TD n°24. Applications linéaires et compléments.

Exercice 1 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1} = (1,0), \overrightarrow{e_2} = (0,1)\}$$

et l'on considère les familles

$$\mathcal{F}_1 = \{\overrightarrow{u_1} = (1,1), \overrightarrow{u_2} = (1,-1)\} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_2 = \{\overrightarrow{v_1} = (1,5), \overrightarrow{v_2} = (1,3)\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer la matrice de passage P_1 de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{F}_1$ et la matrice de passage P_2 de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{F}_2$.
3. Déterminer les coordonnées de n'importe quel vecteur (x, y) dans la base $\mathcal{F}_1$.
4. Donner en particulier les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ dans la base $\mathcal{F}_1$.
5. En déduire la matrice de passage P_{12} de $\mathcal{F}_1$ à $\mathcal{F}_2$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 1. Parmi les applications suivantes, quelles sont, d'après vous, celles qui sont linéaires ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & 2x+3y-z \end{array}$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array} \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+3y, x-1) \end{array}$$

2. *Vérification algébrique pour la fonction f.*

   Soient $\overrightarrow{u} = (x, y)$ et $\overrightarrow{v} = (x', y')$ deux vecteur de $\mathbb{R}^2$ et soient λ et μ deux réels.

   (a) Calculer l'image par f de la combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coefficients λ et μ.

(b) Calculer la combinaison linéaire des images.

(c) Conclure.

3. Effectuer le même travail pour les trois autres fonctions.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 Soit f l'application

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y-z, y+z, x+y-2z) \end{array}$$

1. Vérifier que f est une application linéaire.

2. On appelle *Noyau de* f l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont envoyés sur le vecteur nul. (On note cet ensemble $\mathrm{Ker}(f)$).

   (a) Montrer que le noyau de f est un SEV de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Donner sa dimension, ainsi qu'une base.

3. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆