Mathématiques pour l'ingénieur

Mise à niveau - Polycope de Rentrée - Version enseignant

Mourad ABOUZAID

ISABTP 3ème année
2020-2021

Version du 9 juillet 2020

Le *polycope de rentrée* est un "cahier de vacances" (il en existe de plus ludiques), destiné à vous aider à faire le point sur vos connaissances en mathématiques avant d'attaquer votre cursus à l'ISA BTP.

Il aborde des notions que vous avez toutes et tous déjà abordées au cours de vos études, au lycée et/ou au cours des dernières années.

D'un point de vue pratique, il s'agit d'un texte à trous, construit de telle sorte qu'à chaque fois, le contexte ainsi que vos connaissances sur le sujet doivent vous permettre de compléter le cadre dédié.

Vous trouverez également de nombreux exercices permettant de tester vos connaissances.

Il est prévu que nous nous retrouvions l'année prochaine avec, pour commencer, quelques heures de "mise à niveau" au cours desquelles nous aborderons d'autres sujets, afin que vous ayez les outils qui vous seront nécessaire au cours de votre scolarité à l'ISA BTP et dans la suite de votre carrière.

Sur les premières heures, nous prendrons également le temps de répondre à vos éventuelles questions sur les notions qui sont abordées dans le présent document. A l'issue de la semaine 0, l'ensemble de ces notions seront considérées comme acquises et bien comprises.

Dans l'attente de vous retrouver à la rentrée, je vous souhaite à toutes et tous de bons mois d'été.

Mourad ABOUZAID
Enseignant de Mathématiques
ISA BTP

Note : si nécessaire, vous trouverez une version complétée de ce document est disponible sur ma page personnelle http://mabouzai.perso.univ-pau.fr/). Il est cependant fortement conseillé de commencer par lire et compléter ce polycope avant d'éventuellement consulter la version complétée.

Table des matières

Chapitre 1

Nombres complexes

Introduction

Les nombres complexes sont une invention des mathématiciens pour contourner un problème récurrent en calcul algébrique : le carré d'un nombre réel est toujours positif.

Pour contourner ce problème, il a suffit d'inventer un nombre i tel que $i^2 = -1$.

La création d'un tel nombre permet d'envisager des carrés négatifs et permet par conséquent d'envisager la racine carrée d'un nombre négatif.

Ce qui pourrait alors passer pour une simple astuce de mathématicien s'est très vite révélé utile dans de nombreux domaines de la physique, tels que l'électricité, le traitement du signal, ...

D'un point de vue mathématique, les nombres complexes permettent une approche bien plus claire et plus simple de la notion de polynôme et apportent ainsi un nouvel éclairage à tous les domaines des mathématiques et de la physique qui font appel aux polynômes.

Enfin, les nombres complexes se sont révélés très efficaces pour traiter des problème de géométrie plane (et donc, là encore, tout problème s'y rapportant).

1.1 Le nombre i

Comme précisé en introduction, on note i le nombre tel que

$$\boxed{i^2 = -1}$$

On dit que i est une racine carrée de -1. Comme tout nombre réel, -1 admet alors deux racines carrées : i et $-i$.

1.2 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

On appelle nombre complexe tout nombre qui s'écrit sous la forme

$$\boxed{z = x + iy, \qquad x, y \in \mathbb{R}}$$

Note : si $y = 0$, $z = x$ est un nombre réel. Autrement dit, l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est inclus dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes (i.e. tout nombre réel est un nombre complexe).

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$,

- x est appelé *partie réelle* de z,
- y est appelé *partie imaginaire* de z.

On note

$$x = \mathrm{Re}(z), \qquad y = \mathrm{Im}(z)$$

Notes :

- La partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe z sont toutes les deux *réelles*.
- Parmi les nombres complexes, les nombres réels sont ceux dont la partie imaginaire est nulle.
- Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé *imaginaire pure*.

D'autre part, pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$, on appelle *module de* z la quantité

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Note : ça n'est pas un hasard si le module se note de la même façon que la valeur absolue. On note en particulier que si z est un nombre réel (i.e. si sa partie imaginaire est nulle), alors

$$|z| = \sqrt{x^2} = |x|.$$

1.3 Opérations dans $\mathbb{C}$

En notant les nombres complexes sous la forme $z = x + iy$, on a une notation permettant de faire des opérations dans les nombres complexes comme on sait le faire dans les nombres réels. Il suffit alors de remplacer i^2 par -1, ou le contraire quand cela est utile.

Ainsi, si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ sont deux nombres complexes la somme $s = z + z'$, le produit $p = z.z'$, le quotient $q = \frac{z}{z'}$ sont encore des nombres complexes. On peut de plus exprimer les parties réelles et imaginaires de s et p en fonction de x, x', y, y'.

Exercice :

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes ci-dessous :

$$\begin{array}{rclrclrcl} z_1 & = & 2 - 3i, & z_2 & = & (1+i) + (2-3i), & z_3 & = & (2-i).(3+i), \\ z_4 & = & (2+3i)^2, & z_5 & = & (2i-4)^2, & z_6 & = & (1+i).(1-i) \end{array}$$

2. Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes.
   (a) Déterminer en fonction de x, x', y, y' la partie réelle et la partie imaginaire de $z + z'$.
   (b) Déterminer en fonction de x, x', y, y' la partie réelle et la partie imaginaire de $z.z'$.
   (c) Déterminer en fonction de x, x', y, y' la partie réelle et la partie imaginaire de $\frac{z}{z'}$.

1.4 Conjugué d'un nombre complexe

1.4.1 Définition

Le conjugué d'un nombre complexe $z = x + iy$ est

$$\overline{z} = x - iy.$$

Autrement dit, $\overline{z}$ est le nombre complexe ayant la même partie réelle que z et dont la partie imaginaire est $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.

1.4.2 Conjugué et opérations

On peut montrer que si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 . z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}, \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Autrement dit, pour déterminer le conjugué d'un nombre complexe donné, il suffit de remplacer i par $-i$ dans l'écriture de z.

Exercice :

1. Vérifier les formules ci-dessus en déterminant la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes ci-dessous :

$$z_1 = (1+i) + (2-3i), \qquad z_2 = (2-i).(3+i), \qquad z_3 = (2+i).(2-i)$$

2. Démontrer les formules ci dessus en notant $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$.

D'autre part, à partir des définitions données ci dessus, on peut facilement établir les formules suivantes : pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z), \qquad z - \overline{z} = 2i.\mathrm{Im}(z), \qquad z.\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$$

On constate en particulier que si l'on ajoute ou multiplie entre eux un nombre complexe et son conjugué, on obtient un nombre réel.

La dernière formule permet en particulier de déterminer la partie réelle et la partie imaginaire d'un quotient de deux nombres complexes.

Exercice : en multipliant le numérateur et le dénominateur de chaque nombre complexe ci-dessous par le conjugué du dénominateur, déterminer leurs parties réelles et imaginaires.

$$z_1 = \frac{1+i}{1-i}, \qquad z_2 = \frac{1-2i}{1-i\sqrt{3}}$$

1.5 Représentation géométrique et notation exponentielle

Un nombre complexe z est associé à deux nombres réels x et y (sa partie réelle et sa partie imaginaire). En fixant un repère (orthonormé) $\mathcal{R} = (O\,;\ \vec{i}, \vec{j})$ dans le plan, on peut donc associer à chaque nombre complexe $z = x + iy$ le point $M(z)$ du plan de coordonnées (x, y). On obtient ainsi une représentation géométrique des nombres complexes ainsi qu'une représentation complexe des points du plan.

Note : par abus de langage, on confond souvent z et $M(z)$. On pourra ainsi parler d'un complexe z du plan.

On peut alors interpréter une partie des notions que l'on vient de voir en termes géométriques. Ainsi,

- Les nombres réels sont les points de l'axe des abscisses, appelé *axe réel*.
- Les imaginaires purs sont les points de l'axe des ordonnées.
- Le module $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ donne la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
- Le conjugué $\overline{z}$ d'un complexe z correspond, dans le plan, au symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe réel.

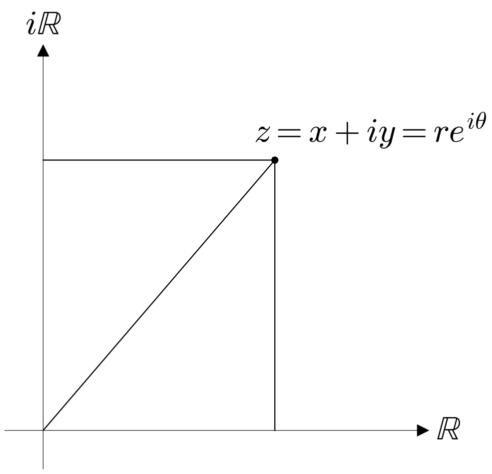
D'autre part, outre les coordonnées cartésiennes, il est possible de repérer chaque point du plan à l'aide des ses coordonnées polaires (r, θ) ; $r \geqslant 0$ donnant la distance $\overline{OM}$ et θ donnant l'angle entre (OM) et l'horizontale. On peut alors représenter un nombre complexe à l'aide de ces coordonnées via la notation suivante :

$$z = re^{i\theta}.$$

Le nombre r n'est autre que le module vu plus haut. L'angle θ est appelé *argument* de z, noté $\arg(z)$.

Exercice : représenter sur le dessin ci-dessous les quantité x, y, r, θ associées au nombre complexe

$$z = x + iy = re^{i\theta}$$



Cette écriture n'est au départ qu'une notation. Elle a cependant été adoptée car elle permet de faire du calcul.

Ainsi, à l'aide des propriétés de l'exponentielle ($e^{a+b} = e^a.e^b$), si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, on a

$$zz' = \left(re^{i\theta}\right)\left(r'e^{i\theta'}\right) = rr'e^{i(\theta+\theta')}$$

Autrement dit, pour tous nombres complexes z et z', on a

- $|z.z'| = |z|.|z'|$.
- $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$.

De même, si l'on considère un nombre complexe $z = re^{i\theta}$, le conjugué de z est, par définition géométrique, le nombre $\overline{z}$ ayant le même module de z, mais dont l'argument est $-\theta$:

$$\overline{z} = re^{-i\theta}.$$

Autrement dit, comme dans la représentation cartésienne, le conjugué d'un nombre complexe donné sous forme exponentielle est obtenu en remplaçant i par $-i$ dans l'écriture de z.

Enfin, à l'aide de la représentation géométrique, on peut relier les deux écritures (cartésienne et exponentielle) d'un même nombre complexe : si $z = x + iy = re^{i\theta}$, alors

$$\left\{\begin{array}{lcl} r & = & \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta & = & \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{array}\right. \qquad \text{et} \qquad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\cos(\theta) \\ y & = & r\sin(\theta) \end{array}\right.$$

Ainsi, dans le cas particulier des complexes de module 1, on a

$$z = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta),$$

dont on déduit facilement les <u>formules d'Euler</u> :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Note : à partir de la notion exponentielle d'un nombre complexe, on peut étendre la fonction exponientielle aux nombres complexes. Précisément, on peut donner un sens à e^z pour $z \in \mathbb{C}$: si $z = x + iy$ est un nombre complexe donné sous forme algébrique, on a

$$e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy}$$

Autrement dit, le nombre complexe e^z est le nombre complexe vérifiant

$$|e^z| = e^{\text{Re}(z)} \qquad \text{et} \qquad \arg(e^z) = \text{Im}(z)$$

1.6 Formules de trigonométrie

Via les formules d'Euler faisant le lien entre nombres complexes et fonctions trigonométriques, il est possible d'établir et de démontrer l'ensemble des propriétés des fonctions trigonométirques ainsi que l'ensemble des formules de trigonométrie.

1.6.1 Propriétés

À l'aide des formules d'Euler, montrer les propriétés suivantes :

1. La fonction sinus est impaire, la fonction cosinus est paire.
2. Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) \qquad \cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta) \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$$

1.6.2 Linéarisation

L'une des applications courantes des formules d'Euler est également la linéarisation des fonctions trigonométriques, consistant à transformer des puissances de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$ en sinus et cosinus appliqués à des multiples de θ. Cette linéairisation trouve en particulier de nombreuses applications dans le calcul intégral.

Ainsi,

1. Exprimer $\sin^2(\theta)$ et $\cos^2(\theta)$ en fonction de $\sin(2\theta)$ et $\cos(2\theta)$.
2. Exprimer $\sin^3(\theta)$ et $\cos^3(\theta)$ en fonction de $\sin(3\theta),\ \cos(3\theta),\ \sin(\theta),\ \cos(\theta)$.

1.6.3 Formules de trigonométrie

Enfin, à l'aide des formules d'Euler, on peut également démontrer l'ensemble des formules de trigonométrie. Compléter les formules ci-dessous :

- $\cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos(2a)$
- $2\sin(a)\cos(a) = \sin(2a)$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(b)\cos(a)$

1.7 Exercices

Exercice 1 Écrire sous forme algébrique, puis déterminer les conjugués et les modules des nombres complexes suivants :

$$z = (1-2i)^3, \qquad z = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}, \qquad z = \frac{5+i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 L'objectif de cet exercice est de montrer l'inégalité triangulaire :

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

1. Montrer que pour tout $Z \in \mathbb{C}$, on a :

   $$|\mathrm{Re}(Z)| \leqslant |Z|$$

   puis que

   $$\mathrm{Re}(Z) \leqslant |Z|.$$

   ($\mathrm{Re}(Z)$ désigne ici la partie réelle de Z)
2. Montrer que :

   $$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| + 2\mathrm{Re}(z_1.z_2).$$
3. En déduire que :

   $$|z_1 + z_2|^2 \leqslant (|z_1| + |z_2|)^2$$

   et conclure.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3
1. Déterminer l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

   $$z = 1 + i, \qquad z = 1 + i\sqrt{3}, \qquad z = \sqrt{3} + i, \qquad z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$$

   $$z = 3 + 3i, \qquad z = -1 - i\sqrt{3}, \qquad z = -\frac{4}{3}i, \qquad z = -2$$
2. Déterminer l'écriture cartésienne des nombres complexes suivants :

   $$z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, \qquad z = 3e^{-i\frac{\pi}{8}}, \qquad z = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3, \qquad z = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$
3. Calculer

   $$z = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $z = e^{i\theta}$.
1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z^2 en fonction de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.
2. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z^2 en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
3. Par identification, retrouver les formules trigonométriques portant sur $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 5 1. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexes tels que

$$|z-1|=1$$

2. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ du plan complexes tels que

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right|=1$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 6 Pour tout $z=x+iy\in\mathbb{C}$, on note

$$s(z)=(1-z)(1-iz).$$

1. Exprimer les parties réelle et imaginaire de $s(z)$ en fonction de x et y.
2. En déduire l'ensemble des nombres complexes z tel que $s(z)$ soit réel (on représentera cet ensemble par une partie du plan).
3. En déduire l'ensemble des nombres complexes z tel que $s(z)$ soit imaginaire pur (on représentera cet ensemble par une partie du plan).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 7 Soit $z=e^{i\frac{\pi}{4}}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note M_n le point du plan complexe d'affixe z^n.

1. (a) Placer dans le plan complexe les points M_0 à M_7.
   (b) Que dire des points M_8, M_9, M_{10} ?
   (c) Que dire d'un point M_n quelconque ?
2. Montrer que la distance entre deux points M_n et M_{n+1} est constante.
3. Que dire du polygone $(M_0M_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7)$?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 8 1. Soit

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$$

(a) Montrer que la fonction f est 2π-périodique, i.e.

$$\boxed{\forall t\in\mathbb{R},\qquad f(t+2\pi)=f(t)}$$

(b) Donner une description géométrique de l'ensemble

$$f(\mathbb{R})=\{z\in\mathbb{C}\ /\ \exists t\in\mathbb{R}\ /\ z=f(t)\}$$

2. Décrire les images des fonctions suivantes :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & te^{it} \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{t}e^{it} \end{array}$$

$$k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \cos(t)e^{it} \end{array} \qquad \ell : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & (2+\cos(t))e^{it} \end{array}$$

⋆ ⋆
⋆

Chapitre 2

Calcul matriciel

Introduction

La notion de système linéaire est présente dans de nombreuses théories mathématiques ainsi que dans de nombreuses méthodes de modélisation.

L'objectif de ce chapitre est de présenter la théorie mise en place pour l'étude de ces systèmes, ainsi que les grands principes de résolution.

L'ensemble de ces résultat est principalement basé sur le caractère linéaire des équations étudiées et sa traduction en termes de calcul matriciel. Avant de présenter en détails les méthodes de résolutions, nous présenterons dans un premier temps les matrices et les outils de calcul matriciel. Nous verrons ensuite comment investir des nouvelles notions dans la mise en place d'outils permettant l'étude théorique et la résolution systématique des systèmes linéaires.

2.1 Matrices

2.1.1 Définitions

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients réels est la donnée de $n \times p$ nombres réels, appelés termes ou coefficients rangés dans un tableau rectangulaire à n lignes et p colonnes.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels. On peut également envisager des matrices contenant d'autres types de nombres ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, etc).

- Si $n = 1$, on parle de ... *matrice ligne* ou *vecteur ligne* à p colonnes.
- Si $p = 1$, on parle de ... *matrice colonne* ou *vecteur colonne* à n lignes.
- Si $n = p$, on parle de ... *matrice carrée*. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

Notes :

- Les vecteurs à deux ou trois coordonnées permettent en particulier de représenter des vecteurs et des positions du plan ou de l'espace. Cette représentation permet de très nombreuses du calcul matriciel en géométrie (et permet également une généralisation des concepts géométriques aux dimensions supérieures).
- Si $n = p = 1$, on a simplement affaire à des nombres (on parle de matrice scalaire).

2.1.2 Indexation

Dans une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, le coefficient situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne ($1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant p$) sera noté a_{ij} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Exemple : toute matrice de $A \in \mathcal{M}_{24}(\mathbb{R})$ se note

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$$

2.1.3 Matrices particulières (carrées)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Dans l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on distingue certaines matrices et certains types de matrices particulières :

- La matrice *identité* (ou matrice *unité*)

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les coefficients δ_{ij} de la matrice identité vérifient donc

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

- Une matrice carrée est dite *triangulaires supérieure* (resp. *triangulaire inférieure*) si elle est de la forme

$$T_1 = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \qquad \text{resp. } T_2 = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * & * \end{pmatrix}$$

Ainsi, $T = (t_{ij})$ est triangulaire supérieure (resp. triangulaire inférieure) si et seulement si

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \qquad i > j \;\Rightarrow\; t_{ij} = 0 \qquad (\text{resp. } i < j \;\Rightarrow\; t_{ij} = 0\ )$$

- Une matrice carrée est dite *diagonale* si elle est de la forme

$$D = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

une, Ainsi matrice $D = (d_{ij})$ est diagonale si et seulement si

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \qquad i \neq j \;\Rightarrow\; d_{ij} = 0$$

Note : les matrices triangulaires et diagonales sont définies “en creux” :
- Une matrice carrée est triangulaire supérieurs (resp. inférieure) si tous les termes situés *sous la diagonale* (resp. *au dessus de la diagonale*) sont nuls.
- Une matrice carrée est diagonale si ses termes *non diagonaux* sont tous nuls.

2.1.4 Opérations matricielles

Outre la possibilité de stocker un ensemble de valeurs, il est également possible de définir des opérations sur l’ensemble des matrices. À l’aide de ces opérations, il devient alors possible d’étendre les notions de calculs et d’équations à l’ensemble des matrices.

Opérations linéaires

Étant données deux matrices de même taille $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice $A + B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

(on dit que l'addition se fait *terme à terme*).

Étant intimement liée à l'addition des nombres réels, l'addition des matrices hérite des propriétés principale de cette addition des réels. Ainsi

- L'addition des matrices est associative :
$$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad (A+B)+C = A+(B+C)$$
- L'addition des matrices est commutative :
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad A+B = B+A$$
- La matrice nulle : en notant $\mathbb{O}_{n,p}$ la matrice nulle de taille $n.p$ (i.e. la matrice à n lignes et p colonnes dont tous les coefficients sont nuls), on a
$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \qquad A + \mathbb{O}_{n,p} = A$$
- Matrice opposée : toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ admet une matrice opposée : la matrice $-A = (-a_{ij})$.

Il est également possible de définir une multiplication extérieure sur l'ensemble des matrices, i.e. une multiplication par un réel. Ainsi, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice $\lambda.A$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par

$$\lambda.A = (\lambda.a_{ij})$$

Ce produit extérieur est alors distributif sur l'addition des matrices et compatible avec la multiplication des réels. Autrement dit,

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda.(A+B) = \lambda.A + \lambda.B$$

et

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad \lambda.(\mu.A) = (\lambda\mu).A = \mu.(\lambda.A)$$

Multiplication des matrices

Il est également possible de définir une multiplication sur l'ensemble des matrices. Précisément, soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Le produit $A \times B$ est la matrice $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \forall j \in \{1, \ldots, q\}, \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

Notons en particulier que, contrairement au deux opérations précédentes, le produit de matrices ne se fait pas terme à terme. D'autre part, il n'est pas toujours possible de multiplier entre elles deux matrices quelconques. Pour que le produit $A \times B$ existe, il faut en particulier que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B. Le produit $A \times B$ a alors autant de lignes que A et autant de colonnes que B. On peut résumer le produit de matrice par le schéma suivant (multiplication d'une ligne de A par une colonne de B) :

$$\begin{array}{cc} & B = \begin{pmatrix} & & & b_{1j} & \\ & & & b_{2j} & \\ & & & \vdots & \\ & & & b_{pj} & \end{pmatrix} \\ A = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ & & & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & & & \vdots & \\ & & & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & c_{ij} & \\ & & & & \end{pmatrix} = A \times B \end{array}$$

Ainsi, même si le produit $A \times B$ existe, il n'est pas dit que le produit $B \times A$ existe. Et même dans le cas où les deux produits AB et BA existent, les matrices obtenues ne sont pas toujours de la même taille. Seul cas particulier : le cas des matrices carrées. Précisément, si A et B sont deux matrices carrées à n lignes, les produits $A \times B$ et $B \times A$ existent toujours et produisent encore des matrices carrées à n lignes. Cependant, même dans ce cas, on a en général $A \times B \neq B \times A$ (i.e. le produit de matrices n'est pas commutatif).

Hormis le défaut de commutativité, la multiplication des matrices possèdes tout de même quelques propriétés : soient A, B et C trois matrices telles que toutes les opérations envisagées soient possibles.

- *Associativité* : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.
- *Distributivité* : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$.
- *Commutativité avec la multiplication extérieure* : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(\lambda.A) \times B = A \times (\lambda.B) = \lambda.(A \times B)$.
- *Matrice unité* : pour toute matrice A à n colonnes, on a $A \times I_n = A$ et pour toute matrice B à n lignes, on a $I_n \times B = B$.

Transposée

Étant donnée une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on appelle *transposée* de A la matrice notée ${}^tA$, appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, dont les lignes sont les colonnes de A (et dont les colonnes sont alors les lignes de A). Ainsi, si $A = (a_{ij})$, alors ${}^tA = (a_{ji})$.

Exemples :

- Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Notons que dans le cas d'une matrice carrée, la transposée est obtenue par symétrie par rapport à sa diagonale.

Enfin, on appelle *matrice symétrique* toute matrice A vérifiant ${}^tA = A$. Ainsi, une matrice symétrique est nécessairement carrée et est symétrique par rapport à sa diagonale.

Exemple : la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique 3×3.

On peut montrer que ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$ (à faire) et que ${}^t(A \times B) = {}^tB \times {}^tA \neq {}^tA \times {}^tB$ (plus dur).

Trace

La *trace* d'une matrice carrée A est le nombre réel obtenu en sommant ses termes diagonaux : si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

On verra que la trace est une caractéristique importante de toute matrice carrée. On peut en particulier montrer que pour toutes matrices A et B carrées de même taille, on a

$$\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$

On peut également montrer que, même si $A \times B \neq B \times A$, on a $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

2.1.5 Matrices inversibles

Définition (Matrice inversible)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite inversible s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \times B = I_n$. La matrice B ainsi définie est appelée *inverse de* A et est notée A^{-1}.

On peut montrer que si l'inverse d'une matrice A existe, alors elle est unique. De plus, si $A \times B = I_n$, on peut montrer qu'alors $B \times A = I_n$.

Par ailleurs, on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles à n lignes. On peut alors montrer que si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $(A^{-1})^{-1} = A$.

De même, on peut montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $A \times B$ est encore dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1} \neq A^{-1} \times B^{-1}$.

Décider du caractère inversible d'une matrice donnée et calculer son inverse le cas échéant font partie des problèmes les plus complexes à traiter, même à l'aide d'un ordinateur.

En effet, même si la théorie donne des outils de décision ainsi que des méthodes théoriques pour le calcul d'inverse, aucune de ces méthodes n'est réellement efficace lorsque la taille de la matrice étudiée augmente.

2.2 Déterminants

Le déterminant d'une matrice carrée est un nombre, calculé à partir des coefficients de la matrice en question est permettant de mettre en évidence un certain nombre de propriétés de la matrice étudiée. Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\det(A)$ ou $|A|$ son déterminant. Sous forme étendue, si $A = (a_{ij})$, on note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

L'une des principales application du déterminant est lié à l'inversibilité d'une matrice donnée. Précisément, on peut montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ (i.e. } A \text{ est inversible)} \iff \det(A) \neq 0$$

Enfin, la notion de déterminant trouve également des applications en géométrie via la notion de déterminant d'une famille de vecteurs.

Nous verrons également dans la section suivante que la notion de déterminant permet de mettre en place des propriétés théoriques importantes dans le domaine des systèmes d'équations linéaires.

2.2.1 Calcul d'un déterminant

Étant donnée une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$$

où S_n représente l'ensemble des permutations possibles de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. Cette représentation permet de mettre en évidence certaines propriétés du déterminant, mais ne permet pas en pratique de calculer celui ci, notamment du fait du nombre important $(n!)$ de termes à calculer.

En pratique, le calcul d'un déterminant se fait par "récurrence".

Précisément, pour $n = 2$, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors

$$\boxed{\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc}$$

On constate ici que

$$\det(A) = 0 \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Autrement dit, les matrices 2×2 inversibles sont celles dont les lignes (et donc les colonnes) ne sont pas proportionnelles.

Pour $n = 3$, la formule générale produit la formule de Sarrus :

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei + dhc + gbf) - (gec + ahf + dbi)}$$

Cependant, on verra que, même en dimension 3, cette méthode possède un certain nombre d'inconvénients majeurs qui la rend peut exploitée en pratique, au profit d'une méthode plus générale, basée sur le *développement par rapport à une ligne ou une colonne*.

Ainsi, soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On commence par placer dans A un damier de signes :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} {}^{+}a & {}^{-}b & {}^{+}c \\ {}^{-}d & {}^{+}e & {}^{-}f \\ {}^{+}g & {}^{-}h & {}^{+}i \end{vmatrix}$$

On peut alors choisir de développer par rapport à la première colonne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} {}^{+}a \\ {}^{-}d \\ {}^{+}g \end{matrix}} & \begin{matrix} b \\ e \\ h \end{matrix} & \begin{matrix} c \\ f \\ i \end{matrix} \end{vmatrix}$$

via la formule suivante :

$$\begin{aligned} \det(A) &= + \left|\begin{array}{c||cc} a & b & c \\ \hline d & e & f \\ g & h & i \end{array}\right| - \left|\begin{array}{c||cc} a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & i \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c||cc} a & b & c \\ d & e & f \\ \hline g & h & i \end{array}\right| \\ &= +a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \end{aligned}$$

En développant les déterminants 2×2, on retrouve les termes de la formule de Sarrus.

On peut également choisir de développer par rapport à la deuxième ligne :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \boxed{{}^{-}d \quad {}^{+}e \quad {}^{-}f} \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= - \left|\begin{array}{c|cc} a & b & c \\ \hline\hline d & e & f \\ \hline\hline g & h & i \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c|c|c} a & b & c \\ \hline\hline d & e & f \\ \hline\hline g & h & i \end{array}\right| - \left|\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ \hline\hline d & e & f \\ \hline\hline g & h & i \end{array}\right| \\ &= -d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} - f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Là encore, en développant les déterminants 2×2 obtenus, on retrouve les termes de la formule de Sarrus.

De façon générale, il est possible de développer n'importe quel déterminant $n \times n$ par rapport à l'une de ses lignes ou l'une de ses colonnes. Théoriquement, par itérations successives, on peut alors réduire n'importe quel déterminant à une somme de déterminants 2×2. On verra qu'en pratique, le procédé peut vite être fastidieux et qu'il existe des manipulations possible "préparant" le développement d'un déterminant.

Note : le développement par rapport à une ligne ou une colonne permet de mettre en évidence certaines propriétés portant sur des matrices particulières. Ainsi,

- Si A contient une ligne ou une colonne de 0, alors $\det(A) = 0$ (et A n'est alors pas inversible).
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est donné par le produit de ses termes diagonaux (à démontrer). C'est en particulier le cas des matrices diagonales.
- Une matrice triangulaire T est inversible si et seulement si aucun de ses termes diagonaux n'est nul.

2.2.2 Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

Soit A une matrice carrée à n lignes. On appelles opérations élémentaires sur les lignes $L_1, \ldots,\ L_n$ (resp. les colonnes $C_1, \ldots,\ C_n$) de $\det(A)$ les trois opérations suivantes :

- *Combinaison de lignes (resp. colonne)* :

$$L_i \longleftarrow L_i + \alpha.L_j \quad (\text{resp. } C_i \longleftarrow C_i + \alpha.C_j) \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad i \neq j$$

- *Permutation de lignes (resp. colonne)* :

$$L_i \longleftrightarrow L_j \quad (\text{resp. } C_i \longleftrightarrow C_j) \qquad i \neq j$$

- *Multiplication d'une ligne (resp. colonne)* :

$$L_i \longleftarrow \lambda.L_i \quad (\text{resp. } C_i \longleftarrow \lambda.C_i) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

On peut montrer que ces opérations élémentaires ne modifient que peu, voire pas du tout le déterminant auquel elles sont appliquées. Précisément,

- Une combinaison de lignes ou de colonnes ne modifie pas le déterminant auquel on l'applique.
- Une permutation de lignes ou de colonnes change le signe du déterminant auquel on l'applique.
- Une multiplication de ligne ou de colonne par un coefficient $\lambda \in \mathbb{R}$ multiple par λ le déterminant auquel on l'applique.

2.2.3 Réduction d'un déterminant

Lors du calcul explicite d'un déterminant $\det(A)$, ces opérations élémentaires permettent alors de transformer $\det(A)$ avant d'appliquer un éventuel développement.

Ainsi, les combinaisons (et permutations) de lignes et colonnes permettent de placer des zéros dans $\det(A)$, qui simplifient le développement.

Exemple : Soit $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

1. À l'aide de la ligne L_1, annuler les coefficients 2 et -2 de la colonne C_1.
2. Calculer $\det(A)$ en développant par rapport à sa première colonne le déterminant obtenu à la question précédente.

Note : d'un point de vue théorique, l'invariance du déterminant par combinaisons de lignes ou de colonnes permet de montrer que si une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ contient deux lignes égales ou proportionnelles, alors son déterminant est nul (et la matrice A n'est pas inversible). De façon générale, si l'une des lignes (ou l'une des colonnes) de A peut s'exprimer sous la forme d'une combinaison linéaire des autres, alors son déterminant est nul et la matrice A n'est pas inversible.

Enfin, on peut montrer que le déterminant est une application *multiplicative*, i.e.

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \qquad \det(A \times B) = \det(A) \times \det(B)$$

Cette propriété fondamentale permet en particulier de démontrer certains résultats importants concernant les matrices carrées :

Soient A et B deux matrices carrées de même taille.

1. Même si $A \times B \neq B \times A$, on a $\det(B \times A) = \det(A \times B)$.
2. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.
3. A et B sont inversibles si et seulement si $A \times B$ est inversible.

2.2.4 Factorisation d'un déterminant

La multiplication d'une ligne ou d'une colonne par un coefficient peut se traduire de la façon suivante :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \lambda.a_{i1} & \cdots & \lambda.a_{ij} & \cdots & \lambda.a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda. \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \lambda.a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & \lambda.a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \lambda.a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

La mise en facteur d'un peut alors permettre de rendre plus efficace l'utilisation des combinaisons dans la réduction du déterminant à calculer.

2.3 Exercices

2.3.1 Opérations matricielles

Exercice 9 Pour chacune des matrices A et B ci-dessous :

- Indiquer les ensembles auxquelles appartiennent A et B.
- Calculer quand cela est possible $A \times B$, $B \times A$, A^2 et B^2. On précisera à chaque fois la taille du résultat obtenu.
- Faire un maximum de commentaires pertinents sur les résultats obtenus.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 10

1. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -11 & 9 \end{pmatrix}$$

Résoudre l'équation $A + 3X = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer les deux matrices X et Y de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant

$$X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 11 1. Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall i \in \{1,2,3\},\ j \in \{1,2\}, \qquad a_{ij} = i + j - 2$$

Donner A puis ${}^tA$ sous forme explicite.

2. Soit $B = (b_{ij})$ la matrice de $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall i \in \{1,2\},\ j \in \{1,2,3,4\}, \qquad b_{ij} = i - j$$

Donner B puis ${}^tB$ sous forme explicite.

3. Calculer ${}^t(A.B)$ puis ${}^tB.{}^tA$ et commenter.
4. Calculer ${}^tA.{}^tB$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 12 1. Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer : M^2 et M^3.

2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -6 & 7 & -4 \\ -5 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer la matrice A^2.
(b) Calculer la matrice A^3
(c) Donner sans calcul les matrices : A^4 , A^5 et A^6.
(d) Calculer la matrice A^{275}.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 13 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A.B = B.A$. Montrer par récurrence que

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k}.B^k$$

2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = 2I_3 + N$.
(b) Calculer N^2 puis N^3.
(c) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 14 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $(A + I_3)^3$.
2. Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 15 Soit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$.
2. Montrer que A est inversible et donner A^{-1}.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 2}$.
   (a) Déterminer le reste $R_n(X)$ de la division euclidienne du polynôme X^n par $X^2 - 3X + 2$.
   (b) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 16 Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2$.
2. À quelle condition la matrice A est-elle inversible ? En déduire A^{-1} dans ce cas.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 17 Soient

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{pmatrix}$$

et

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer $H.C$ et commenter.

(b) Calculer $L.H$ et commenter.

2. (a) Calculer $E.C$ et commenter.
   (b) Calculer $L.E$ et commenter.

3. (a) Calculer $P.C$ et commenter.
   (b) Calculer $L.P$ et commenter.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

2.3.2 Déterminants

Exercice 18 1. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer $\det(A)$, $\det(B)$ et $\det(AB)$. Commenter et donner une formule générale.

2. On appelle matrice *nilpotente* toute matrice M carrée non nulle pour laquelle il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$.
   Montrer que si M est nilpotente, alors $\det(M) = 0$.
3. (a) Montrer que si M est une matrice inversible, alors $\det(M^{-1}) = \dfrac{1}{\det(M)}$.
   (b) Montrer que chacune des matrices A_i ci-dessous est inversible et donner $\det(A_i^{-1})$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Note : pour la matrice A_3, on pourra commencer par effectuer des opérations du type $L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j$ pour placer un maximum de 0 dans la deuxième colonne.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 19 Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det(A)$, $\det(B)$ et $\det(A + B)$. Commenter.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Calculer $\det(\lambda.A)$ et $\lambda.\det(A)$. Commenter.
   (b) Donner une formule générale pour $\det(\lambda.A)$ en fonction de $\det(A)$ pour toute matrice carrée A à n lignes.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 20
1. Montrer que toute matrice carrée ayant une ligne de 0 est non inversible.
2. Montrer que toute matrice carrée ayant deux lignes identiques est non inversible.
3. Soient $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ des nombres réels et
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 2d & 2e & 2f \\ g-a & h-b & i-c \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$$
Exprimer $\det(B)$ en fonction de $\det(A)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 21 Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on note
$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} \\ a & 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \\ a^2 & a & 0 & \frac{1}{a} \\ a^3 & a^2 & a & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det(M_1)$.
2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, $\det(M_a) = \det(M_1)$.
3. Généraliser à l'ordre n.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 22 Calculer le déterminant de la matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans les cas ci-dessous. On pourra commencer chaque étude par l'étude des cas $n = 2,\ 3,\ 4$.

1. $\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad m_{i,j} = \min\{i, j\}$.

2. $\forall i \in [\![1, n]\!], \quad m_{i,i} = \alpha, \quad m_{i,n-i-1} = \beta$ et tous les autres coefficients sont nuls.
Note : on supposera ici que n est <u>pair</u>.

3. $\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad m_{i,j} = |i - j|$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 23 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note D_n le déterminant
$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

1. Calculer D_1, D_2, D_3.
2. En développant D_n par rapport à sa deuxième ligne, montrer que $D_n = D_{n-1} - 1$
3. En déduire D_n en fonction de n.

Chapitre 3

Étude d'une fonction réelle

Introduction

Une fonction f d'une variable réelle est un procédé qui à chaque valeur x appartenant à une partie D de $\mathbb{R}$ associe une valeur réelle $f(x)$.

La notion de fonction sert ainsi de base à la modélisation de tout problème portant sur une quantité numérique variant en fonction d'un paramètre également numérique.

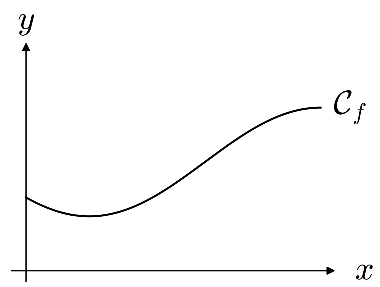
L'analyse numérique et le calcul différentiel donnent des outils mathématiques permettant de déterminer précisément l'évolution de la quantité $f(x)$ en fonction des variations de x ; ces outils étant basés sur les notions de limite et de dérivée.

3.1 Représentation graphique

Définition (graphe d'une fonction)
Soit f une fonction réelle définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$. On appelle *graphe de f* dans un repère $\mathcal{R} = (xOy)$ du plan l'ensemble

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)),\ x \in \mathbb{R}^2\}$$

Si le domaine D est connexe (i.e. d'un seul tenant) et si la fonction f est *continue*, le graphe de f forme une courbe du plan "au dessus" du domaine D, appelée *courbe représentative de f dans $\mathcal{R}$* (ou courbe de f) :



L'équation de cette courbe dans le repère $\mathcal{R} = (xOy)$ est alors

$$y = f(x)$$

Chaque étape de l'étude d'une fonction réelle peut alors s'interpréter d'un point de vue géométrique par des propriétés particulière de la courbe de f (valeurs particulières, position verticale, horizontale, forme, etc).

Exemples :

1. La valeur $f(0)$ donne l'ordonnée du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des ordonnées.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ permet de déterminer l'ensemble des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

3. La notion de limite permet de comprendre le comportement de f aux bords du domaine de définition.

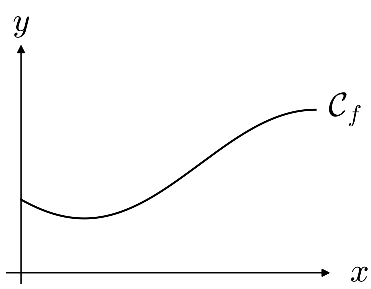
3.2 Dérivée d'une fonction réelle

3.2.1 Dérivée en un point

L'un des points fondamentaux de l'étude d'une fonction réelle f (et du phénomène modélisé) porte sur l'étude de ses *variations* : comment évolue la quantité $f(x)$ quand x bouge ?

Définition (Taux de variation) :
Soit f une fonction réelle et x_1 et x_2 deux points distincts de son domaine de définition. On appelle *taux de variation de f entre x_1 et x_2* le quotient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$



On peut alors étudier les variations de f *au voisinage* d'un point x_0 de son domaine en considérant de "petite" variations h. Ainsi, le taux de variation de f entre x_0 et $x_0 + h$ est

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0, x_0 + h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

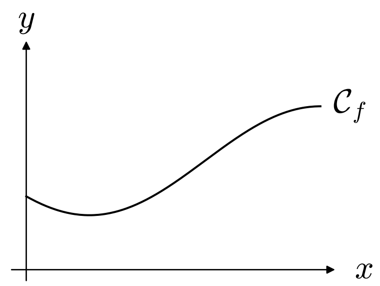
D'un point de vue théorique, on obtient alors une variation instantanée de f en x_0 en ramenant la variation Δx à 0.

Définition :
On appelle *dérivée de f en x_0* la limite

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{3.1}$$

si celle-ci est un nombre réel fini.

Géométriquement, cette limite donne le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $(x_0, f(x_0))$:



L'équation de cette tangente est alors :

$$T_{x_0} \ : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Au voisinage de x_0, cette tangente est alors une bonne approximation de la courbe de f. La fonction

$$\delta_f \ : \ x \longmapsto f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

permet alors de calculer de "bonnes" valeurs approchées des quantités $f(x)$ pour x au voisinage de x_0. Une étude poussée des dérivées permet en outre de préciser la qualité de ces approximations et de poser un cadre théorique à cette notion d'approximation.

En pratique, l'une des première informations issue du lien existant entre la courbe de f et sa tangente en x_0 est son sens de variation instantané :

- Si $f'(x_0) > 0$, alors f est strictement croissante en x_0.
- Si $f'(x_0) < 0$, alors f est strictement décroissante en x_0.
- Si $f'(x_0) = 0$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en x_0.

Dans le dernier cas, la fonction f "marque un palier" en x_0. C'est en particulier une caractéristique des extrema locaux de la fonction f.

Note : si la limite définissant la dérivée n'existe pas ou si elle est infinie, la fonction *n'est pas dérivable en* x_0. Il est cependant possible d'interpréter une éventuelle limite infinie en termes de tangente verticale.

3.2.2 Fonction dérivée et dérivées successives

Si une fonction f admet un nombre dérivé $f(x)$ pour tout x de son domaine, on peut alors définir sur D *la fonction dérivée de* f :

$$\begin{array}{cccccc} f' & : & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

L'étude de cette fonction sur D permet alors de déterminer les variations de f sur D. Par exemple,

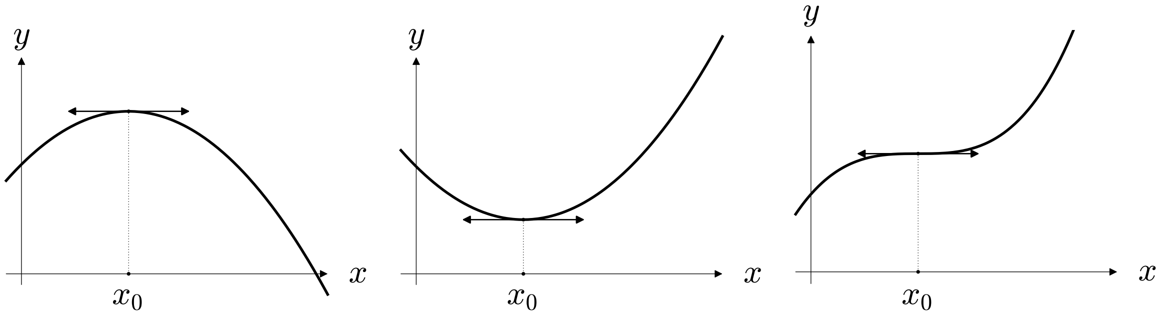
Si la fonction f' est de signe constant sur D, alors la fonction f est monotone sur D.

Par ailleurs, si cette fonction admet à son tour des nombres dérivés en chaque point de D, on peut construire *la fonction dérivée seconde de* f, notée f''.

L'étude de cette fonction f'' permet de préciser les variations de la fonction f et précise la forme de la courbe de f.

Notons en particulier que localement, si le nombre $f''(x_0)$ existe, sa valeur donne de l'information sur les variations de la fonction f' en x_0 et donc sur la *concavité* de la courbe de f au point d'abscisse x_0.

Exemple : considérons les fonctions f représentées ci-dessous, vérifiant $f'(x_0) = 0$. Que dire du signe de $f''(x_0)$ dans chacun des cas ci-dessous ?



$f''(x_0) \leqslant 0$ $\qquad$ $f''(x_0) \geqslant 0$ $\qquad$ $f''(x_0) = 0$

3.2.3 Dérivées des fonctions usuelles

La plupart des fonctions utilisées s'expriment à partir des fonctions usuelles. Cela permet en particulier de calculer la fonction dérivée d'une fonction donnée à partir des fonctions dérivées des fonctions usuelles qui la constituent. Pour dériver une fonction, il suffit donc de connaître les dérivées des fonctions usuelles ainsi que le comportement de la notion de dérivée face aux différentes opérations que l'on peut faire sur les fonctions : somme, produit, quotient, composition.

Exercice : compléter les tableaux "Dérivées des fonctions usuelles", "Opérations et dérivées" et "Exemples" données en fin de section.

3.2.4 Exercices

Exercice 24
1. Montrer à l'aide de la définition que la dérivée de la fonction
$$f \,:\, x \longmapsto x^2$$
est nulle en 0.
2. Montrer qu'en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ quelconque, la dérivé de f est $f'(x_0) = 2x_0$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 25 Montrer que la fonction $[x \mapsto \sqrt{x}]$ n'est pas dérivable en 0.
Comment interpréter géométriquement la limite obtenue ?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 26 Soit $f(x) = e^{-x^2}$.
1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer le point de $\mathcal{C}_f$ admettant une tangente horizontale.

3. Montrer que c'est un maximum.
4. Calculer $f''(x)$.
5. Déterminer les points de la courbe de f' admettant une tangente horizontale. Que dire ce la courbe $\mathcal{C}_f$ en ces points ?
6. Tracer la courbe de f en faisant apparaître l'ensemble des points remarquables mis en évidence dans les questions précédentes.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 27 Calculer les dérivées des fonctions ci-dessous. On précisera les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de chacune des fonctions.

a) $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}$ *b)* $f : x \mapsto \ln x + \sqrt{1+x^2}$ *c)* $f : x \mapsto \dfrac{\arctan(x)}{x^2+1}$

d) $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{(\cos(x)+2)^4}$ *e)* $f : x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$ *f)* $f : x \mapsto \dfrac{x^a}{a^x}$ $(a > 0)$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 28 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 29 Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) - x^2 \end{array}$$

1. Étudier la parité de f.
2. On étudie f sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$.
   (a) Montrer que f est dérivable sur I et calculer $f'(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.
   (b) Montrer que f' est dérivable sur I et calculer $f''(x)$ pour tout $x \geqslant 0$.
   (c) Étudier le signe de $f''(x)$ pour tout $x \in I$.
   (d) En déduire les variations de f' et dresser son tableau de variation (on ne calculera pas les limites de f' aux bord de son domaine).
   (e) Calculer $f'(0)$ et en déduire le signe de f' sur I.
   (f) En déduire le tableau de variation de f sur I.
3. Tracer une esquisse du graphe $\mathcal{G}_f$ sur $\mathbb{R}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 30 Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

1. Montrer que $f(x)$ existe pour tout $x \geqslant 0$.
2. Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \neq 1$.
4. En déduire une autre expression de $f(x)$ sur $[0, 1]$ puis sur $]1, +\infty[$.

Dérivées des fonctions usuelles

Fonctions	Dérivées	Domaine
Cstes		
x		
x^α		
e^x		
$\ln(x)$		
$\sin(x)$		
$\cos(x)$		
$\tan(x)$		
$\arcsin(x)$		
$\arccos(x)$		
$\arctan(x)$		

Opérations et dérivées

Opérations	Dérivées
$a.u(x) + b.v(x),\ \ a, b \in \mathbb{R}$	
$u(x).v(x)$	
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	
$u \circ v(x)$	

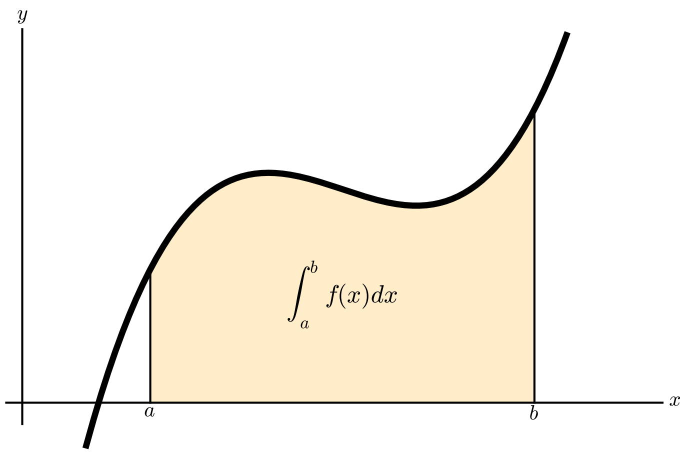
Exemples

Fonctions	Dérivées	Fonctions	Dérivées
x^2		$f(ax),\ \ a \in \mathbb{R}$	
$\dfrac{1}{x}$		$e^{u(x)}$	
$\sqrt{x}$		$\ln(u(x))$	
$ax + b,\ \ a, b \in \mathbb{R}$			

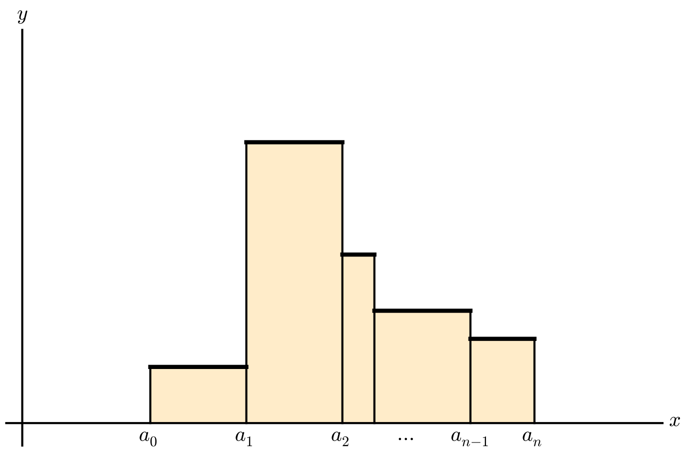
3.3 Calcul intégral

3.3.1 Définitions

Soit f une fonction continue par morceaux, définie sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On appelle *intégrale de f sur* $[a, b]$ l'aire délimitée par la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une part, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ d'autre part :



Dans le cas d'une fonction en escaliers, la surface sous la courbe est un assemblage de rectangles. Le calcul d'aire est donc immédiat :

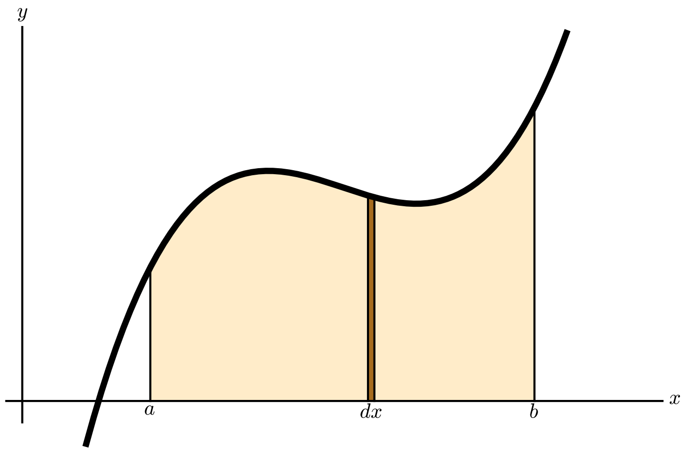


C'est une somme (finie) :

$$\boxed{\mathcal{A} = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) f(a_i).}$$

Dans le cas général, il faut faire appel aux différentielles. Ainsi, si dx représente un petit décalage des x, on peut approximer la surface sous la courbe contenue entre x et

$x + dx$ comme le rectangle de hauteur $f(x)$ et de largeur dx. L'aire sous la courbe est alors la somme des aires de tous ces rectangles :



On note alors :

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx.$$

Note : l'aire ainsi calculée est une aire *algébrique*. C'est-à-dire que les parties de la surface qui sont au dessus de l'axe horizontal sont comptées positives et les parties situées sous l'axe horizontal sont comptées négatives.

Par ailleurs, le théorème ci-dessous (théorème fondamental de l'analyse) fait le lien entre intégration et dérivation. Précisément, soit f une fonction continue définie sur un intervalle I. On appelle *primitive de* f sur l'intervalle I une fonction F dérivable telle que

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

On a alors un lien fort entre primitive et intégrale :

Théorème (Théorème fondamental de l'analyse)
Soient f une fonction continue, définie sur un intervalle I et $a \in I$. La fonction

$$\begin{array}{rcccl} F & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}$$

est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
D'autre part, pour n'importe quelle primitive G de f, on a

$$\forall x \in I, \quad \int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a).$$

3.3.2 Calcul pratique

Le théorème ci-dessus donne la principale méthode de calcul pratique d'une intégrale donnée : déterminer une primitive de la fonction que l'on souhaite intégrer. Cependant, il existe certaines manipulations possibles lorsque l'on ne peut accéder directement à une telle primitive. Ainsi,

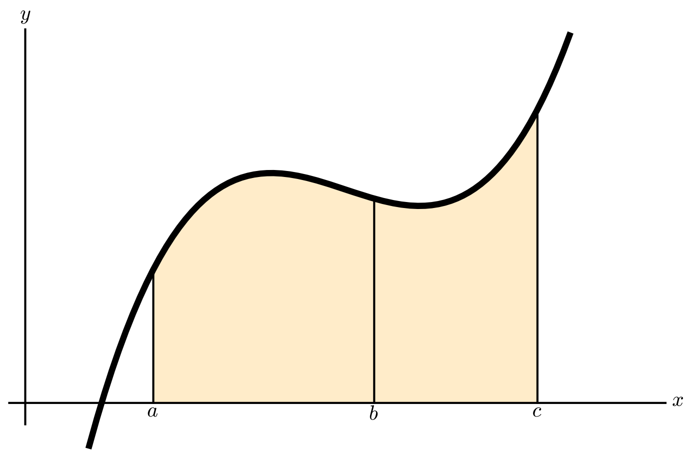
Proposition (Linéarité de l'intégrale)
Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a, b]$ et λ et μ deux réels. Alors

$$\int_a^b \lambda.f(x) + \mu.g(x)dx = \lambda. \int_a^b f(x)dx + \mu. \int_a^b g(x)dx$$

Proposition (Relation de Chasles)
Soit f continue, définie sur $[a, c]$ et soit $b \in [a, c]$. Alors

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx.$$

C'est assez clair sur un dessin :



Note : étant donné que

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

(i.e. l'aire d'un segment est nulle), la relation de Chasles permet de montrer la "réversibilité" de l'intégrale. Précisément

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.}$$

Proposition (Intégration par parties)
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Note : l'intégration par parties permet de "déplacer le problème". Il faut pour l'appliquer factoriser la fonction f à intégrer sous la forme d'un produit $u'.v$.

Enfin, l'outil le plus élaboré concernant le calcul intégral est le changement de variable :

Théorème (Changement de variable)
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et soit $\varphi : u \mapsto \varphi(u)$ une fonction bijective et dérivable sur un intervalle I telle que $\varphi(I) \subset [a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u))\varphi'(u)du.$$

Dans cette formule, la nouvelle variable est u. Elle est liée à l'ancienne variable x par la relation

$$x = \varphi(u).$$

La fonction φ étant bijective, il est possible de "retourner" cette égalité :

$$u = \varphi^{-1}(x).$$

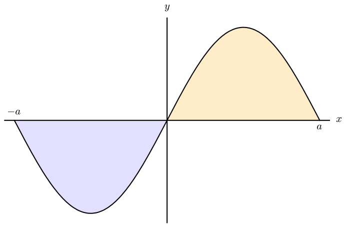
En pratique, un changement de variables se décompose en trois étapes :

- Déterminer la nouvelle fonction à intégrée. Celle-ci est obtenue en remplaçant x par $\varphi(u)$ dans f.
- Déterminer les nouvelles bornes d'intégration $\varphi^{-1}(a)$ et $\varphi^{-1}(b)$.
- Calculer le nouvel élément de longueur $dx = \varphi'(u)du$.

3.3.3 Estimation d'une intégrale

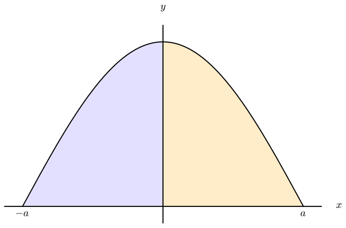
Cas particuliers

Si la fonction f que l'on souhaite intégrer est *impaire*, la symétrie par rapport au centre du repère permet de montrer rapidement que si l'on intègre sur un intervalle de la forme $[-a, a]$ $(a > 0)$, alors



$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

De même, si la fonction f est *paire*, on a, sur le même type d'intervalle :



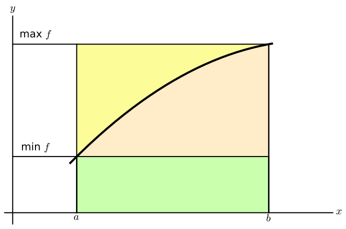
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx \; = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Encadrement

Si f est une fonction bornée sur l'intervalle $[a, b]$ on peut comparer le domaine limité par la courbe de f au dessus de $[a, b]$ à des rectangles dont les mesures dépendent des bornes de f. Ainsi, en notant

$$m = \min\{f(x),\ x \in [a, b]\} \qquad \text{et} \qquad M = \max\{f(x),\ x \in [a, b]\}$$

on a



$$(b-a).m \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \; \leqslant (b-a).M$$

Moyenne

Comme toute somme, l'intégrale permet de calculer une moyenne. Précisément, la moyenne d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ est

$$\overline{f} \; = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

L'intégrale permet de même de généraliser toutes les quantités statistiques bien connues dans le cas d'études discrètes.

3.3.4 Exercices

Exercice 31 *Calcul direct.*

Calculer les intégrales suivantes (il sera peut-être nécessaire de transformer un peu la fonction à intégrée avant de reconnaître des dérivées connues).

	A	B	C	D
1	$\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$	$\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$	$\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$	$\displaystyle\int_1^4 \left(\frac{2}{\sqrt{t}} - 5t^2\right)\,dt$
Sol.	$\pi/6$	$\pi/12$	0	-101
2	$\displaystyle\int_1^3 \frac{1+xe^x}{x}\,dx$	$\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx$	$\displaystyle\int_e^{e^e} \frac{dx}{x\ln x}$	$\displaystyle\int_e^{e^x} \frac{\ln t}{t}\,dt$
Sol.	$\ln 3 + e^3 - e$	$\ln(5/4)$	1	$\frac{1}{2}(x^2-1)$
3	$\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x+1}\,dx$	$\displaystyle\int_0^x \frac{e^t-2}{e^t+1}\,dt$	$\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-2}{x+1}\,dx$	$\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt$
Sol.	$1 - \ln 2$	$-2x + 3\ln(e^x+1) - 3\ln 2$	$-\frac{1}{2}$	$\pi/2$
4	$\displaystyle\int_0^{\pi/2} 4\sin x\cos x\,dx$	$\displaystyle\int_0^t \cos^3 u\,du$	$\displaystyle\int_0^t \frac{x}{(x-1)^4}\,dx$	
Sol.	2	$-\frac{1}{3}\sin^3(t) + \sin(t)$	$\frac{(t+3)t^2}{6(t+1)^3}$	

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 32 *Intégrations par parties*

Calculer les intégrales ci-dessous en intégrant par partie (on prendra soin de commencer par déterminer, dans la fonction à intégrer, le facteur à dériver et le facteur à primitiver).

	A	B	C	D
1	$\displaystyle\int_0^1 x^2 e^{3x}\,dx$	$\displaystyle\int_0^{\pi/3} t\sin(3t)\,dt$	$\displaystyle\int_1^t x\ln x\,dx$ $(t>0)$	$\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin t\cos t\,dt$
Sol.	$\frac{1}{27}(5e^3-2)$	$\pi/9$	$\frac{1}{4}(2t^2 ln(t) - t^2 + 1)$	$\frac{1}{4}$
2	$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}/2} \arcsin x\,dx$	$\displaystyle\int_1^e \ln t\,dt$	$\displaystyle\int_0^1 e^u\cos(2u)\,du$	$\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$
Sol.	$\frac{\sqrt{2}}{8}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$	1	$\frac{1}{5}(\cos(2)e + e\sin(2) - 1)$	$\frac{1}{2}\pi + \ln 2 - 2$
3	$\displaystyle\int_1^x \sin(\ln t)\,dt$	$\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2\ln x}{(1+x^3)^2}\,dx$		
Sol.	$\frac{1}{2}(-x\cos(\ln(x)) + x\sin(\ln(x)) + 1)$	$\frac{1}{27}\ln\left(\frac{2048}{729}\right)$		

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 33 *Changements de variables*

1. Calculer les intégrales suivantes.

	A	B	C	D
1	$\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{9+x^2}\,dx$ $(u = x/3)$	$\displaystyle\int_1^2 (\ln x)^2\,dx$ $(u{=}\ln\, x)$	$\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin t\cos t}{1-\cos t}\,dt$ $(x = \cos t)$	$\displaystyle\int_{1/a}^{a} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,dx$ $(a > 0,\ y = 1/x)$
Sol.	$\frac{\pi}{12}$	$2\ln(2)^2 - 4\ln(2) + 2$	$-\ln\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}$	0

2. Montrer que

   (a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin t}\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos t}\,dt.$

   (b) Si f est impaire et définie sur $\mathbb{R}$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

   (c) Si f est paire et définie sur $\mathbb{R}$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

   (d) Si f est T-périodique, alors

   $$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$$

   pour tout $a \in \mathbb{R}$.

   (e) Interpréter géométriquement ces résultats.

3. (a) Calculer l'intégrale

   $$\int_0^{\pi/4} \cos^4 t\,dt$$

   (b) En déduire la valeur de l'intégrale

   $$\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

   (en posant $t = \arctan x$).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 34 Déterminer les primitives des fonctions suivants. On pourra commencer par décomposer les fractions rationnelles en éléments simples.

	A	B	C	D
1	$\displaystyle\int \frac{dt}{1+t^2}$	$\displaystyle\int \frac{t}{(t^2+1)^3}\,dt$	$\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$	$\displaystyle\int \frac{x}{x^3+9x}\,dx$
Sol.	$\arctan t + k$	$-\frac{1}{4\left(t^2+1\right)^2}+k$	$\log(x-2)-\log(x-1)$	$\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1}{3}x\right)$
2	$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}\,dx$	$\displaystyle\int \frac{2t+1}{t^3-t}\,dt$	$\displaystyle\int \frac{1}{t^3+1}\,dt$	$\displaystyle\int \frac{1}{(x^4+1)^2}\,dx$
Sol.	$\frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{3}\right)$	$\frac{1}{2}\log\left(\frac{(t-1)^3}{(t+1)t^2}\right)$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{3}(2t-1)\sqrt{3}\right)+\frac{1}{3}\log\left(\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+1}}\right)$	
3	$\displaystyle\int \frac{x^7}{(x^4-1)(x^2+3)}\,dx$	$\displaystyle\int \frac{e^t}{e^{2t}-1}\,dt$	$\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)(x+a)}\,dx$ $a \neq 1$	
Sol.	$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{8}\log\left(\frac{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+3\right)^{\frac{27}{2}}}\right)$	$\frac{1}{2}\log\left(\frac{e^t-1}{e^t+1}\right)$	$(a-1)\log(x+1)+x$	

Chapitre 4

Équations différentielles

Introduction

Les équations différentielles sont l'outil principal permettant de modéliser le mouvement.

En effet, une équation différentielle est une équation liant une fonction et ses dérivées. Or les lois de la physique, notamment sur le mouvement, font le lien entre l'état d'un système et ses variations. C'est en particulier le cas du *Principe Fondamental de la Dynamique* (PFD) donnent l'accélération (i.e. la dérivée seconde de la position) d'un objet, d'une particule,... en fonction des forces qui agissent dessus. Ces forces sont souvent fonctions de la vitesse de l'objet (dérivée première de la position) et/ou de sa position.

Exemples :
- Évolution de la chaleur en un point : $T' = \lambda(K - T)$
- Vitesse de chute libre : $v' = -kv|v|$
- Réaction chimique : $u' = (A - u)(B - u)$
- Oscillateur harmonique : $x'' + \omega_0^2 x = 0$

Si l'on parvient à résoudre de façon exacte les équations ainsi obtenues, on peut connaître à chaque instant l'état du système étudié.

L'objet de ce cours est de présenter différentes méthodes de résolutions.

Notons qu'il existe en réalité très peu d'équations différentielles que l'on sait résoudre de façon exactes. Elles sont en général issues de modèles simples, qui donnent une première idée du comportement de l'objet étudié. Ces équations sont donc triées en différentes classes. Chaque méthode étudier ne s'appliquera qu'à certains type d'équations.

Si l'on souhaite affiner les modèles on obtient alors en général des équations que l'on ne sait pas résoudre. Il existe différentes méthodes d'études permettant d'obtenir

- de l'information qualitative,

- des solutions approchées (par approximation numérique).

Dans ce cours, nous nous contenterons d'étudier une classe d'équations différentielles pour laquelle il existe un protocole de résolution exacte : les équations différentielles *linéaires*, à coefficients constants.

Nous verrons dans les années à venir différentes méthodes de résolution *approchée*, s'appuyant notamment sur la puissance de calcul d'un ordinateur.

4.1 Premières définitions

Formellement, une équation différentielle ordinaire est une équation dont l'inconnue est une fonction y d'une variable réelle t, de la forme

$$\Phi(y, y', y'', ..., y^{(n)}, t) = f(t)$$

où

- n est un entier, appelé *ordre* de l'équation.
  Il correspondant à la plus haute dérivée intervenant dans l'équation,
- f est une fonction connue, appelée second membre de l'équation.

D'un point de vue théorique, on peut montrer que l'ordre d'une équation différentielle influence directement la taille de l'ensemble des solutions (plus n est élevé, plus l'équation admet de solutions différentes).

D'autre part, le second membre f représente, dans la modélisation, un apport extérieur au système étudié. Si f est nulle, l'équation est dite *homogène*. Cela correspond en général à des systèmes libres (non entretenus).

4.2 Équations différentielles linéaires

4.2.1 Définition

Une équation différentielle est dite *linéaire* si la fonction Φ qui la définit est linéaire en y et ses dérivées. Précisément, une équation différentielle linéaire d'ordre n est une équation de la forme

$$
\begin{aligned}
(E) : & \ a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t) \\
\Leftrightarrow & \ \sum_{k=0}^{n} a_k(t).y^{(k)} = f(t)
\end{aligned}
$$

Les fonctions a_i de la variable t sont *les coefficients* et sont connus.

Si les coefficients d'une telle équation sont constants, l'équation linéaire sera dite *à coefficients constants*. C'est essentiellement ce type d'équation que l'on traitera. On verra qu'il existe, d'un point de vue théorique, une méthode permettant de les résoudre complètement en s'appuyant sur la théorie des polynômes.

4.2.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Résoudre l'équation différentielle du type

$$(E) : \sum_{k=0}^{n} a_k(t)y^{(k)} = f(t)$$

consiste à déterminer l'ensemble des fonctions y qui vérifient (E).

Afin de construire des méthodes permettant de déterminer toutes ces solutions, on commence par étudier la structure de l'ensemble des solutions.

Dans un premier temps, on peut montrer que, en règle générale, une équation du type (E) admet une infinité de solutions. D'un point de vue pratique, cela signifie que l'on peut (ou doit) ajouter des contraintes supplémentaires au problème afin d'obtenir un problème *clos*, i.e. un problème admettant une et une seule solution. Ces contraintes supplémentaires peuvent se donner sous deux formes :

- Des *conditions initiales* : on impose la valeur de y et certaines de ses dérivées en une valeur t_0 fixée :
$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \ldots$$

- Des *conditions limites* : on impose la valeur de y en différents points du domaine d'étude :
$$y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1, \quad \ldots$$

On peut alors montrer que l'ordre de l'équation (E) correspond exactement au nombre de contraintes supplémentaires que l'on doit imposer pour obtenir un problème clos. Précisément, On appelle *Problème de Cauchy* tout problème différentiel constitué de

- une équation différentielle d'ordre n
- n conditions limites et/ou initiales :

$$(\mathcal{P}) \; : \; \begin{cases} \Phi(y, y', \dots, y^{(n)}, t) = f(t) & (E) \\ y(t_0) = y_0, \; y'(t_0) = y_1, \dots, \; y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} & (C.I.) \end{cases}$$

ou

$$(\mathcal{P}) \; : \; \begin{cases} \Phi(y, y', \dots, y^{(n)}, t) = f(t) & (E) \\ y(t_0) = y_0, \; y(t_1) = y_1, \dots, \; y(t_{n-1}) = y_{n-1} & (C.L.) \end{cases}$$

Par ailleurs, un problème de Cauchy sera dit linéaire si l'équation (E) est linéaire.

Le Théorème de Cauchy-Lipschitz assure alors que :

Tout problème de Cauchy linéaire admet une et une seule solution, définie sur un intervalle (ouvert) contenant l'ensemble des valeurs de t imposées par les conditions supplémentaires.

En pratique, ce théorème est une traduction mathématique de la notion de *modèle déterministe* : si l'on connaît l'état d'un système dynamique à un instant donné (les conditions initiales) et que l'on connaît ses règles d'évolution (l'équation), alors on peut connaître l'état du système à chaque instant, donné par l'unique solution du problème de Cauchy {Équation + (C.I.) ou (C.L.)}.

Par ailleurs, à l'ordre 1, ce résultat s'interprète d'un point de vue géométrique de la façon suivante : si (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, en tout point (t_0, y_0) du plan (tOy) passe une et une seule courbe associée à une solution de (E). Autrement dit, l'ensemble des courbes représentant les solutions de (E) ne se croisent jamais et recouvrent à elles toutes l'ensemble du plan (tOy).

Enfin, notons que ce résultat, énoncé pour les équations linéaires, se généralise à d'autres classes d'équations différentielles.

4.2.3 Structure de l'ensemble des solutions

Les équations différentielles linéaires forment l'une des rares classes d'équations différentielles pour lesquelles il existe une méthode de résolution systématique. Cette méthode est basée sur une étude approfondie de *la structure* de l'ensemble des solutions d'une telle équation.

Intuitivement, cette structure est issue du *principe de superposition* :

- Soit $(H)\ :\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(t)y^{(k)} = 0$

  une équation différentielle linéaire *homogène* dont y_1 et y_2 sont deux solutions. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction

  $$\lambda.y_1 + y_2\ :\ t \longmapsto \lambda.y_1(t) + y_2(t)$$

  est encore une solution de (H).

- Soit $(E)\ :\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k(t)y^{(k)} = f(t)$

  une équation différentielle linéaire non homogène. Si y_p est une solution de (E), pour toute solution y_h de l'équation *homogène* associée à (E), alors la fonction

  $$y_p + y_h\ :\ t \longmapsto y_p(t) + y_h(t)$$

  est encore une solution de (E).

Exercice : à démontrer

Formellement, cela permet d'établir une analogie entre l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 et les droites du plan ou les plans de l'espace, qui produit une méthode de résolution qui se généralise aux ordres supérieurs. Précisément, on peut montrer que

- Si (H) est une équation différentielle linéaire *homogène* d'ordre n, il existe un nombre n de solutions $y_1, \ldots,\ y_n$ dites *de base* à partir desquelles on peut exprimer l'ensemble des solutions Σ_h de (H) sous forme de *combinaisons linéaires* :

  $$\Sigma_h\ = \{\lambda_1.y_1 + \ldots + \lambda_n y_n, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}\}$$

- Si (E) est une équation différentielle linéaire *non homogène*, en notant y_p *une* solution de (E), l'ensemble des solutions Σ de (E) est

  $$\Sigma\ = \{y_h + y_p, \qquad y_h \in \Sigma_h\}$$

En pratique, pour une équation différentielle linéaire *homogène* d'ordre n, ce résultat réduit l'étude à la recherche de n solutions de base. On va voir comment construire ces n solutions dans le cas des équations linéaires *à coefficients constants* en s'appuyant sur la notion de polynôme.

Dans le cas non homogène, on commence par résoudre l'équation homogène associée (en trouvant n solutions de base) puis il reste à déterminer *une* solution de l'équation complète. En additionnant cette dernière aux solutions trouvées pour l'équation homogène, on obtient l'ensemble des solutions de l'équation étudiée. En pratique, cette seconde étape est souvent la plus complexe, bien que le problème physique de laquelle est issue l'équation permette parfois d'obtenir une solution particulière "évidente".

Dans tous les cas, l'ensemble des solutions s'exprime alors en fonction de n constantes $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Si l'équation étudiée est issue d'un problème de Cauchy, l'unique solution cherchée est alors obtenue en injectant les conditions supplémentaires dans la forme générale obtenue. En pratique, on obtient ainsi un système de n équations algébriques portant sur les n constantes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que ce système est inversible (i.e. admet une unique solution) et sa résolution donne alors les constantes associées à l'unique solution cherchée.

4.2.4 Équations différentielles linéaires à coefficients constants

Équations homogènes

Équations d'ordre 1. Une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 à coefficients constants est une équation de la forme

$$\boxed{(H_1) \ : \alpha y' + \beta y = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0}$$

Quitte à diviser par α (qui est non nul), on peut se ramener à une équation de la forme

$$\boxed{(H_1) \iff y' = ay}$$

Il y a de nombreuses façons de résoudre ce type d'équations. La théorie évoquée plus haut permet par exemple d'affirmer que l'ensemble des solutions de l'équation (H_1) peut s'exprimer à partir d'une seule solution de base. Or on peut montrer rapidement que la fonction

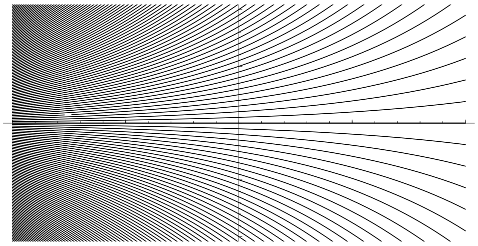
$$\boxed{y_1 \ : t \longmapsto e^{at}}$$

vérifie l'équation (H_1) (à faire). De ce fait, l'ensemble des solutions de (H_1) est

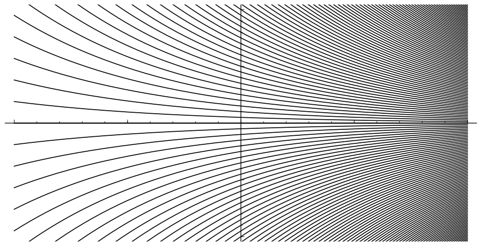
$$\boxed{\Sigma_1 \ = \{\lambda . y_1, \quad \lambda \in \mathbb{R}\} = \{t \mapsto \lambda . e^{at}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

D'un point de vue géométrique, on constate que, comme attendu, l'ensemble des courbes associées à chacune de ces solutions ne se rencontrent pas et recouvrent à elles toutes l'ensemble des points du plan :

Cas $a > 0$



Cas $a < 0$

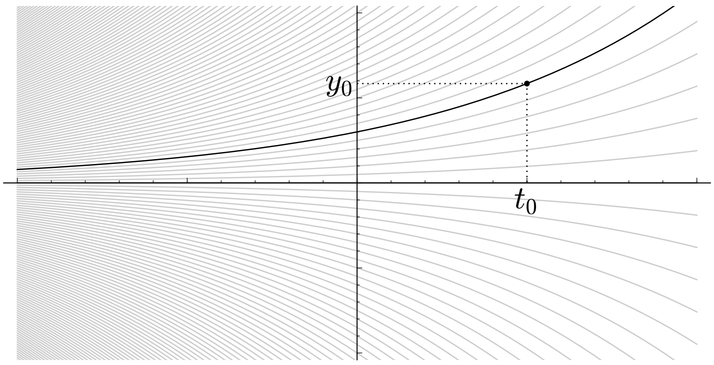


D'autre part, s'il on ajoute à (H_1) une condition supplémentaire du type $y(t_0) = y_0$ donné, on obtient un problème de Cauchy. La constant λ correspondant à l'unique solution de ce problème de Cauchy est obtenue en injectant cette condition supplémentaire dans la forme générale : puisque la fonction cherchée est une solution de (H_1), elle est de la forme $y\ :\ t \mapsto \lambda e^{at}$. Mais alors

$$\begin{aligned} y(t_0) = y_0 &\iff \lambda e^{at_0} = y_0 \\ &\iff \lambda = y_0 e^{-at_0} \end{aligned}$$

la solution cherchée est donc

$$y\ : t \longmapsto y_0 . e^{a(t-t_0)}$$



Équations d'ordre 2. Une équation différentielle linéaire homogène, d'ordre 2, à coefficients constants est une équation de la forme

$$(H_2) \quad : \quad ay'' + by' + cy = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

La théorie relative à la structure de l'ensemble des solutions d'une équation de ce type indique qu'il suffit de déterminer deux solutions indépendantes y_1 et y_2 pour cette équation et qu'alors, l'ensemble des solutions de (H_2) pourra s'exprimer à l'aide de combinaisons linéaires de ces deux solutions de base. Or il est possible de construire ces deux solutions de base à l'aide du *polynôme caractéristique* de l'équation (H_2), construit à partir des coefficients de (H_2). Précisément,

Définition
On appelle *polynôme caractéristique* de l'équation (H_2) le polynôme

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

Il est alors possible de construire des solutions de l'équation (H_2) à partir des racines de $P(X)$. Précisément,

Propriété
Si $r \in \mathbb{C}$ est une racine de $P(X)$ (i.e. si $P(r) = 0$), alors la fonction

$$t \longmapsto e^{rt}$$

est une solution de (H_2).

Exercice : à démontrer

Ainsi, si $P(X)$ admet deux racines réelles r_1 et r_2 (i.e. si son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement positif), chacune de ces racines permet de construire une solution de (H_2) et l'ensemble des solutions de (H_2) est

$$\Sigma_2 = \{y \ : \ t \longmapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Par ailleurs, si le discriminant Δ est strictement négatif, le polynôme $P(X)$ admet encore deux racines distinctes, mais ce sont deux racines complexes conjuguées $r_1 \in \mathbb{C}$ et $r_2 = \overline{r_1}$.

Dans ce cas, il est alors possible de décrire l'ensemble des solutions de (H_2) à l'aide d'exponentielles (complexes), avec une subtilité :

$$\Sigma_2 = \{y : t \longmapsto \lambda . e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \ \mu = \overline{\lambda}\}$$

Cependant, il est possible d'éviter le passage en complexe à l'aide des fonctions trigonométriques. Précisément, on peut montrer que

Si le polynôme $P(X)$ admet deux racines complexes conjuguées

$$r_1 = \alpha + i\beta \qquad \text{et} \qquad r_2 = \overline{r_1} = \alpha - i\beta$$

les fonctions (réelles)

$$y_1 : t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad \text{et} \quad y_2 : t \mapsto e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

sont des solutions de (H_2).

Exercice : à démontrer.

Ces deux solutions étant indépendantes, l'ensemble des solutions de (H_2) s'écrit alors

$$\Sigma_2 = \{y \ : \ t \longmapsto e^{\alpha t}(\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Enfin, si le discriminant Δ est nul, cela signifie que le polynôme $P(X)$ admet une unique racine réelle r_0, qualifiée de racine double. Cette racine permet encore de construire une solution de (H_2), mais il nous manque alors une solution de base. On peut cependant montrer que, dans ce cas, la fonction

$$t \longmapsto t.e^{r_0 t}$$

est également une solution de (H_2) (exercice : à démontrer). On a ainsi nos deux solutions de base, et l'ensemble des solutions de (H_2) est alors

$$\Sigma_2 = \{y \ : \ t \longmapsto \lambda e^{r_0 t} + \mu t.e^{r_0 t}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Notes :

- D'un point de vue qualitatif, on peut distinguer deux situations différentes pour les équations d'ordre 2 :

  — Si le discriminant de l'équation est positif ou nul, les solutions ont un comportement exponentiel.

  — Si le discriminant de l'équation est strictement négatif, les solutions ont un comportement oscillant. Dans ce cas, la partie imaginaire (β) des racines complexes du polynôme caractéristique correspond à la pulsation de l'oscillation et la partie réelle (α) produit un terme d'amortissement (si $\alpha < 0$) en d'entraînement (si $\alpha > 0$).

- Comme pour les équations d'ordre 1, si l'équation (H_2) étudiée est issue d'un problème de Cauchy contenant également deux conditions initiales et/ou limites, l'introduction de ces conditions supplémentaires dans la forme générale des solutions produit un système de deux équations à deux inconnues (les coefficients λ et μ) admettant une unique solution permettant d'obtenir l'unique solution au problème de Cauchy étudié.

Équations d'ordre n. De façon générale, il est possible d'étendre cette méthode de résolution aux équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants *de n'importe quel ordre* n. Précisément, si (H) est une équation de ce type :

$$(H) \ : a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad a_i \in \mathbb{R},$$

on peut, à partir des coefficients a_i construire le polynôme caractéristique de (H) :

$$P(X) \ = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

C'est un polynôme degré n admettant $p \leqslant n$ racines distinctes $r_1, r_2, \ldots, r_p$ et une forme factorisée du type

$$P(X) \ = a_n (X - r_1)^{\alpha_1} (X - r_2)^{\alpha_2} \cdots (X - r_p)^{\alpha_p}$$

où les entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ donnent les *ordres de multiplicité* des racines associées et vérifient

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k = n$$

Chaque racine r d'ordre de multiplicité α produit alors α solutions distinctes :

$$[t \mapsto e^{rt}], \ [t \mapsto t e^{rt}], \ \ldots, \ [t \mapsto t^{\alpha-1} e^{rt}]$$

et l'on obtient ainsi les n solutions de base.

Note : si $P(X)$ admet des racines complexes, alors celles ci sont conjuguées deux à deux. Pour deux racines complexes conjuguées r et $\overline{r}$ ayant le même ordre de multiplicité α, on peut alors remplacer les 2α solutions complexes par des fonctions trigonométriques, multipliée par des puissances de t.

Le cas non homogène

Soit

$$(E) \ : \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = f(t)$$

une équation différentielle linéaire à coefficients constants non homogène. D'après la théorie évoquée plus haut, la résolution de (E) se fait en deux étapes :

1. Déterminer l'ensemble Σ_h des solutions de l'équation homogène

$$(H)\ :\ \sum_{k=0}^{n} a_k y^{(k)} = 0$$

en appliquant le protocole du paragraphe ci-dessus.

2. Déterminer UNE solution particulière y_p de (E).

Comme cela a été évoqué, l'ensemble Σ des solutions de (E) est alors

$$\Sigma\ = \{y_h + y_p, \quad y_h \in \Sigma_h\}$$

Notons que cette seconde étape est souvent la plus compliquée à résoudre. Cependant, il n'est pas rare que le contexte physique duquel est en général issu l'équation à résoudre produise une solution évidente.

Par ailleurs, il est également possible de s'inspirer du second membre $f(t)$ pour chercher cette solution "évidente". Précisément, dans chacun des cas énoncés ci-dessous, on cherche une solution ayant la même forme que le second membre. En introduisant des paramètres dans la forme en question, on peut calculer les dérivées successives de la fonction cherchée et injecter la forme choisie dans l'équation. Par identification, on obtient alors des conditions sur les paramètres choisis. Si l'on peut satisfaire l'ensemble des ces conditions, on obtient une solution particulière y_p. Sinon, c'est que l'équation étudiée n'a pas de solution sous la forme cherchée.

Enfin, à l'ordre 1, quand l'instinct ne nous donne rien, on peut appliquer la méthode de *variation de la constante* : la résolution d'une équation linéaire homogène d'ordre 1 produit une constante. On a vu par exemple que les solutions de l'équation $y' = ay$ sont

$$y(t) = \lambda e^{at}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si l'on souhaite résoudre une équation de la forme $y' - ay = f(t)$ où $f(t)$ est connue (non nulle), on peut alors chercher une solution particulière de cette équation sous la forme

$$y_p(t) = \lambda(t)e^{at}.$$

(On fait varier la constante issue de la résolution de l'équation homogène associée). Dans ce cas, on a

$$y_p'(t)\ = \lambda'(t)e^{at} + \lambda(t).ae^{at}$$

et en injectant y_p dans l'équation, on obtient :

$$\boxed{\begin{aligned} y_p'(t) - ay_p(t) = f(t) &\Leftrightarrow (\lambda'(t) + \cancel{a\lambda(t)})e^{at} - \cancel{a\lambda(t)e^{at}} = f(t) \\ &\Leftrightarrow \lambda'(t) = f(t)e^{-at}. \end{aligned}}$$

Si l'on peut trouver une primitive à la fonction $t \mapsto f(t)e^{-at}$, on trouve $\lambda(t)$ puis une solution particulière à l'équation étudiée.

Pour finir, notons que si l'équation étudiée (E) est issue d'un problème de Cauchy, il faut prendre soin de terminer complètement la résolution de l'équation (E) avant d'introduire les conditions supplémentaires.

4.3 Exercices

4.3.1 Équations homogènes

Exercice 35 Donner l'ensemble des solutions des équations suivantes. On donnera dans chaque cas la limite des solutions $y(t)$ quand $t \to +\infty$.

$$(E_1) \;:\; y' - y = 0 \qquad (E_2) \;:\; y' - 2y = 0$$

$$(E_3) \;:\; y' + \tfrac{1}{2}y = 0 \qquad (E_4) \;:\; y' + a^2y = 0$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 36 Pour chacune des équations ci-dessous,

1. déterminer le polynôme caractéristique,
2. déterminer les racines de ce polynôme caractéristique,
3. en déduire les solutions de l'équation sous forme d'une somme d'exponentielles.

$$(E_1) \;:\; y'' - 3y' + 2y = 0 \qquad (E_2) \;:\; y'' + 2y' + 2y = 0 \qquad (E_3) \;:\; y'' - y = 0$$

$$(E_4) \;:\; y'' + 4y' + 4y = 0 \qquad (E_5) \;:\; y''' - y' = 0 \qquad (E_6) \;:\; y''' - y'' - y' + y = 0$$

4.3.2 Équations non homogènes

Exercice 37 Déterminer l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes. On commencera par résoudre l'équation homogène associée, puis on cherchera une solution particulière au y_p de la solution complète en s'appuyant sur la forme du second membre.

$$(E_1) \;:\; y'' - 3y' + 2y = 1 \qquad (E_2) \;:\; y'' + 2y' + 2y = e^{-t}$$

$$(E_3) \;:\; y'' - 2y' + y = t^2 \qquad (E_4) \;:\; y'' - y = t - 1$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 38 Déterminer l'ensemble des solutions de chacune des équations suivantes. On commencera par résoudre l'équation homogène associée, puis on cherchera une solution particulière au y_p de la solution complète à l'aide de la méthode de variation de la constante.

$$(E_1) \ : \ y' - 2y = \sin t \qquad (E_2) \ : \ y' + y = t + 1 \qquad (E_3) \ : \ y' - a^2 y = \frac{e^{a^2 t}}{a^2 + t^2}$$

4.3.3 Problèmes de Cauchy

Exercice 39 On place une bille de plomb dans un four à température K constante. La physique nous dit que les variations de la température $T(t)$ de la pièce de métal sont proportionnelles à la différence $T(t) - K$.

1. Traduire cet énoncé en une équation différentielle (E) d'ordre 1. On notera $\alpha > 0$ la constante de proportionnalité et T_0 la température de la bille à l'entrée du four et l'on prendra soin de vérifier que l'équation obtenue traduit bien le fait que, si $K > T(t)$, alors la température de la bille augmente.
2. Identifier le type de l'équation obtenue.
3. En s'appuyant sur le problème physique, donner une solution évidente de l'équation (E).
4. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E).
5. Donner la température de la bille à chaque instant t en fonction de T_0, K, α (et t, bien sur).
6. La température de fusion du plomb est de 327,5° C. On donne $\alpha = 4$ (pour t exprimé en heures), $T_0 = 30°$ et $K = 500°$. Au bout de combien de temps la bille de plomb est-elle fondue ?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 40 Résoudre les problèmes aux conditions initiales ci dessous.

$$(P_1) \ : \ \begin{cases} y'' + 2y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0, \, y'(0) = 1 \end{cases} \qquad (P_2) \ : \ \begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0, \, y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$(P_3) \ : \ \begin{cases} y'' + 4y' + 4y = t^2 - 1 \\ y(0) = \frac{1}{8}, \, y'(0) = 1 \end{cases} \qquad (P_4) \ : \ \begin{cases} y'' + y = \sin(2t), \\ y(0) = 0, \, y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$(P_5) \ : \ \begin{cases} y'' + y = \sin(t), \\ y(0) = 0, \, y'(0) = 0 \end{cases}$$

Notes :

- Si le polynôme caractéristique admet des racines complexes, on exprimera l'unique solution du problème à l'aide des fonctions sinus et/ou cosinus).
- Dans chaque cas, on étudiera le comportement de la solution trouvée quand $t \to +\infty$.
- Pour le problème (P_4), on cherchera une solution particulière de l'équation complète sous la forme $y_p(t) = \alpha \sin(2t)$.

- Pour le problème (P_5), on cherchera une solution particulière de l'équation complète sous la forme $y_p(t) = \alpha t \sin(t) + \beta t \cos(t)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 41 Soit (P) : $\begin{cases} y'' + 3y' + x + e^x = 0, & (E) \\ y(0) = 1,\ y'(0) = -\frac{5}{36} & (C.I.) \end{cases}$

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à (E).
2. Déterminer une solution particulière y_{p1} de l'équation
$$(E_1) \,:\, y'' + 3y' = -x.$$
3. Déterminer une solution particulière y_{p2} de l'équation
$$(E_2) \,:\, y'' + 3y' = -e^x.$$
4. Montrer que $y_p = y_{p1} + y_{p2}$ est une solution de l'équation (E).
5. En déduire les solutions de (E).
6. Déterminer, parmi les solutions de (E) l'unique solution respectant les conditions initiales $(C.I.)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 42 On considère le plan muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (\mathcal{O}\,;\, i, j)$ dans lequel on considère un pendule attaché à une corde dont l'une des extrémités est fixée en $\mathcal{O}$.

À l'équilibre, le pendule est immobile sous le point $\mathcal{O}$.

À l'instant $t = 0$, on décale le pendule de la verticale d'un petit angle θ_0 et on le lâche sans vitesse initiale.

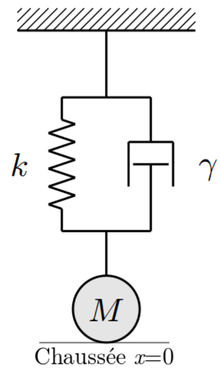
Pour tout $t \geqslant 0$, on repère la position du pendule par l'angle $\theta(t)$ que fait la corde avec la verticale. Les lois de la physique produisent l'équation différentielle suivante :

$$(E) \,:\, \theta'' + \theta' + \sin(\theta) = 0$$

1. Faire un dessin du système à $t = 0$.
2. L'équation (E) est-elle linéaire ? Justifier.
3. En supposant que $\theta(t)$ reste petit si θ_0 est petit, transformer l'équation (E) en une équation linéaire à l'aide du D.L. de la fonction sinus en 0.
4. Résoudre l'équation linéaire associées aux conditions initiales données par l'énoncé et décrire le mouvement du pendule.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 43 Le dispositif ci-contre représente un amortisseur de voiture. Il est composé d'un ressort de raideur $k > 0$ couplé à un piston hydraulique de paramètre $\gamma > 0$. En notant M la masse suspendue au dispositif et $x(t)$ la hauteur de cette masse à l'instant t, les lois de la physique permettent de montrer que la fonction x est solution de l'équation différentielle



$$(E) \,:\, Mx'' + \gamma x' + kx = 0$$

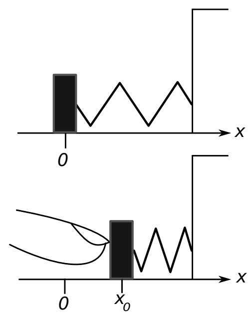
($x(t) = 0$ représentant le contact de la roue avec la chaussée).

1. Donner les caractéristiques de l'équation (E).
2. Déterminer, en fonction de M, γ et k, le polynôme caractéristique de (E).
3. En déduire une condition sur M, γ et k pour que les solutions de (E) ne soient pas oscillantes.
4. Montrer que sous ces conditions, les solutions de (E) convergent vers 0 à une vitesse exponentielle.
5. Déterminer une condition sur M, γ et k pour que, si la roue quitte la chaussée à $t = 0$, elle revienne au contact le plus rapidement possible.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 44

On considère un ressort posé à plat contre un mur, une pièce de bois de masse m étant fixée à son extrémité. On note $x = 0$ l'abscisse de la position au repos. On appuie alors sur la pièce pour la placer au point d'abscisse x_0 puis on lâche (avec une vitesse nulle). On supposer que le ressort exerce à chaque instant une pression proportionnelle à la position de la pièce. On notera $m.k^2$ le coefficient de proportionnalité. Enfin, on suppose que le plan horizontal exerce sur la pièce de bois une force de frottement opposée au mouvement. On suppose que cette force de frottement est proportionnelle à la vitesse de la pièce avec un coefficient de proportionnalité de la forme $2m\varphi$, $0 \leqslant \varphi < k$.



1. (a) Faire le bilan des forces agissant sur la pièce de bois à chaque instant.
   (b) En déduire l'équation différentielle (E) vérifiée par la fonction position x.
   (c) Déterminer l'ensemble des solutions de cette équation. On pourra poser $\omega_0 = \sqrt{k^2 - f^2}$.
   (d) Déterminer, parmi toutes ces solutions celle qui vérifie les conditions initiales données par l'énoncé.
   (e) Décrire le mouvement de l'objet. On étudiera en particulier le cas $\varphi = 0$.

On supposera dans toute la suite que $\underline{\varphi = 0}$. On a alors $\omega_0 = k$.

2. Dans cette question, on modifie le dispositif de sorte que le mur auquel est accroché le système est soumis à un mouvement périodique de pulsation $\omega \neq \omega_0$, qui impose à chaque instant une force horizontale supplémentaire donnée par la fonction $f : t \mapsto m.\sin(\omega t)$.
   (a) Déterminer l'équation différentielle (E_1) qui régit maintenant le mouvement de la pièce.
   (b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E_1) (on cherchera une solution particulière sous la forme $t \mapsto \alpha \sin(\omega t)$).
   (c) Déterminer l'unique solution de (E_1) vérifiant également les conditions initiales $x(0) = x'(0) = 0$ et décrire le mouvement de la pièce de bois.

3. On suppose maintenant que la force imposée par le mur est donnée par la fonction $g : t \mapsto m.\sin(\omega_0 t)$.
   (a) Déterminer l'équation différentielle (E_2) qui régit maintenant le mouvement de la pièce.
   (b) Montrer que (E_2) ne peut avoir de solution de la forme $t \mapsto \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)$.
   (c) Déterminer une solution particulière de (E_2) sous la forme $t \mapsto (at+b)\cos(\omega_0 t)$.
   (d) En déduire l'ensemble des solutions de (E_2) puis l'unique solution de (E_2) associée aux conditions initiales $x(0) = x'(0) = 0$.
   (e) Décrire le mouvement de l'objet. On comparera le résultat obtenu avec celui obtenu à la question 2c.