

TD n°12. Suites Récurrentes.

Exercice 1 L'objectif de cet exercice est d'étudier les suites récurrentes vérifiant la relation

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}}.$$

On va voir que le comportement de ce type de suites dépend du premier terme u_0 . Remarquons que du fait de la racine carrée, tous les termes sont positifs, quelque soit $u_0 > 0$.

1. *Étude de* $[x \mapsto \frac{1}{2}x^2]$

(a) Étudier et tracer la courbe de la fonction $\left[f : x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{2}} \right]$. (On travaillera uniquement avec $x > 0$).

(b) Pour quelles valeurs de x a-t-on $f(x) < 1$? $f(x) = 1$? $f(x) > 1$?

2. *Quelques exemples*

(a) Tracer sur le graphe de f la droite d'équation $y = x$.

(b) Tracer sur le dessin l'évolution de (u_n) si $u_0 = \frac{1}{2}$. Que constate-t-on ?

(c) Tracer sur le dessin l'évolution de (u_n) si $u_0 = \frac{3}{2}$. Que constate-t-on ?

(d) Que se passe-t-il si $u_0 = 1$? Retrouver ce résultat par le calcul.

3. $0 < u_0 < 1$

(a) Montrer par récurrence que si $0 < u_0 < 1$, alors $u_n < 1$ pour tout n .

(b) Montrer que si $0 < u_0 < 1$, alors (u_n) est croissante.

(c) Que peut-on en conclure ?

4. Effectuer le même travail pour $u_0 > 1$.

Exercice 2 Tracer les graphes des suites récurrentes suivantes.

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{u_n}} \end{cases} \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 = 1, 2 \\ v_{n+1} = \frac{1}{v_n^2} \end{cases} \quad (w_n) : \begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = \frac{1}{w_n} \end{cases}$$
