CONTRÔLE CONTINU - MATHÉMATIQUES

Fonctions d'une variable réelle

Nom : .... Prénom : ....

Tous les exercices sont indépendants *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation

Exercice 1

1. *Questions de cours*
   Soit f une fonction réelle, définie sur $\mathbb{R}$. Compléter les définitions ci-dessous :
   (a) f est croissante si et seulement si

   (b) f est decroissante si et seulement si

2. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f et g sont monontones, la composée $g \circ f$ est monotone. On précisera le sens de variation de $g \circ f$ en fonction des sens de variations respectifs de f et g.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2

1. Soit α un nombre réel strictement positif. Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \alpha^x = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \alpha > 1 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = 1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

2. Soit a un nombre réel strictement positif. Déterminer en fonction de a la valeur de la limite

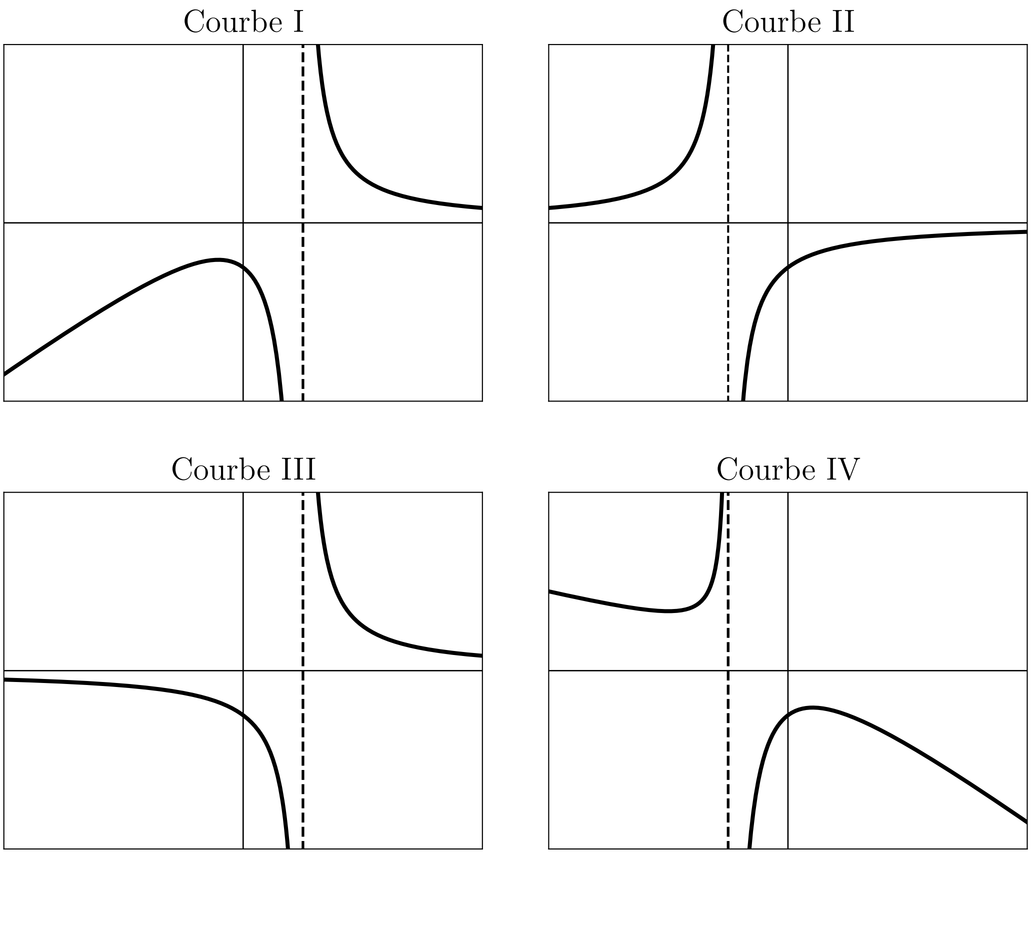
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{1 + a^x}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.
2. Montrer que f est dérivable sur D_f et donner l'expression de $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.
3. *Prolongement en 1*
   (a) Calculer $\lim_{x \to 1} f(x)$.
   (b) Montrer que f se prolonge en une fonction continue en 1. On notera encore f cette fonction prolongée et on précisera sa valeur en 1.
   (c) Montrer que la fonction f prolongée est dérivable en 1. On précisera la valeur du nombre dérivé $f'(1)$.
4. *Prolongement en -1*
   Montrer que la fonction f n'admet aucun prolongement continu en -1.
5. Parmi les courbes ci-dessous, laquelle représente f ? Justifier.



⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Fonctions d'une variable réelle - 2021-2022

Correction Exercice 1 (Exercice ▲)

1. (a) f est croissante si et seulement si

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a \leqslant b \;\Rightarrow\; f(a) \leqslant f(b)}$$

   (b) f est decroissante si et seulement si

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a \leqslant b \;\Rightarrow\; f(a) \geqslant f(b)}$$

2. — Supposons ici que f et g sont deux fonctions croissantes.
Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} a \leqslant b \;&\Rightarrow\; f(a) \leqslant f(b) && \text{car } f \text{ est croissante} \\ &\Rightarrow\; g(f(a)) \leqslant g(f(b)) && \text{car } g \text{ est croissante} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$a \leqslant b \;\Rightarrow\; g \circ f(a) \leqslant g \circ f(b)$$

et la fonction $g \circ f$ est croissante.

— Supposons ici que f et g sont deux fonctions décroissantes.
Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} a \leqslant b \;&\Rightarrow\; f(a) \geqslant f(b) && \text{car } f \text{ est décroissante} \\ &\Rightarrow\; g(f(a)) \leqslant g(f(b)) && \text{car } g \text{ est décroissante} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$a \leqslant b \;\Rightarrow\; g \circ f(a) \leqslant g \circ f(b)$$

et la fonction $g \circ f$ est croissante.

— Supposons ici que f est croissante et que g est décroissante.
Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} a \leqslant b \;&\Rightarrow\; f(a) \leqslant f(b) && \text{car } f \text{ est croissante} \\ &\Rightarrow\; g(f(a)) \geqslant g(f(b)) && \text{car } g \text{ est décroissante} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$a \leqslant b \;\Rightarrow\; g \circ f(a) \geqslant g \circ f(b)$$

et la fonction $g \circ f$ est décroissante.

— Supposons ici que f est décroissante et que g est croissante.
Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} a \leqslant b \;&\Rightarrow\; f(a) \geqslant f(b) && \text{car } f \text{ est décroissante} \\ &\Rightarrow\; g(f(a)) \geqslant g(f(b)) && \text{car } g \text{ est croissante} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$a \leqslant b \;\Rightarrow\; g \circ f(a) \geqslant g \circ f(b)$$

et la fonction $g \circ f$ est décroissante.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Correction Exercice 2 (Exercice ▲)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\alpha^x = e^{x\ln(\alpha)}$$
Ainsi,
— si $\alpha > 1$, alors $\ln(\alpha) > 0$. Donc $x\ln(\alpha) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et
$$\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(\alpha)} = +\infty$$
— si $\alpha = 1$, alors $\ln(\alpha) = 0$. Donc
$$\alpha^x = e^0 = 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
— si $\alpha < 1$, alors $\ln(\alpha) < 0$. Donc $x\ln(\alpha) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et
$$\lim_{x\to+\infty} e^{x\ln(\alpha)} = 0$$
2. D'après le résultat obtenu à la question précédente, on a
$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$$
Mais alors,

— Si $0 < a < 1$, on a
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$$
et
$$\frac{2^x}{1+a^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{+\infty}{1+0} = +\infty$$
— Si $a = 1$, on a
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 1$$
et
$$\frac{2^x}{1+b^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{+\infty}{1+1} = +\infty$$
— Si $a > 1$, on a
$$\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$$
et la limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{1+a^x}$$
est une forme indéterminée de la forme $\frac{\infty}{\infty}$. Pour lever l'indétermination, on factorise en haut et en bas par le terme le plus fort :
$$\frac{2^x}{1+a^x} = \frac{2^x}{a^x\left(\frac{1}{a^x}+1\right)} = \left(\frac{2}{a}\right)^x \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x + 1}$$
Ainsi, puisque $a > 1$, on a $\frac{1}{a} < 1$ et $\left(\frac{1}{a}\right)^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{1+a^x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{a}\right)^x = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a < 2 \\ 1 & \text{si} \quad a = 2 \\ 0 & \text{si} \quad a > 2 \end{cases}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Correction Exercice 3 (Exercice ▲)

1. La quantité $f(x)$ est définie si et seulement si

$$1 - x \neq 0 \text{ et } 1 - x^2 = (1-x)(1+x) \neq 0$$

Ainsi, $D_f = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$.

2. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition comme somme de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{-1}{(1-x)^2} + 2\frac{-2x}{(1-x^2)^2} \\
&= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{4x}{(1-x^2)^2} \\
&= \frac{(1+x)^2 - 4x}{(1-x)^2(1+x)^2} \\
&= \frac{\cancel{(1-x)^2}}{\cancel{(1-x)^2}(1+x)^2} \\
&= \frac{1}{(1+x)^2}
\end{aligned}$$

3. *Prolongement en 1*

(a) On vérifie rapidement que la limite demandée est une forme indéterminée. Mais on note également que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} &= \frac{1}{1-x} - \frac{2}{(1-x)(1+x)} \\
&= \frac{(1+x) - 2}{(1-x)(1+x)} \\
&= \frac{-\cancel{(1-x)}}{\cancel{(1-x)}(x+1)} \\
&= -\frac{1}{x+1} \underset{x \to 1}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(b) D'après le résultat obtenu ci-dessus, si l'on pose

$$f(1) = -\frac{1}{2}$$

la fonction f vérifie

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

donc elle est continue en 1.

(c) On étudie ici la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\frac{1}{1-(1+h)} - \frac{2}{1-(1+h)^2} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(-\frac{1}{h} + \frac{2}{2h+h^2} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(-\frac{2(2+h)}{2h(2+h)} + \frac{4}{2h(2+h)} + \frac{h(2+h)}{2h(2+h)}\right) \\
&= \frac{-4-2h+4+2h+h^2}{2h^2(2+h)} \\
&= \frac{1}{2(2+h)} \\
&\xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Ainsi, la fonction f est dérible en 1 et $f'(1) = \frac{1}{4}$.

4. Par un calcul direct, on a

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2}$$

d'une part et

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ <}} \frac{2}{1-x^2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

et

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} \frac{2}{1-x^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

d'autre part, de sorte que

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ <}} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x\to -1 \\ >}} f(x) = -\infty$$

donc la limite

$$\lim_{x\to -1} f(x)$$

n'existe pas et la fonction f n'est pas prolongeable continument en -1.

5. D'après les résultats obtenus ci-dessus, on peut éliminer les coubres I et III puisque l'asymptote vertical à la courbe de f est en $x = -1$ et non en $x = 1$.

   Pour distinguer les deux derniers cas, on peut par exemple calculer les limites de f en l'infini. Ainsi,

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 0 - 2.0 = 0$$

   Donc la courbe de f admet une asymptote horizontale en $\pm\infty$. C'est donc la courbe II.

⋆ ⋆
⋆