CONTRÔLE CONTINU - MATHÉMATIQUES

Comparaison locale des fonctions d'une variable réelle

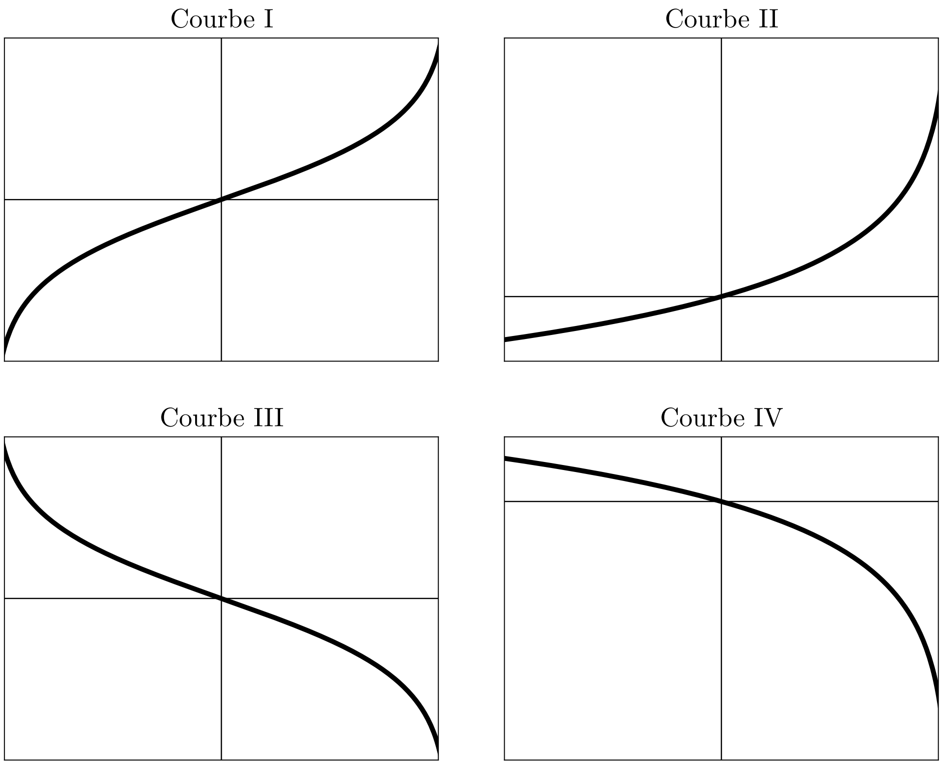
Tous les exercices sont indépendants *Calculatrices autorisées*
Hormis les formules usuelles données en fin de sujet, toutes les autres formules sont à démontrer.
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation

Exercice 1

Soit

$$f : x \longmapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer le développement limité d'ordre 3 de f en 0.
3. En déduire l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en 0.
4. Parmi les courbes ci-dessous, laquelle correspond à la courbe $\mathcal{C}_f$. Justifier.



⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2

Soient a et b deux réels fixés.

1. Déterminer, en fonction de b, le développement limité d'ordre 4 de la fonction
$$f : x \longmapsto \frac{1}{1+bx^2}$$
au voisinage de 0.
2. En déduire, en fonction de (a,b), le développement limité d'ordre 5 de la fonction
$$g : x \longmapsto \sin(x) - \frac{ax}{1+bx^2}$$
3. Déterminer, en fonction des couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, un équivalent de $g(x)$ en 0 sous la forme $\alpha\, x^n$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3

1. Calculer les limites

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e\,x}{(x-1)^2}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to e} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{e}}{\ln(x)-1}$

2. Montrer que
$$\frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{\ln(x)}{x+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(x)}{x^2}$$

⋆ ⋆
⋆

Développements limités usuels en 0

$\dfrac{1}{1-h} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} h^k + o(h^n)$	$\ln(1+h) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, h^k + o(h^n)$
$e^h = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\, h^k + o(h^n)$	$\sin(h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, h^{2k+1} + o(h^{2p+2})$
$(1+h)^\alpha = 1 + \alpha\, h + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}\, h^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\, h^3 + o(h^3)$	

CORRECTION

Comparaison locale des fonctions d'une variable réelle - 2021-2022

Correction Exercice 1 (Exercice ▲)

1. La quantité $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ existe si et seulement si

$$\begin{aligned}\frac{1-x}{1+x} > 0 &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}1-x>0\\1+x>0\end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l}1-x<0\\1+x<0\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x<1\\x>-1\end{array}\right. \text{ ou } \cancel{\left\{\begin{array}{l}x>1\\x<-1\end{array}\right.} \text{ impossible}\end{aligned}$$

   D'où $D_f =]-1,1[$.

2. D'après la formule usuelle donnée en annexe, on a

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln(1-x) - \ln(1+x)\\ &= \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)\\ &= \boxed{-2x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}\end{aligned}$$

3. L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en 0 est donnée par le $\mathrm{DL}_1(0)$ de f, soit

$$\boxed{T_0 \ : \ y = -2x}$$

4. Le coefficient directeur de la tangente obtenue ci-dessus étant négatif, on peut éliminer les courbes I et II pour lesquelles la tangente au point d'abscisse 0 est clairement croissante.

   Par ailleurs, d'après le DL obtenu plus haut, puisqu'il n'y a pas de terme en x^2, la différence $f(x) - (-2x)$ est du signe de $-x$.

   D'un point de vue géométrique, cela signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la tangente T_0 pour $x < 0$ et en dessous pour $x > 0$ (ce point est un point d'inflexion). On retient donc la courbe III.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Correction Exercice 2 (Exercice ▲)

1. On pose

$$h = bx^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

   et la formule usuelle donnée en annexe donne alors

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{1+bx^2} = \frac{1}{1+h}\\ &= 1 - h + h^2 + o(h^2)\\ &= 1 - bx^2 + b^2x^4 + o(x^4)\end{aligned}$$

2. D'après le résultat obtenu ci-dessus et la formule usuelle concernant la fonction sinus, on a

$$\begin{aligned}g(x) &= \sin(x) - \frac{ax}{1+bx^2}\\ &= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right) - ax\left(1 - bx^2 + b^2x^4 + o(x^4)\right)\\ &= (1-a)\,x + \left(ab - \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{120} - ab^2\right)x^5 + o(x^5)\end{aligned}$$

3. Des résultat obtenu ci-dessus, on tire les différents cas suivants :

— Si $a \neq 1$,

$$g(x) \underset{0}{\sim} \boxed{(1-a)\,x}$$

— Si $a = 1$, on a alors

$$g(x) = \left(b - \frac{1}{6}\right) x^3 + \left(\frac{1}{120} - b^2\right) x^5 + o(x^5)$$

Ainsi

— si $b \neq \frac{1}{6}$, on a

$$g(x) \underset{0}{\sim} \boxed{\left(b - \frac{1}{6}\right) x^3}$$

— si $b = \frac{1}{6}$, on a

$$g(x) \underset{0}{\sim} \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{36}\right) x^5 = \boxed{-\frac{7}{360}\, x^5}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Correction Exercice 3 (Exercice ▲)

1. (a) On pose ici

$$x = 1 + h \iff h = x - 1 \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 0$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\frac{e^x - e\,x}{(x-1)^2} &= \frac{e^{1+h} - e\,(1+h)}{((1+h)-1)^2} \\
&= \frac{e\left(e^h - 1 - h\right)}{h^2} \\
&= \frac{e\left(1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2) - 1 - h\right)}{h^2} \\
&= \frac{e}{2} + o(1) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \boxed{\frac{e}{2}}
\end{aligned}$$

(b) On pose ici

$$x = e + h \iff h = x - e \underset{x \to e}{\longrightarrow} 0$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln(x) - 1} &= \frac{\sqrt{e+h} - \sqrt{e}}{\ln(e+h) - 1} = \frac{\sqrt{e\left(1 + \frac{h}{e}\right)} - \sqrt{e}}{\ln\left(e\left(1 + \frac{h}{e}\right)\right) - 1} \\
&= \frac{\sqrt{e}\left(\sqrt{1 + \frac{h}{e}} - 1\right)}{\cancel{\ln(e)} + \ln\left(1 + \frac{h}{e}\right) - \cancel{1}} = \sqrt{e}\,\frac{\sqrt{1 + \frac{h}{e}} - 1}{\ln\left(1 + \frac{h}{e}\right)}
\end{aligned}$$

On pose alors

$$k = \frac{h}{e} \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

et d'après les formules usuelles données en annexe, on a

$$\sqrt{1 + \frac{h}{e}} - 1 = (1+k)^{\frac{1}{2}} - 1 = 1 + \frac{k}{2} + o(k) - 1 = \frac{k}{2} + o(k)$$

et

$$\ln\left(1 + \frac{h}{e}\right) = \ln(1+k) = k + o(k)$$

de sorte que

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\ln(x) - 1} = \sqrt{e}\,\frac{\frac{k}{2} + o(k)}{k + o(k)} = \sqrt{e}\,\frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1 + o(1)} \underset{\substack{k \to 0 \\ h \to 0 \\ x \to e}}{\longrightarrow} \boxed{\frac{\sqrt{e}}{2}}$$

2. Pour établir l'équivalence cherchée, on peut étudier la limite en $+\infty$ du quotient

$$q(x) = \frac{\frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{\ln(x)}{x+1}}{\frac{\ln(x)}{x^2}} = x\,\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} - \frac{x^2}{x+1}$$

Pour cela, on pose

$$h = \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et

$$\begin{aligned}
q(x) = q\left(\frac{1}{h}\right) &= \frac{\ln\left(\frac{1}{h}+1\right)}{h\ln\left(\frac{1}{h}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{h}\right)^2}{\frac{1}{h}+1} \\
&= \frac{\ln(1+h) - \ln(h)}{-h\ln(h)} - \frac{1}{h+h^2} \\
&= \frac{1}{h}\left(1 - \frac{\ln(1+h)}{\ln(h)} - \frac{1}{1+h}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\cancel{1} - \frac{h+o(h)}{\ln(h)} - \cancel{1} + h + o(h)\right) \\
&= \frac{1+o(1)}{\ln(h)} + 1 + o(1) \underset{h\to0}{\longrightarrow} 1
\end{aligned}$$

et l'équivalence cherchée est établie.

⋆ ⋆

⋆