

## TD n<sup>o</sup>2. Ensembles.

### 1 Quelques exemples concrets

**Exercice 1** Précisez le cardinal des ensembles suivants, et les écrire en extension lorsqu'ils sont donnés sous forme implicite.

1.  $E_1 =$  ensemble des voyelles.
2.  $E_2 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\}$ .
3.  $E_3 = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 4\}$ .
4.  $E_4 = \{(x, y) / x \in \{1, 2, \dots, 6\}, y \in \{1, 2, \dots, 6\} \text{ et } x + y = 10\}$ .
5.  $E_5 = \{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$

\*\*\*\*\*

**Exercice 2** On note  $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . On considère les deux sous ensembles de  $E$  suivants :

$$A = \{0, 2, 3, 5, 8\} \quad \text{et} \quad B = \{2, 3, 4, 5, 6, 9\}.$$

Déterminer les ensembles  $A \cap B, A \cup B, \bar{A}, \bar{B}, A \setminus B, B \setminus A$ .

\*\*\*\*\*

**Exercice 3** Donner les ensembles suivant sous une forme plus simple.

1.  $A = [0, 1] \cap [1/2, 4]$ .
2.  $B = ]-1, 1[ \cup [0, 3]$ .
3.  $C = [0, 1[ \cap [1, +\infty[$ .
4.  $D = [0, 5[ \cap \mathbb{N}$ .

\*\*\*\*\*

### 2 Règles de calcul

**Exercice 4** Soient  $E$  un ensemble et soient  $A$  et  $B$  deux parties de  $E$ .

Simplifiez les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A \cap E, \quad A \cup E, \quad A \setminus E, \quad E \setminus A, \\ A \cap \emptyset, \quad A \cup \emptyset, \quad A \setminus \emptyset, \\ A \cap A, \quad A \cup A, \quad A \setminus A. \end{aligned}$$

2. On suppose dans cette question que  $A \subset B$ . Simplifier les expressions suivantes.

$$A \cap B, \quad A \cup B, \quad A \setminus B.$$

3. On ne suppose plus que  $A \subset B$ . Simplifier les expressions suivantes.

$$A \cap (A \cup B), \quad A \cup (A \cap B), \quad A \cap (\bar{A} \cup B).$$

\*\*\*\*\*

### 3 Retour sur le complémentaire

**Exercice 5** Soit  $E$  un ensemble et  $A, B \subset E$ .

1. Simplifier les expressions suivantes.

$$A \cap \bar{A}, \quad A \cup \bar{A}, \quad \bar{E}, \quad \bar{\emptyset}, \quad \bar{\bar{A}}.$$

2. (a) Quelle est la négation de la phrase

“ $x$  appartient à  $A$  et à  $B$ ”.

(b) En déduire une autre écriture de  $\overline{A \cap B}$ .

(c) Donner une autre écriture de  $\overline{A \cup B}$ .

Les égalités que l'on vient de montrer sont connues comme étant les **Lois de De Morgan**.

\*\*\*\*\*

**Exercice 6** Soient  $E$  un ensemble  $A_1, A_2, \dots, A_n$  des parties de  $E$ . Montrer que

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n.$$

(On pourra raisonner par récurrence à partir des lois de De Morgan.)

\*\*\*\*\*

### 4 La différence symétrique

**Exercice 7** Soit  $E$  un ensemble et  $A, B \subset E$ . On définit la différence symétrique comme

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Représenter la différence symétrique à l'aide d'un diagramme de Venn.
2. Vérifier (toujours à l'aide d'un diagramme de Venn) que l'a différence symétrique est une opération associative.
3. Simplifier les expressions suivantes.

$$A \Delta E, \quad A \Delta \emptyset, \quad A \Delta A.$$

4. Donner une autre expression de  $\Delta$ , vue comme une réunion.

\*\*\*\*\*

### 5 Application

**Exercice 8** Alice dit au lapin :

- “Les seuls objets en étain que je possède sont certaines de mes casseroles.”
- “Je trouve vos cadeaux très utiles.”
- “Aucune de mes casseroles ne présente la moindre utilité.”

Le lapin en déduit que : “Les cadeaux que je vous fais ne sont pas en étain.”

1. Représentez ces assertions à l'aide d'ensembles.
2. Le raisonnement du lapin est-il correct ?

\*\*\*\*\*

## 6 Cardinaux

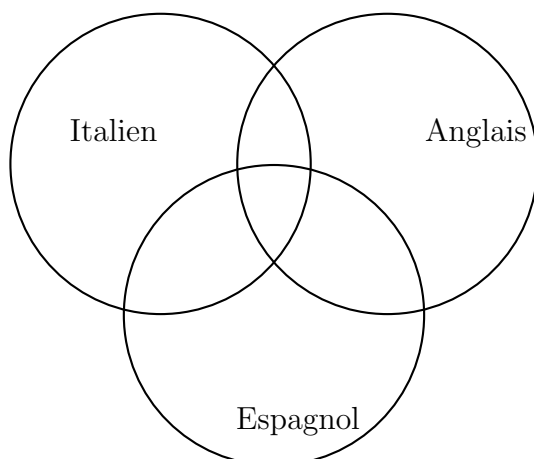
**Exercice 9** 1. Soient  $A, B, C$  trois parties d'un ensemble  $E$ . Montrer à l'aide de la formule du crible que :

$$\begin{aligned}\text{Card}(A \cup B \cup C) &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) \\ &\quad - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) \\ &\quad + \text{Card}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

2. Dans une université de langues, 100 des 120 étudiants inscrits en première année apprennent au moins une langue étrangère, parmi l'anglais, l'italien et l'espagnol. Le département de langue nous informe que :

- 65 apprennent l'anglais
- 45 apprennent l'italien
- 42 apprennent l'espagnol
- 20 apprennent l'anglais et l'italien
- 25 apprennent l'anglais et l'espagnol
- 15 apprennent l'italien et l'espagnol

(a) À l'aide des formules de l'exercice précédent, compléter le diagramme suivant en indiquant le cardinal de chaque classe.



- (b) Combien y-a-t'il d'étudiant étudiant les trois langues ?  
(c) Combien d'étudiants étudient exactement une langue étrangère ?