler. (Il est à noter qu'en règle générale, le passage du local au global est d'autant plus difficile que le nombre de variables est petit.) Ainsi, pour  $n = 4$ , on peut supposer que  $q$  est sous forme diagonale :  $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i=1}^4 a_i x_i^2$ , et l'on exploite les solutions  $p$ -adiques de l'équation  $q = 0$  pour montrer qu'il existe un rationnel  $a \in \mathbb{Q}^*$  qui peut être représenté sur  $\mathbb{Q}$  par les formes  $g(x_1, x_2) = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2$  et  $h(x_3, x_4) = -a_3 x_3^2 - a_4 x_4^2$ .

Pour démontrer ce résultat en détails, il faut commencer par un certain nombre de réductions de la forme quadratique  $q$  et sur la solution que l'on cherche. Il faut notamment faire appel à un théorème disant que si l'on est sur un corps à plus de 6 éléments, pour toute forme quadratique  $q$  telle que  $q = 0$  admette une solution non triviale, il existe une solution  $x = (x_1, \dots, x_n)$  telle que  $\prod x_i \neq 0$ . Ce résultat nous servira plus loin.

## 3.2 Équations aux normes

Une autre grande classe d'équations vérifiant le principe de Hasse porte sur les normes d'extensions cycliques de corps de nombres

**Proposition 3.3** *Soit  $K$  un corps de nombres, et soit  $L$  une extension cyclique de  $K$ . Un élément non nul  $x \in K^*$  est la norme d'un élément  $y \in L^*$  si et seulement si pour toute place  $v$  de  $K$ , et pour toute place  $w$  de  $L$  au-dessus de  $K$ ,  $x$  vu comme un élément de  $K_v$  est la norme d'un élément  $y_w \in L_w^*$ .*

Dans ce cas, si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base du  $K$ -espace vectoriel  $L$ , la variété considérée est donnée par l'équation

$$\mathcal{N}_{L/K} \left( \sum_{i=1}^n X_i e_i \right) = a.$$

Toutes les variétés algébriques ne vérifient malheureusement pas le principe de Hasse (sinon, l'on aurait une méthode algorithmique pour les résoudre...). Hasse lui-même a donné un contre-exemple à la proposition précédente dans le cas d'une extension abélienne de groupe de Galois  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Le paragraphe suivant est consacré à l'étude de quelques contre-exemples classiques.

## 4 Contres-exemples et obstructions

### 4.1 Un polynôme en une variable

On peut facilement construire des équations diophantiennes (ou des variétés algébriques) ne vérifiant pas le principe de Hasse. Ainsi, notons

$$F(X) = (X^2 - 3)(X^2 + 3)(X^2 + 1)(X^2 + 23).$$

Pour tout nombre premier impaire, le quotient  $\mathbb{F}_p^\times / \mathbb{F}_p^{\times 2}$  est cyclique d'ordre 2. Ainsi, pour tout  $p \geq 5$ , au moins un des trois entiers  $-1$ ,  $3$  ou  $-3$  est un carré modulo  $p$ , et donc également dans  $\mathbb{Q}_p$  d'après le lemme de Hensel. D'autre part,  $-23$  est un carré dans  $\mathbb{Q}_2$  et dans  $\mathbb{Q}_3$ . Enfin,  $3$  étant un carré dans  $\mathbb{R}$ , l'équation  $F(X) = 0$  admet des solutions dans tous les localisés de  $\mathbb{Q}$ . Or les seules racines réelles de  $F$  étant  $\pm\sqrt{3}$ ,  $F$  n'a pas de racine dans  $\mathbb{Q}$ .

De façon générale, si  $(V_i)_{i \in I}$  est une famille de sous-variétés d'une variété  $V$  définie sur un corps de nombres  $K$  telle que

$$\begin{aligned} \forall v \in M_K, \exists i \in I, V_i(K_v) \neq \emptyset \\ \text{et } \forall i \in I, \exists v \in M_K, V_i(K_v) = \emptyset, \end{aligned}$$

l'union  $\cup_{i \in I} V_i$  fournit un contre-exemple au principe de Hasse. En effet, la première condition nous assure que pour chaque place  $v$  de  $K$ , au moins une des sous-variétés  $V_i$  admet un point à coordonnées dans  $K_v$ , alors que la seconde condition nous assure qu'aucune de ces sous-variétés n'a de point rationnel.

### 4.2 Une surface singulière

A partir du polynôme ci-dessus, on peut construire une surface affine ne vérifiant pas (1). Soit  $\mathcal{S}$  donnée par l'équation

$$Y^2 + Z^2 = -(X^2 - 3)^2(X^2 + 3)(X^2 + 1)(X^2 + 23).$$

Cette surface est irréductible, et d'après ce que l'on a vu plus haut, il est clair qu'elle admet un point à coordonnées dans chacun des complétés de  $\mathbb{Q}$ . Mais là encore, les seuls points réels de  $\mathcal{S}$  étant  $(\pm\sqrt{3}, 0, 0)$ ,  $\mathcal{S}$  n'a clairement pas de point à coordonnées rationnelles. On peut généraliser ce contre-exemple en considérant des variétés dont les seuls points sur l'un des complétés sont des points singuliers (ici, sur  $\mathbb{R} \dots$ ).

### 4.3 Un dernier contre-exemple caractéristique

Voici un dernière exemple donnant une surface définie sur  $\mathbb{Q}$  ne vérifiant pas le principe de Hasse. Soit  $\Sigma$  la surface d'équation

$$Y^2 + Z^2 = (3 - X^2)(X^2 - 2). \quad (2)$$

À l'aide du symbole de Hilbert, on montre que  $\Sigma$  admet un point à coordonnées dans tous les complétés de  $\mathbb{Q}$ , mais pas dans  $\mathbb{Q}$  lui-même.

Étant donnée une place  $v$  de  $\mathbb{Q}$  et deux nombres  $a, b \in \mathbb{Q}_v^*$ , le symbole de Hilbert associé à  $v$  est défini par

$$(a, b)_v = \begin{cases} 1 & \text{si l'équation } aX^2 + bY^2 = Z^2 \text{ admet une solution non nulle dans } \mathbb{Q}_v^3, \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'une des propriétés principales du symbole de Hilbert est la formule du produit :

$$\forall a, b \in \mathbb{Q}^*, \quad \prod_{v \in M_{\mathbb{Q}}} (a, b)_v = 1.$$

(Se démontre à l'aide de la loi de réciprocité quadratique.)

D'autre part, on a quelques formules explicites pour ce symbole de Hilbert :

– Si  $p$  est un nombre premier  $> 2$ , pour tout  $a \in \mathbb{Q}_p^*$ , on a

$$(-1, a)_p = (-1)^{v_p(a)\varepsilon(p)}$$

où  $\varepsilon(p)$  est la classe de  $(p-1)/2$  modulo 2.

– Si  $a$  est de la forme  $2^k u$  avec  $u \in \mathbb{Z}_2^\times$ , on a

$$(-1, a)_2 = (-1)^{\varepsilon(u)}.$$

– Si  $a \in \mathbb{R}^*$ , on a

$$(-1, a)_\infty = \frac{a}{|a|}.$$

Ainsi, pour une place  $v \in M_{\mathbb{Q}}$  fixés, si l'on se donne  $x \in \mathbb{Q}_v$  tel que  $(3-x^2)(x^2-2) \neq 0$ , notre équation admet une solution de la forme  $(x, y, z) \in \mathbb{Q}_v^3$  si et seulement si l'équation  $Y^2 + Z^2 = (3-x^2)(x^2-2)X^2$  admet une solution avec  $X \neq 0$ . Mais grâce au résultat évoqué plus haut, cela équivaut à l'existence d'une solution non triviale. Notre problème est donc équivalent à  $(-1, (3-x^2)(x^2-2))_v = 1$ , soit à

$$(-1, 3-x^2)_v = (-1, x^2-2)_v, \quad (3)$$

grâce aux formules explicites si dessus.

Ainsi, si l'on arrive à trouver  $x \in \mathbb{Q}_v$  vérifiant (3), on aura montré l'existence d'une solution  $(x, y, z) \in \mathbb{Q}_v^3$  à notre problème.

Or toujours grâce aux formules ci-dessus, on voit que si  $v$  est un premier  $p$  tel que  $4 \mid p-1$ , cette égalité est toujours vraie. D'autre part, si  $\varepsilon(p) = 1$ , il suffit d'avoir  $v_p(x) < 0$ , et si  $p = 2$ , l'égalité est vraie pour  $x = 0$ . Enfin, pour la place infinie, on a (3) dès que  $|x| \in ]\sqrt{2}, \sqrt{3}[$ .

Autrement dit, on vient de montrer que (2) admettait une solution dans chacun des complétés de  $\mathbb{Q}$ . Il nous reste à montrer qu'elle n'admet pas de solution rationnelle (et c'est en général la partie la plus difficile dans ce type de problème...).

Pour cela, on utilise encore le symbole de Hilbert : étant donnée une solution  $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$  de (2), on va montrer que le symbole de Hilbert appliqué au couple  $(-1, 3 - x^2)$  ne vérifie pas la formule du produit. Notons tout d'abord que  $(3 - x^2)(x^2 - 2) \neq 0$  et que l'égalité (3) est encore vérifiée par  $x$ .

- Comme précédemment, pour toute place finie  $p \equiv 1 \pmod{4}$ , on a  $(-1, 3 - x^2)_p = 1$ .
- Si  $p \equiv 3 \pmod{4}$ , alors soit  $v_p(x) < 0$  auquel cas on a encore  $(-1, 3 - x^2)_p = 1$ , soit  $v_p(x) \geq 0$  (i.e.  $x$  est un entier  $p$ -adique), mais comme  $x^2 - 2 = 1 - (3 - x^2)$ ,  $x^2 - 3$  et  $3 - x^3$  sont deux entiers premiers entre eux, et donc on a soit  $v_p(x^2 - 2) = 0$ , soit  $v_p(3 - x^2) = 0$ . Dans tous les cas, par (3), il vient encore  $(-1, 3 - x^2) = 1$ .
- Pour  $p = 2$ , remarquons d'abord que  $v_2(x) \neq 0$ . En effet, sinon l'on aurait  $x^2 \equiv 1 \pmod{8}$  (développer  $x^2 = (2x' + 1)^2$ ), d'où  $(3 - x^2)/2 \equiv 1 \pmod{4}$  et  $x^2 - 2 \equiv 3 \pmod{4}$ , ce qui contredit (3).

Ainsi, soit  $v_2(x) > 0$ , auquel cas  $3 - x^2 \equiv 3 \pmod{4}$  et  $(-1, 3 - x^2)_2 = -1$ , soit  $v_2(x) < 0$  et  $3/x^2 - 1 \equiv 3 \pmod{4}$ , ce qui nous donne encore  $(-1, 3 - x^2)_2 = -1$  :

$$\begin{aligned} \frac{3}{x^2} - 1 \equiv 3 \pmod{4} &\Rightarrow 3 - x^2 = 2^l(3x'^2 + 4kx'2) \text{ avec } v_2(x') = 0 \\ &\Rightarrow (-1, 3 - x^2) = (-1)^{\varepsilon(3x'^2 + 4kx'2)} = (-1)^{\varepsilon(3x'^2)} = -1. \end{aligned}$$

- Enfin, pour la place infinie, d'après (3), si  $(-1, 3 - x^2)_\infty = -1$ , cela signifie que ni  $(3 - x^2)X^2 = Y^2 + Z^2$  ni  $(x^2 - 2)X^2 = Y^2 + Z^2$  n'ont de solution réelle non nulle, ce qui est impossible. Et donc  $(-1, 3 - x^2)_\infty = 1$ .

On faisant le produit de tous les résultats que l'on vient d'établir, on trouve

$$\prod_{v \in M_{\mathbb{Q}}} (-1, 3 - x^2)_v = -1,$$

ce qui est absurde. Notre équation ne peut donc pas avoir de solution dans  $\mathbb{Q}^3$  et elle ne vérifie pas le principe de Hasse.

On peut généraliser ce contre exemple pour obtenir une obstruction au principe de Hasse basée sur le groupe de Brauer d'une variété algébrique. À l'aide du groupe de Brauer  $\text{Br}(V)$ , on construit un morphisme à valeurs dans le quotient  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  dont le noyau contient  $V(K)$ . L'obstruction de Brauer-Manin consiste donc en la vacuité de ce noyau.



## Références

- [1] H. COHEN, *A course in algebraic number theory*, en préparation.
- [2] D. HARARY, *Principe local-global en arithmétique*,  
[http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2006/107/smf\\_gazette\\_107\\_5-17.pdf](http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2006/107/smf_gazette_107_5-17.pdf).
- [3] E. PEYRE, *Obstruction au principe de Hasse et approximation faible*,  
<http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~peyre/articles/textes/obstructions.ps.gz>.