TD n°1. Récurrence et Ensembles.

1 Sur le raisonnement par récurrence.

Exercice 1

1. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a
$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, l'entier $n^5 - n$ est un multiple de 5.

****

Exercice 2 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_n = u_{n-1} + n - 1, \quad n \geqslant 1. \end{cases}$

1. Calculer les premiers termes de cette suite.
2. En déduire une formule explicite pour u_n.
3. La démontrer par récurrence.

****

Exercice 3 Considérons la propriété $P(n)$: "l'entier $10^n + 1$ est un multiple de 9".
Montrer que cette propriété est héréditaire. Que peut-on en conclure ?

****

2 Théorie des ensembles.

Exercice 4 Parmi l'ensemble E des étudiants de première année d'IUT, on considère F l'ensemble des filles et L l'ensemble des porteurs de lunettes. Expliciter à l'aide des symboles mathématiques (opérations dans $\mathcal{P}(E)$), de F et de L les sous-ensembles de E suivants :

$A = \{$filles avec lunettes$\}$, $B = \{$filles sans lunettes$\}$,
$C = \{$garçons avec lunettes$\}$, $D = \{$filles sans lunettes ou garçons avec lunettes$\}$,
$G = \{$filles ou porteurs de lunettes$\}$, $H = \{$filles avec lunettes ou garçons sans lunettes$\}$.

****

Exercice 5 Soient $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ et $C = \{1, 2, 4, 8\}$. Écrire en extension les ensembles suivants :

$$\begin{array}{ccccccccc} A \cap B, & A \cap C, & B \cap C, & A \cup B, & A \cup C, & B \cup C, & \overline{A}, & \overline{B}, & \overline{C}, \\ A - B, & B - A, & A - C, & C - A, & C - B, & B - C, & A \Delta B, & A \Delta C, & B \Delta C. \end{array}$$

****

Exercice 6 Soit E un référentiel, soient A, B et C trois parties non vides de E.

1. Montrer que
$$\begin{cases} A \cup C = A \cup B \\ A \cap C = A \cap B) \end{cases} \iff C = B.$$
2. Montrer que $A \cup B = A \cap B \iff A = B$.
3. Donner des contre-exemples pour montrer que :
   (a) $A \cup C = A \cup B$ n'implique pas $C = B$.
   (b) $A \cap C = A \cap B$ n'implique pas $C = B$.

****