Université Toulouse 2 le Mirail — Année universitaire 2006/2007

L2 MASS. Rattrapage analyse S3

Suites de fonctions.

Exercice 1 Soit (f_n) la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{nt^2}{1+nt} & \text{si} \quad t \geqslant 0 \\ \dfrac{nt^3}{1+nt^2} & \text{si} \quad t \leqslant 0 \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).
2. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.

****

Exercice 2 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$\forall\, x \in [0,1], \quad f_n(x) = \begin{cases} n^2x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/n \\ -n^2(x-2/n) & \text{si} \quad 1/n \leqslant x \leqslant 2/n \\ 0 & \text{si} \quad 2/n \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f_n pour quelques valeurs de n.
2. La suite (f_n) converge-t-elle simplement sur $[0,1]$? Si oui, quelle est sa limite f ?
3. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément vers f sur $[0,1]$?

****

Exercice 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$, on note

$$f_n(x) = \frac{(\log x)^{2n} - 1}{(\log x)^{2n} + 1}.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$. On note f sa limite.
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?
3. Sur quels intervalles fermés de $]0,+\infty[$ a-t-on convergence uniforme ? (Justifer votre réponse)

****

Exercice 4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1]$, on note

$$f_n(x) = \frac{1+\sin x}{x+1/n} \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt.$$

1. Montrer que la suite $\lim\limits_{n\in+\infty} J_n = +\infty$. (On pourra tenter de minorer (J_n) par une suite convenable.)
2. Soit (g_n) la suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$g_n(x) = \frac{\sin x}{x+1/n}.$$

   (a) Montrer que (g_n) converge simplement sur $[0,1]$ et calculer sa limite g.

   (b) La suite (g_n) converge-t-elle uniformément vers g sur $[0,1]$?

(c) Montrer que pour tout $0 < a < 1$, la suite (g_n) converge uniformément vers g sur $[a, 1]$.

(d) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(t)\,dt = \int_0^1 g(t)\,dt.$$

3. Donner un équivalent de J_n en $+\infty$.

****

Exercice 5 Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = x^n \log(\cos(x)).$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$. On notera f sa limite.
2. À-t-on convergence uniforme sur $[0, 1]$?
3. Montrer que pour tout $a \in]0, 1[$, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, 1]$.
4. En déduire $\lim_{n\to+\infty} \int_0^a f_n(t)\,dt$.
5. Montrer que

$$\int_0^1 f_n(t)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

****

Exercice 6 Soit (f_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+*$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. On notera f sa limite.
2. Soit (g_n) la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$g_n(x) = e^{-x} - f_n(x).$$

(a) Montrer que pour tout $x \in [0, n]$, on a $g_n'(x) = e^{-x} h_n(x)$ où $h_n(x) = -1 + e^x \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^{n-1}$.

(b) Étudier rapidement la fonctions h_n. En déduire qu'il existe $\alpha_n \in [1, n]$ tel que

$$g_n'(\alpha_n) = 0, \quad \forall x \in [0, \alpha_n[,\ g_n'(x) > 0, \quad \forall x \in]\alpha_n, n],\ g_n'(x) < 0$$

(c) Montrer que $g_n(\alpha_n) = \dfrac{\alpha_n e^{-\alpha_n}}{n}$ et donner le tableau de variation de g_n.

3. En déduire que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.
4. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx.$$