TD n°26. Applications linéaires III.

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$ l'application définie par

$$f(x,y) = (x+2y, -2x+3y, x+y, 3x+5y, -x+2y).$$

1. Quels sont l'espace de départ et l'espace d'arrivée de f ?
2. Montrer que f est une application linéaire.
3. Donner la matrice de f dans les bases canoniques $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_5$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^5$.
4. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, ainsi qu'une base.
5. En déduire $\mathrm{Ker}(f)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 On note $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit une application linéaire u de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^3$ en posant :

$$u(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{f_1} - \overrightarrow{f_2} + \overrightarrow{f_3}, \quad u(\overrightarrow{e_2}) = -\overrightarrow{f_1} - \overrightarrow{f_2},$$

$$u(\overrightarrow{e_3}) = -4\overrightarrow{f_2} + 2\overrightarrow{f_3}, \quad u(\overrightarrow{e_4}) = 2\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_3}.$$

1. Écrire la matrice de u dans les bases canoniques.
2. Donner explicitement $u(x,y,z,t)$.
3. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de u.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 3 On considère les vecteurs $\overrightarrow{u} = (2,1,-1)$, $\overrightarrow{v} = (1,-1,3)$, $\overrightarrow{w} = (3,3,-5)$ de $\mathbb{R}^3$ et on note $F = \mathrm{Vec}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ le sous-espace vectoriel engendré par $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\}$.

1. Déterminer une base de F.

2. On définit l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de la façon suivante :

$$f(x, y, z) = (3x + z, x - y + z, -3x - 3y + z).$$

3. Montrer que f est linéaire.

4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

5. Les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ sont-ils des éléments de $\mathrm{Im}(f)$?

6. Montrer que l'ensemble $F \cap \mathrm{Im}(f)$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$.

7. Déterminer une base et la dimension de $F \cap \mathrm{Im}(f)$.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆