Université Toulouse 2 le Mirail
L2 MASS. Rattrapage analyse S3

Année universitaire 2006/2007

La série géométrique.

Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Rappeler rapidement le comportement de la suite (a^n) en fonction des valeurs de a.

Exercice 1 Pour un entier $p \in \mathbb{N}^*$ fixé, on note $u_n = a^n/n^p$.

1. Montrer que si $a \leqslant 1$, la suite (u_n) tend vers 0.
2. On suppose maintenant que $a > 1$.
   (a) Montrer que la suite (u_{n+1}/u_n) converge et préciser sa limite.
   (b) Soit $\delta \in]1, a[$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$\forall n \geqslant N, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \delta$$
   et en déduire
   $$\forall n \geqslant N, \quad u_n \geqslant \delta^{n-N} u_N.$$
   (c) En déduire que la suite (u_n) tend vers l'infini.

****

Exercice 2 On considère maintenant la suite (v_n) définie par
$$v_n = \frac{a^n}{n!}.$$

1. Montrer que si $a \leqslant 1$, la suite (v_n) tend vers 0.
2. On suppose maintenant que $a > 1$.
   (a) Montrer que la suite (v_{n+1}/v_n) converge vers 0.
   (b) Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
   $$n \geqslant N \Rightarrow v_n \leqslant \varepsilon^{n-N} v_N.$$
   (c) En déduire que (v_n) tend vers 0.

****

Exercice 3 On considère la série $\sum a^n$.

1. Soit (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum a^n$:
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k.$$
   Exprimer S_n en fonction de n.
2. En déduire le comportement de la série $\sum a^n$ en fonction de a.
3. Montrer que si $a < 1$, alors la série $\sum n^p a^n$ converge encore, quelque soit $p \in \mathbb{N}$.