TD n°25. Applications linéaires II.

Exercice 1 Soient

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \longmapsto & (2x-z, -x+3y+z, z) \end{array}$$

et les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$\overrightarrow{e_1} = (1,0,0), \quad \overrightarrow{e_2} = (0,1,0), \quad \overrightarrow{e_3} = (0,0,1).$$

$$\overrightarrow{v_1} = (1,0,1), \quad \overrightarrow{v_2} = (1,1,0), \quad \overrightarrow{v_3} = (0,1,0).$$

(La famille $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ est donc la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

1. Calculer $f(\overrightarrow{0})$, $f(1,1,1)$, $f(1,0,-1)$.
2. Montrer que f est une application linéaire.
3. *Image de la base canonique.*
   (a) Calculer les images de $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ par f.
   (b) En déduire la matrice de f dans la base canonique.
   (Rappel : la matrice de f dans une base donnée est la matrice donnée par

$$\left(M_{\mathcal{B}}(f) \quad = \quad \begin{array}{cccc} f(\overrightarrow{e_1}) & f(\overrightarrow{e_2}) & f(\overrightarrow{e_3}) & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \left(\begin{array}{c} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{array}\right. & \begin{array}{c} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{array} & \left.\begin{array}{c} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \overrightarrow{e_1} \\ \overrightarrow{e_2} \\ \overrightarrow{e_3} \end{array} \end{array} \right)$$

4. *Une base plus adaptée.*
   (a) Montrer que la famille $\mathcal{B}_2 = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer les images de $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ par f.
   (c) En déduire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_2$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soient f l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y - z, y + z, x + y - 2z) \end{array}$$

et les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0), \quad \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0), \quad \overrightarrow{e_3} = (0, 0, 1).$$

1. Calculer $f(\overrightarrow{0}), f(\overrightarrow{e_1}), f(\overrightarrow{e_2})$ et $f(\overrightarrow{e_3})$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. On appelle *Noyau de f* l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui sont envoyés sur le vecteur nul. On note cet ensemble $\mathrm{Ker}(f)$:

$$\mathrm{Ker}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (0, 0, 0)\}.$$

   (a) Montrer que le noyau de f est un SEV de $\mathbb{R}^3$. (On pourra représenter les vecteurs de $\mathrm{Ker}(f)$ comme les solutions d'un système linéaire dont le second membre est nul).

   (b) On note $\overrightarrow{v} = (3, -1, 1)$.

      i. Calculer $f(\overrightarrow{v})$, $f(2\overrightarrow{v})$, $f(-\overrightarrow{v})$.

      ii. Montrer que l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{v}$ est un vecteur de $\mathrm{Ker}(f)$.

   (c) Donner la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$, ainsi qu'une base.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆