Scéance n°6. Bases et coordonnées.

Exercice 1 1. On se place dans le plan, muni d'un point d'origine et on se donne une poignée de vecteurs $\mathcal{F} = \{\vec{0}, \vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$.

(a) Quels sont les sous ensembles de $\mathcal{F}$ qui engendrent le plan ?

(b) Quels sont les sous ensembles de de $\mathcal{F}$ qui forment une famille libre ?

(c) Quels sont les sous ensembles de $\mathcal{F}$ qui forment une base du plan ?

(d) Si l'on ajoute le vecteur nul à la famille $\mathcal{F}$, où peut-on le placer dans les sous ensembles ci dessus ?

2. On se place maintenant dans l'espace $\mathbb{R}^3$ et on considère la famille

$$\begin{array}{cccccccc} & & \vec{v_1} & \vec{v_2} & \vec{v_3} & \vec{v_4} & \vec{v_5} & \\ & & || & || & || & || & || & \\ \mathcal{F}' = & \{ & (1,2,-1), & (0,2,1), & (-1,1,-1), & (1,-1,1) & (1,0,0) & \} \end{array}$$

(a) Donner les sous ensembles qui engendrent $\mathbb{R}^3$.

(b) Donner les famille libres à deux éléments.

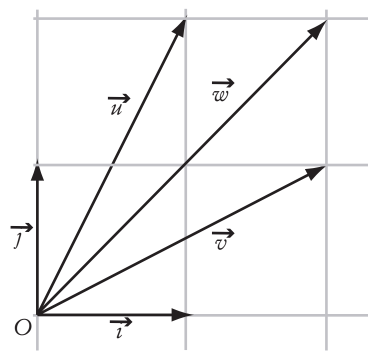
(c) Donner les bases de $\mathbb{R}^3$.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 2 *Un changement de base.*

On se place dans le plan muni d'un point d'origine O et d'une base $\mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Montrer que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est une famille libre du plan.
   Ca nous fair donc une nouvelle base $\mathcal{B}_2 = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ du plan.
3. Exprimer le vecteur $\vec{w}$ en fonction des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. (Autrement dit, déterminer les coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $\mathcal{B}_2$).
4. Quelles sont les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}_2$?
5. On se donne un $\vec{t}$ quelconque et on note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. Quelles sont ses coordonnées dans $\mathcal{B}_2$. (Elles dépendent de x et y, bien sûr).



⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Exercice 3 ** *L'espace vectoriel des matrices* 2×2.

On appelle matrice 2×2 un tableau de chiffres à 2 lignes et 2 colonnes

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

On peut alors considérer l'ensemble des matrices 2×2, que l'on note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans cet ensemble, on peut définir de façon naturelle une addition (interne) et une multiplication (externe) :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

et

$$\lambda . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que cet ensemble $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel.
2. Quelle est la dimension de cet espace ?
3. Donner une base de cet espace.
4. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires est un SEV de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
5. Donner une base de l'ensemble des matrices triangulaires.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆