TD n°20. Espaces et sous espaces vectoriels.

Exercice 1

1. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la lci $\star$ par
$$(x,y) \star (x',y') = (x+x', yy').$$
   (a) Montrer que cette lci est commutative, associative.
   (b) Quel est l'élément neutre de cette lci ?
   (c) Quels sont les couples (x,y) qui admettent un inverse pour cette lci ? Quels sont ces inverses ?

2. Mêmes questions avec la lci $\clubsuit$
$$(x,y) \clubsuit (x',y') = (xx' - yy', xy' + x'y).$$

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 2 On se plan dans l'espace, muni d'un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer et dessiner l'ensemble $\mathcal{S}$ des points $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ verifiant
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ 2x-y+z & = & 0 \\ 3x+y-z & = & 0 \end{array} \right.$$

2. Montrer que $\mathcal{S}$ est un sous espace vectoriel de l'espace.

3. Donner une famille de vecteurs de l'espace permettant de recouvrire l'ensemble $\mathcal{S}$ à l'aide de combinaisons linéaires. (On donnera ces vecteurs par leurs coordonnées dans $\mathcal{R}$).

$\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star\star$

Exercice 3 1. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation

$$x + y + z = 0$$

est un SEV de $\mathbb{R}^3$.

2. (a) Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{(a, 0, 0, b),\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

est un SEV de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Donner deux éléments de $\mathbb{R}^4$ permettant de recouvrire $\mathcal{S}$ à l'aide de combinaisons linéaires.

3. Pourquoi les sous ensembles suivants ne sont pas des espaces vectoriels ?

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + 2y - 3z = 1\}, \qquad E' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x \geqslant 0\}.$$