

TD n°11. Suites II.

Exercice 1 Déterminer le sens de variation définies ci-dessous.

$$u_n = \frac{n^2}{n+1}, \quad v_n = \sqrt{3n+1}, \quad w_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{5}{2}n^2 + 6n + 1.$$

Exercice 2 Soit (u_n) la suite définie par

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$.
2. En déduire le sens de variation de (u_n) .
3. Tracer le graphe de (u_n) dans le repère ci-dessous et retrouver le résultat du 2.

Exercice 3 Soit (u_n) la suite définie par

$$u_n = \frac{e^n}{3^n}.$$

1. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Donner le premier terme, ainsi que la raison.
(Ind : on pourra étudier le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$).
2. Quelle est la nature de (u_n) ?
3. On note

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

- (a) Donner (S_n) sous forme explicite.
- (b) Quelle est la nature de (S_n) ?

Exercice 4 Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par

$$u_n = e^{1-\frac{n}{2}} \quad \text{et} \quad v_n = \ln(u_n).$$

1. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Donner le premier terme et la raison.
2. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique. Donner le premier terme et la raison.
3. On note

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n.$$

- (a) Donner les suites (S_n) et (T_n) sous forme explicites.
- (b) Déterminer la nature de ces suites (et leurs limites éventuelles).
