Université Toulouse 2 le Mirail — Année universitaire 2006/2007

L2 MASS. Rattrapage analyse S3

Séries numériques.

Exercice 1 Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ suivantes.

$$a)\, u_n = \frac{3^n+5}{4^n+n^2}, \qquad c)\, u_n = \frac{1+3^n}{2^{n^2}}, \qquad e)\, u_n = \frac{\ln(n+\sqrt{n})}{n^2}, \qquad f)\, u_n = \frac{1}{4^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}, \quad n \geqslant 1,$$

$$g)\, u_n = n\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right), \qquad d)\, u_n = \frac{1}{n^\alpha (ln\ n)^\beta} \quad (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ (Série de Bertrand)},$$

****

Exercice 2 On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^3}$. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $\sigma_n = S_n + \frac{1}{n^2}$.

1. Rappeler pourquoi la série $\sum u_n$ converge. On notera $S = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$.
2. Vérifier que la suite (σ_n) est décroissante.
3. Montrer que les suites (S_n) et (σ_n) sont adjacentes. En déduire que $S_n \leqslant S \leqslant \sigma_n$
4. Déterminer un entier n tel que $|S - S_n| \leqslant 10^{-2}$.

****

Exercice 3 Estimation du reste

On considère la série de terme général $u_n = \frac{\sin(\pi/2^n)}{2^n}$.

1. Montrer que cette série est convergente. On note S sa somme.
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |S - S_n| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$
(On pourra majorer $|\sum_{k=n+1}^{m} u_k|$ pour $m > n$, passer à la limite $m \to \infty$).
3. Pour quelle valeur de n la somme finie S_n nous donne une valeur approchée de S à 10^{-2} prés ?

****

Exercice 4 Séries alternées

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante qui converge vers 0. On considère la série $\sum(-1)^n a_n$, et l'on note (S_n) la suite des sommes partielles de cette série :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k.$$

1. Démontrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire que la série $\sum(-1)^n a_n$ est convergente.
3. On considère alors la suite (R_n) des restes de la séries $\sum(-1)^n a_n$: $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| \leqslant a_{n+1}.$$
(On pourra distinguer les cas n pair et n impair.)

****

Exercice 5 Séries télescopiques

1. a étant un réel donné, on note $u_n(a) = \frac{a}{n-1} - \frac{1}{n}$, $\quad n \geqslant 2$.
   (a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $a = 1$.
   (b) Calculer alors $S = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(1)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note maintenant $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ et l'on considère la série $\sum v_n$.
   (a) Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.
   (b) Déterminer les réels a, b et c tels que
   $$v_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$
   (c) Calculer la somme de la série $\sum v_n$.

****

Exercice 6 Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la fonction $f\,:\,x \to \dfrac{\sin t}{t}$ par rapport à l'intégration sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer que f se prolonge de façon continue en 0.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note
   $$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$
   (a) Montrer que la série $\sum u_n$ est une série alternée. En déduire qu'elle est convergente.
   (b) Montrer que la série $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente (on pourra chercher à minorer $|u_n|$ par le terme général d'une série divergente).
3. Que peut-on en conclure sur l'intégrale de f sur $]0, +\infty[$?

****

Exercice 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n(x) = e^{-x} - \dfrac{x-n}{x+n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$. On note u_n cette solution.
2. En étudiant le signe de $f_n(n)$, montrer que $u_n > n$. En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
3. Donner un équivalent de u_n en $+\infty$. (On pourra commencer par étudier le signe de $f_n(n+1)$).
4. Soit $a_n = u_n - n$. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
5. Donner un équivalent de a_n en $+\infty$.