Scéance n°5. Géométrie dans le plan.

Dans tous les exercices, on se place dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (dans le plan, donc). Un repère orthonormé est la donnée d'un point (O) et de deux vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ de longueur 1 (normés) et orthogonaux (ortho). N'importe quel vecteur $\vec{v}$ du plan peut alors s'écrire comme un multiple de $\vec{i}$ + un multiple de $\vec{j}$. Autrement dit, il existe des nombres x et y tels que

$$\vec{v} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$$

Ces nombres x et y sont les coordonnées du vecteur $\vec{v}$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Ces coordonnées nous permettent de représenter toutes les actions que l'on veut faire dans le plan (calcul de distances, calcul le mouvement, définition de sous ensembles...).

Remarque : par *point du plan*, on entend vecteur partant de O. Ainsi, les coordonnées du point M dans le repère sont les coordonnées du vecteur $\vec{OM}$.

Exercice 1 Soient $A = (1, \sqrt{3})$, $B = (1, -\sqrt{3})$, $C = (0, -1)$.

1. Placer ces trois point dans le repère.
2. Quelles sont les coordonnées du milieu de $[AB]$? du milieu de $[BC]$? du barycentre de A, B, C ?
3. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, de $\vec{BC}$, de $\vec{AC}$?
4. Calculer les distances AB, AC, BC. Que peut-on dire du triangle ABC ?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soient $\vec{u} = (4, 12)$ et $\vec{v} = (1, 3)$.

1. Placer les deux vecteurs dans un repère $(0\,;\vec{i},\vec{j})$. Que peut-on dire de ces deux vecteur ?
2. Comment retrouver cette observation à l'aide des coordonnées ?
3. Quel est l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{v}$? En donner une équation.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3

1. Soit (E) le système linéaire suivant.

$$(E)\ :\ \begin{cases} 2x - 4\sqrt{2}y = 0 \\ \sqrt{2}x - 4y = 0 \end{cases}$$

   (a) Donner l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de ce système.
   (b) Dessiner $\mathcal{S}$ dans un repère.
   (c) Donner un vecteur $\vec{v}$ dirigeant $\mathcal{S}$.
   (d) Donner un vecteur unitaire $\vec{u}$ dirigeant $\mathcal{S}$.

2. Soit (E') le système

$$(E')\ :\ \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 = 0 \\ 3x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

   (a) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}'$ des solutions de (E').
   (b) Quel est cet ensemble d'un point de vu géométrique ?
   (c) Donner deux vecteurs de $\mathcal{S}'$ qui ne sont pas colinéaires.
   (d) Donner deux vecteurs de norme 1 et orthogonaux de $\mathcal{S}'$.