TD n°22. Familles de vecteurs.

1 Familles génératrices

Exercice 1 On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

1. Écrire le vecteur $\overrightarrow{v} = (1, -2, 5)$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{e_1} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{e_2} = (1, 2, 3)$ et $\overrightarrow{e_3} = (2, -1, 1)$.
2. Pour quelle valeur de k le vecteur $\overrightarrow{u} = (1, -2, k)$ est-il une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{v} = (3, 0, 2)$ et $\overrightarrow{w} = (2, -1, -5)$?
3. Donner une interprétation géométrique de la question précédente. (Il faut pour cela munir l'espace d'un repère $\mathcal{R} = (O\,;\,\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, et considérer les vecteurs comme étant donnés par leurs coordonnées dans ce repère).

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On se place dans l'espace, muni d'une repère $\mathcal{R}$ et on note $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$, $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ et $\overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{w}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
2. Que peut-on dire de l'espace vectoriel engendré par la famille $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$?
3. Quelle relation liant les coordonnées des trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ pourrait caractériser tous les points de $\mathrm{Vec}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$?
4. Vérifier par le calcul que tout vecteur de ce plan est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

2 Familles libres

Exercice 3

1. On considère les 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ $\overrightarrow{u_1} = (1,2,1)$, $\overrightarrow{u_2} = (2,1,3)$ et $\overrightarrow{u_3} = (1,1,2)$
   (a) Ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?
   (b) Écrire le vecteur $\overrightarrow{v} = (6,7,8)$ dans la base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$
2. On note $\overrightarrow{t_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{t_2} = (1,1,0)$ et $\overrightarrow{t_3} = (1,1,1)$.
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{t_1}, \overrightarrow{t_2}, \overrightarrow{t_3}\}$ est libre. Que peut-on en conclure ?
   (b) Déterminer les coordonnées de tout vecteur $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 4 On considère le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x + 3y - z = 0\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{P}$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1,0,2)$ et $\overrightarrow{u_2} = (0,1,3)$ forment une famille libre de $\mathcal{P}$.
   (b) Montrer que tout vecteur de $\mathcal{P}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.
   (c) Que représente la famille $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ pour le SEV $\mathcal{P}$.
3. Quelles sont les coordonnées de tout vecteur $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$ <u>de $\mathcal{P}$</u> dans la base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$?