TD n°15. Suites Récurrentes linéaires II.

Exercice 1 *Modèle économique de Samuelson.*

Pour un pays, les économistes désignent par :

- R_n le revenu national au cours de l'année n,
- C_n la consommation de l'année n,
- D_n la dépense nationale de l'année n,
- I_n l'investissement de l'année n,
- s la propension marginale à consommer,
- v le rapport de l'investissement.

Une façon simple de modéliser l'économie d'un pays se fait via les relations suivantes.

$$\left\{\begin{array}{lcl} R_n & = & C_n + I_n + D_n \\ C_n & = & s.R_{n-1} \\ I_n & = & v.s.(R_{n-1} - R_{n-2}) \end{array}\right.$$

Pour simplifier, on suppose la dépense nationale constante, c'est-à-dire que $D_n = D = 1$ pour tout n. On estime également : $s = 1,5$ et $v = 0,5$.

1. Déterminer, à l'aide des relations données plus haut, une relation entre R_n, R_{n-1} et R_{n-2}.
2. On s'intéresse dans cette question aux suites (u_n) vérifiant la relation de récurrence
$$u_n = 2,25u_{n-1} - 0,75u_{n-2}. \quad (*)$$
   (a) Résoudre l'équation $x^2 - 2,25x + 0,75 = 0$. On donnera les solutions sous forme exacte et on les notera x_1 et x_2 , avec $x_1 < x_2$.
   (b) Démontrer que les deux suites géométriques de raison x_1 et x_2 vérifient $(*)$.
3. Démontrer que, quelque soient les réels A et B, la suite de terme général $r_n = Ax_1^n + Bx_2^n - 2$ satisfait la relation de la question 1.
4. Déterminer les réels A et B tels qu'on ait $r_0 = 1,5$ et $r_1 = 1,8$. On se contentera ici de valeurs approchées à $0,1$ près. On note (R_n) la suite associée à ces valeurs.
5. En déduire une approximation du revenu national au cours de l'année 4.
6. En supposant que l'évolution se poursuit suivant le même modèle, quelle sera la limite de R_n lorsque n tend vers $+\infty$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 *La suite de Fibonacci, encore.*

1. Soit (F_n) et (Q_n) définies par

$$(F_n) : \begin{cases} F_0 = 0,\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \end{cases} \qquad\qquad Q_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

   (a) Rappeler ou retrouver la forme explicite de (F_n).

   (b) En déduire la forme explicite de (Q_n).

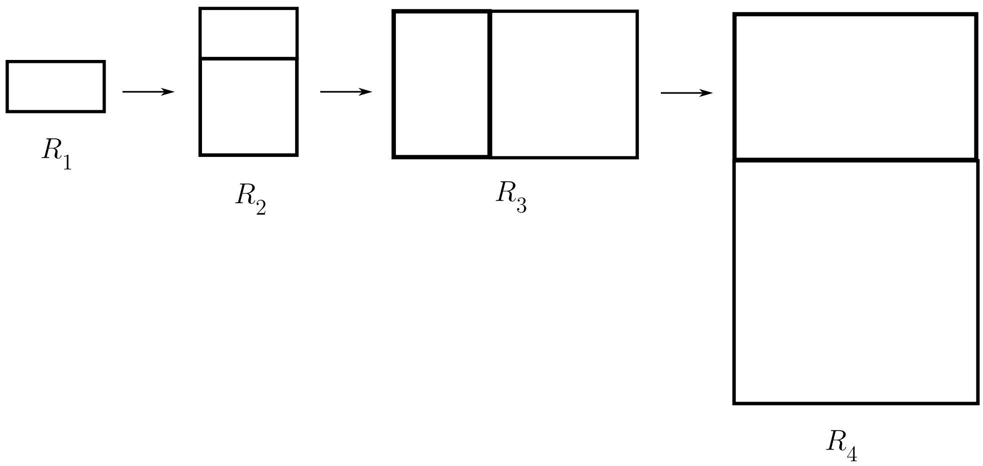
   (c) Montrer que (Q_n) est une suite convergente, et donner sa limite. (Indication : mettre en facteur les termes les plus forts au numérateur et au dénominateur).

2. *Un peu de géométrie.*

   Rappelons qu'un rectangle d'or est un rectangle dont le rapport des longueurs est égal au nombre d'or $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   On considère maintenant la construction géométrique suivante :

   - On part d'un rectangle de cotés 1 et 2. (Est-ce un rectangle d'or ?)
   - Sur l'une des grandes longueur, on colle un carré de coté 2. On obtient un nouveau rectangle.
   - Sur l'une des grandes longueur de ce rectangle, on colle un nouveau carré.
   - etc.



   On note R_1 le premier rectangle, R_2 le second, etc... et on note L_n et ℓ_n les longueur du rectangle R_n.

   (a) Exprimer L_{n+1} et ℓ_{n+1} en fonction de L_n et ℓ_n.

   (b) En déduire une relation liant L_{n+1}, L_n et L_{n-1}.

   (c) Que peut-on dire de la suite (L_n).

   (d) Que peut-on dire de la suite des rectangle (R_n) ?

   (e) Que se passe-t-il si l'on prend pour R_1 un triangle d'or ?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆