TD n°3. Applications.

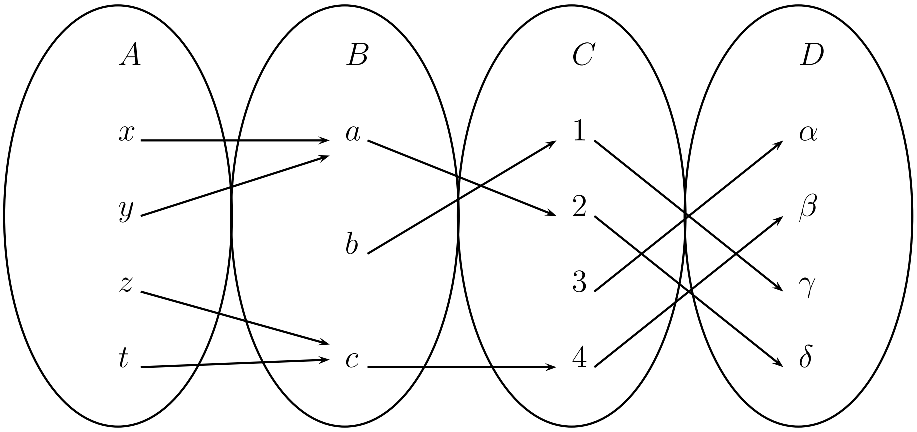
1 Injections, surjections, bijections

Exercice 1 Les fonctions suivantes sont-elles surjectives ? injectives ?

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2$.
2. $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin(x)$.
3. A chaque individu d'une classe, on attribue son âge.
4. A chaque pays, on attribue la latitude et la longitude de sa capitale.
5. A chaque livre, on attribue le nom de son premier auteur.

****

Exercice 2 On considère les fonctions $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$ définies ci-dessous :



1. Ces fonctions sont-elles injectives ? Surjectives ?
2. Définissez les fonctions composées $k = g \circ f$ et $l = h \circ g$?
3. Les fonctions k et l sont-elles injectives ? surjectives ?

****

Exercice 3 1. Montrer que l'application f définie par $f(x) = 2x + 5$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (à l'aide de la définition). Quelle est son application réciproque ?

2. Les deux fonctions suivantes ne sont pas des bijections. En donner la raison dans chaque cas.

$$a)\ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x + 2 \end{array}, \qquad b)\ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1, +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 - 2x \end{array}$$

3. Montrer que les fonctions suivantes sont des bijections (à l'aide de la définition), puis déterminer leur fonction réciproque.

$$a)\ f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]2, +\infty[\\ x & \longmapsto & e^{x-1} + 2 \end{array}, \qquad b)\ g : \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \longrightarrow & [-1, +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 - 2x \end{array}$$

****

2 Application caractéristiques

Soit E un ensemble fini de cardinal n. On a vu qu'à tout ensemble $A \subset E$, on peut associer la *fonction caractéristique* de A :

$$\begin{array}{rcccl} \chi_A & : & E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{array} \right. \end{array}$$

Exercice 4 Soit $E = \{a, b, c\}$ et soient f et g les applications définies de E dans $\{0, 1\}$ par :

$$f(a) = g(b) = 0 \text{ et } f(b) = f(c) = g(a) = g(c) = 1.$$

Donner les parties A et B de E dont f et g sont les applications caractéristiques respectives.

****

Exercice 5 Soit E un ensemble et soient A et B deux parties de E. On note χ_A et χ_B les applications caractéristiques de A et B dans E.

Exprimer $\chi_{\overline{A}}$, $\chi_{A\cap B}$, $\chi_{A\cup B}$, $\chi_{A\Delta B}$ et χ_{A-B} en fonction de χ_A et χ_B.

****

Exercice 6

1. Que peut-on dire de la fonction

$$\begin{array}{rcccl} \Phi & : & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \{\text{applications caractéristiques des parties de } E\} \\ & & A & \longmapsto & \chi_A \end{array}$$

2. Compter le nombre d'applications caractéristiques que l'on peut construire, et retrouver le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.