TD n°5. Ensembles et fonctions.

Exercice 1 Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = n+1 \quad \text{et} \quad g(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ n-1 & \text{si } n \geqslant 1. \end{cases}$$

1. Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g. Ces fonctions sont-elles bijectives ?
2. Calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

****

Exercice 2 Soient E, F et G ensembles et soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrer que si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est également.
2. Montrer que si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
3. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f l'est aussi.
4. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g l'est aussi.

Facultatif :

5. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.
6. Montrer que si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.

****

Exercice 3 Soit $f : E \to F$ une application de E dans F et soient A et A' deux parties de E.

1. Montrer que si $A \subset A'$, alors $f(A) \subset f(A')$.
2. (a) Montrer que $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
   (b) Montrer que si f est injective, alors $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.
3. Montrer que $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.

****

Exercice 4

1. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$
(Ind : on pourra utiliser la formule du binôme.)
2. Soit E un ensemble à n éléments et soit A un sous ensemble de E à p éléments.
   (a) Combien de parties de E contenant ne contenant aucun élément de A peut-on construire ?
   (b) Combien de parties de E contenant un et un seul élément de A peut-on construire ?

****