

TD n^o4. Dénombrement.

Exercice 1 Soit E un ensemble fini de cardinal n .

1. Que peut-on dire de la fonction

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \{\text{applications caractéristiques des parties de } E\} \\ A &\longmapsto \chi_A \end{aligned}$$

2. Compter le nombre d'applications caractéristiques que l'on peut construire, et retrouver le cardinal de $\mathcal{P}(E)$.

Exercice 2 1. Combien y a-t-il de nombres dont tous les chiffres sont différents, compris entre 700 et 3000 ?

2. Sans répétitions, combien de nombres de 3 chiffres peut-on former à l'aide des six chiffres $\{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$?

Combien de ces nombres sont :

- a) inférieurs à 500 ? b) impairs ? c) pairs ? d) multiples de 5 ?

3. Pour constituer une équipe de football, on a le choix entre 20 postulants.

(a) En supposant que chaque joueur est polyvalent, combien peut-on constituer d'équipes différentes ?

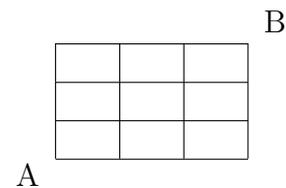
(b) Parmi les 20 postulants, 17 sont joueurs de champ et 3 sont gardiens. Combien d'équipes distinctes peut-on alors constituer ?

4. Dans une réunion, chacun serre la main de tous les autres. On compte 21 poignées de mains. Combien de personnes participent à la réunion ?

5. Combien de mots de 6 lettres peut-on écrire en utilisant 3 lettres D et 3 lettres H ?

Application : combien y a-t-il de trajectoires qui vont de A vers B en suivant le quadrillage ?

(On n'autorise que deux directions : vers le haut et vers la droite)



Exercice 3 1. Démontrer la formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

2. Montrer par récurrence la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$
