Université Toulouse 2 le Mirail — Année universitaire 2006/2007
L2 MASS. Rattrapage analyse S3

Suites numériques.

Exercice 1
1. Montrer que toute suite convergeante est bornée.
2. Montrer que toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$
3. Montrer que si une suite converge, alors sa limite est unique.
4. (a) Soit (u_n) une suite numérique telle que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent et ont même limite ℓ. Montrer qu'alors (u_n) converge également vers ℓ.
   (b) En déduire que la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
5. Montrer que si (u_n) est une suite positive qui ne tend pas vers $+\infty$, alors (u_n) admet une sous suite convergente.

****

Exercice 2 Soit (u_n) une suite numérique. on suppose que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergent. Montrer qu la suite (u_n) converge également et que toutes ces suite ont même limite.

****

Exercice 3
1. Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers relatifs qui converge et soit r sa limite.
   (a) Montrer que (r_n) est stationnaire à partir d'un certain rang. (Rappel : la plus petite distance entre deux entier distincts est 1...)
   (b) En déduire que r est un entier relatif.
2. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et soit (u_n) une suite de nombres rationnels qui converge vers x. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note
$$u_n = \frac{p_n}{q_n}, \quad (p_n, q_n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*.$$
   Montrer que (q_n) et $(|p_n|)$ tendent vers $+\infty$.

****

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application injective. Montrer que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l'infini.

****

Exercice 5 Calculer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivantes :

$$a)\ u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}, \qquad b)\ u_n = \sqrt[n]{n^2}, \qquad c)\ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

****

Exercice 6 Soient $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ définies par

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right), \quad v_n = u_n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

1. Montrer que (u_n) est monotone.
2. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
3. En déduire v_n puis u_n en fonctions de n.
4. En déduire la limite de la suite (u_n).

****

Exercice 7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

1. Montrer que (u_n) est monotone.
2. Soit (v_n) définie par $v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on $\ln(x+1) \leqslant x$.
   (b) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k \leqslant \frac{1}{8}$.
3. En déduire que (u_n) converge.