TD n°23. Une application aux suites.

Exercice 1 On considère le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x + 3y - z = 0\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{P}$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$.
2. (a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{u_1} = (1, 0, 2)$ et $\overrightarrow{u_2} = (0, 1, 3)$ forment une famille libre de $\mathcal{P}$.
   (b) Montrer que tout vecteur de $\mathcal{P}$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. (On pourra commencer par exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ en fonction de x et y uniquement).
   (c) Que représente la famille $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ pour le SEV $\mathcal{P}$.
   (d) Quelles sont les coordonnées de tout vecteur $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ <u>de $\mathcal{P}$</u> dans la base $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$?

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 *L'ensemble des suites de Fibonacci.*
On note $\mathcal{S} = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ l'ensemble des suites et on définit sur $\mathcal{S}$ deux opérations :

- l'addition $\oplus$:
$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \oplus (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$
- La multiplication exterieure $*$:
$$\lambda * (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

On admettra que muni de ces deux opérations, l'ensemble $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel. (L'élément neutre pour l'addition $\oplus$ est évidement la suite constante égale à 0, que l'on notera (0) et l'inverse d'une suites (u_n) pour $\oplus$ est alors la suite $(-u_n)$).

D'autre part, on appelle suite de Fibonacci toute suite (u_n) vérifiant

$$(u_n) \,:\, \begin{cases} u_0,\, u_1 \text{ données,} \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1}, \quad \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

et on note $\mathcal{F}$ l'ensemble des suites de Fibonacci. Un résultat du cours nous dit que pour toute suite $(u_n) \in \mathcal{F}$, il existe des réels A et B tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = A.\phi^n + B.\psi^n \quad (\star)$$

où $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. C'est ce résultat que nous allons démontrer. Formellement, il s'agit de montrer l'égalité de deux ensembles : l'ensemble $\mathcal{F}$ d'une part, et l'ensemble des suites vérifiant $(\star)$ d'autre part.

1. Montrer que toute suite (u_n) vérifiant $(\star)$ est une suite de Fibonacci. (On a donc une première inclusion).

2. Montrons l'inclusion inverse.

   (a) Montrer que $\mathcal{F}$ est un SEV de $\mathcal{S}$.

   (b) Parmi les suites de $\mathcal{F}$, on note

   $$(f_n) \,:\, \begin{cases} f_0 = 1,\ f_1 = 0, \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1},\ n \geqslant 1, \end{cases} \quad \text{et } (g_n) \,:\, \begin{cases} g_0 = 0,\ g_1 = 1, \\ g_{n+1} = g_n + g_{n-1},\ n \geqslant 1. \end{cases}$$

   i. Montrer que la famille $\{(f_n), (g_n)\}$ forme une famille libre de $\mathcal{F}$.

   ii. Montrer que si

   $$(w_n) \,:\, \begin{cases} w_0 = a,\ w_1 = b, \\ w_{n+1} = w_n + w_{n-1} \end{cases} \qquad \text{(i.e. } (w_n) \text{ est une suite de } \mathcal{F}\text{)},$$

   alors

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = af_n + bg_n.$$

   iii. Que représente $\{(f_n), (g_n)\}$ pour le SEV $\mathcal{F}$?

   iv. En déduire la dimension de $\mathcal{F}$.

   (c) Montrer que l'ensemble des suites vérifiant $(\star)$ est également un SEV de $\mathcal{F}$.

   (d) Parmi les suites vérifiant $(\star)$, on note

   $$(p_n) \,:\, p_n = \phi^n \quad \text{et} \quad (s_n) \,:\, s_n = \psi^n.$$

   i. Montrer que $\{(p_n), (s_n)\}$ forme une famille libre.

   ii. Montrer que toute suite vérifiant $(\star)$ s'écrit comme une combinaison linéaire de (p_n) et (s_n).

   iii. En déduire la dimension de l'ensemble des suites vérifiant $(\star)$.

3. Conclure.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆