CONTRÔLE CONTINU - MATHÉMATIQUES

Outils élémentaires

Nom : .... Prénom : ....

Tous les exercices sont indépendants *Calculatrices autorisées*
Il sera tenu compte de la rédaction et de la présentation

Exercice 1

Dans la suite, f désigne une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et a et b désignent deux éléments de I.

Traduire les phrases ci-dessous en langage mathématique (quantificateurs, symboles, etc) :

1. La fonction f est constante si et seulement si

2. La fonction f admet un maximum en a si et seulement si

3. a et b sont des solutions de l'équation $f(x) = 0$ si et seulement si

4. a et b sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$ si et seulement si

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2

1. Soient $x_1, \ldots, x_n$ n nombres réels. On note $\overline{x}$ la moyenne définie par $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2$$

2. *Application*
Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$$

Montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i = 1$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3

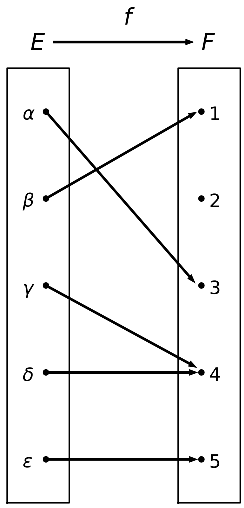
Soient E et F deux ensembles et f une fonction de E dans F.

1. Compléter les définitions suivantes à l'aide des quantificateurs.

   (a) $\boxed{\forall A \subset E, \qquad f(A) \;=\; \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\} \;\subset\; \ldots.}$

   (b) $\boxed{\forall B \subset F, \qquad f^{-1}(B) \;=\; \{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\} \;\subset\; \ldots.}$

2. Pour tout sous ensemble A de E, on souhaite comparer les ensembles A et $f^{-1}(f(A))$.



   (a) *Un exemple*
   Sur l'exemple ci-contre, on pose

   $$A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

   i. Identifier et représenter les ensembles A, $f(A)$ et $f^{-1}(f(A))$.

   ii. Comparer A et $f^{-1}(f(A))$.

   (b) *Cas général*

   i. Montrer que, de façon générale, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

   ii. Montrer que si f est injective, alors $A = f^{-1}(f(A))$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 4

Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On définit la somme $A+B$ par

$$A + B = \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$$

1. Déterminer l'ensemble $A+B$ dans les cas suivants :

   (a) $A = \{0, 1\}, \quad B = \{-1, 1, 2\}$

   (b) $A = [1, 2], \quad B =]-1, 3[$

2. Soient A et B deux parties non vides et majorées quelconques de $\mathbb{R}$.

   (a) Montrer que $\sup(A) + \sup(B)$ est un majorant de $A+B$.

   (b) Soit $\varepsilon > 0$ un réel fixé.

   i. Montrer qu'il existe un couple $(a, b) \in A \times B$ tel que

   $$\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < a \leqslant \sup(A) \quad \text{et} \quad \sup(B) - \frac{\varepsilon}{2} < b \leqslant \sup(B)$$

   ii. En déduire que $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

⋆ ⋆
⋆

CORRECTION

Outils élémentaires - v1 - 2021-2022

Exercice 1 :

1. La fonction f est constante si et seulement si

$$\boxed{\exists c \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in I,\ f(x) = c}$$

2. La fonction f admet un maximum en a si et seulement si

$$\boxed{\forall x \in I,\ f(x) \leqslant f(a)}$$

3. a et b sont des solutions de l'équation $f(x) = 0$ si et seulement si

$$\boxed{f(a) = f(b) = 0}$$

4. a et b sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$ si et seulement si

$$\boxed{f(a) = f(b) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in I,\ f(x) = 0 \ \Rightarrow\ x \in \{a, b\}}$$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2 :

1.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\overline{x} + \overline{x}^2) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\overline{x} \times \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}_{=\overline{x}} + \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\overline{x}^2}_{=n\,\overline{x}^2} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \overline{x}^2
\end{aligned}$$

2. Si les réels x_i vérifient

$$\overline{x} = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 = 1$$

d'après la formule ci-dessus, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \overline{x}^2 = 1 - 1 = 0$$

Or chacun des termes de cette somme étant positifs (car ce sont des carrés), la somme ne peut être nulle que si chacun de ces termes est nul, i.e.,

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \quad (x_i - \overline{x})^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ x_i - \overline{x} = 0 \ \Leftrightarrow\ x_i = \overline{x} = 1$$

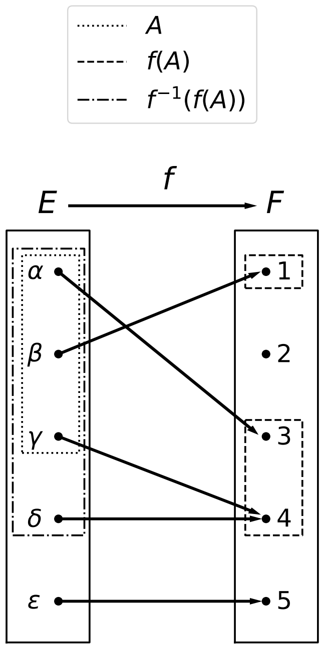
⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3 :

1. (a) $$\boxed{\forall A \subset E, \qquad f(A) \;=\; \{y \in F \;/\; \exists x \in A \;/\; y = f(x)\} \;\subset\; F}$$

   (b) $$\boxed{\forall B \subset F, \qquad f^{-1}(B) \;=\; \{x \in E \;/\; f(x) \in B\} \;\subset\; E}$$

2. (a) i. En suivant les flèches, on trouve



ii. On note que

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma\} \subset f^{-1}(f(A)) = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

mais que ces deux ensembles ne sont pas égaux.

(b) i. <u>Objectif</u> : $A \subset f^{-1}(f(A))$, i.e.

$$\forall x \in A, \quad x \in f^{-1}(f(A))$$

<u>Preuve</u> : soit $x \in A$ quelconque. Montrons que x appartient à $f^{-1}(f(A))$: par définition, l'élément $f(x)$ appartient à $f(A)$ et x appartient à l'ensemble des éléments envoyés dans $f(A)$. Autrement dit, x appartient à l'image réciproque de $f(A)$, i.e. $f^{-1}(f(A))$.

ii. <u>Hypothèse</u> : f est injective.

<u>Objectif</u> : $f^{-1}(f(A)) \subset A$, i.e.

$$\forall x \in f^{-1}(f(A)), \quad x \in A$$

<u>Preuve</u> : soit $x \in f^{-1}(f(A))$. Montrons que $x \in A$: par définition, l'élément $y = f(x)$ appartient à $f(A)$.
Il existe donc un élément $x' \in A$ tel que $y = f(x')$.

La fonction f étant en outre injective, on a

$$f(x) = f(x') \;\Rightarrow\; x = x'$$

et donc x appartient à A.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 4 :

1. (a)

$$A+B=\{0-1,0+1,0+2,1-1,1+1,1+2\}=\{-1,1,2,0,3\}$$

   (b)

$$\begin{cases} 1 \leqslant a \leqslant 2 \\ -1 < b < 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 0 < a+b < 5$$

   donc $A+B=]0,5[$.

2. (a) Le réel $\sup(A)$ étant un majorant de A, on a

$$\forall a \in A, \quad a \leqslant \sup(A)$$

   De même, on a

$$\forall b \in B, \quad b \leqslant \sup(B)$$

   Mais alors

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a+b \leqslant \sup(A)+\sup(B)$$

   Autrement dit, le réel $\sup(A)+\sup(B)$ est un majorant de l'ensemble $A+B$.

   (b) i. On note que

$$\varepsilon > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon}{2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \sup(A)-\frac{\varepsilon}{2} < \sup(A)$$

   Mais alors, $\sup(A)$ étant le plus petit des majorants de A, le réel $\sup(A)-\frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un majorant de A. Donc

$$\exists a \in A \ / \ \sup(A)-\frac{\varepsilon}{2} < a \leqslant \sup(A)$$

   De même, il existe $b \in B$ tel que

$$\sup(B)-\frac{\varepsilon}{2} < b \leqslant \sup(B)$$

   ii. D'après les résultats établis à la question précédente, il existe un élément $a+b$ de l'ensemble $A+B$ tel que

$$\sup(A)+\sup(B)-\varepsilon < a+b \leqslant \sup(A)+\sup(B)$$

   Mais alors, ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, le réel $\sup(A)+\sup(B)$ est le plus petit des majorants de $A+B$. D'où

$$\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$$