TD n°6. Arithmétique.

Exercice 1 1. Montrer que
- la somme de deux entiers pair est paire.
- la somme de deux entiers impairs est paire.
- La somme d'un entier pair et d'un entier impair est impair.

2. Montrer que la somme de deux entiers impairs consécutifs est toujours divisible par 4.
3. Montrer que si a est un multiple de 4, alors 4 divise tout entier de la forme $(a+4)^n$.

****

Exercice 2 Soient a et b deux entiers positifs tels que $a > b$. On effectue la division euclidienne de a et b par $a-b$. Il exsite donc $q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$a = (a-b)q_1 + r_1 \qquad \text{et} \qquad b = (a-b)q_2 + r_2, \qquad 0 \leqslant r_1, r_2 < (a-b).$$

1. Montrer que $(b-a) < (r_1 - r_2) < (a-b)$.
2. Montrer que $(a-b)$ divise $(r_1 - r_2)$.
3. En déduire que $r_1 = r_2$, puis que $q_1 = q_2 + 1$.

****

Exercice 3 1. Écrire 38 en base 7, 5 et 3.
2. Écrire les nombres 13, 14 et 16 en base 2.
3. Soit n un entier. Montrer que si son écriture en base 6 finie par 0, alors c'est un multiple de 6.

****

Exercice 4 1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $10^n - 1$ est un multiple de 9. (Autrement dit, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un entier k_p tel que $10^n = 1 + 9k_p$).
2. En déduire que pour un entier donné, si la somme de ses chiffres, lorsqu'il est écrit en base 10, est divisible par 9, alors cet entier est un multiple de 9.Rappelons que si un entier s'écrit $n = (n_p n_{p-1} \ldots n_1 n_0)_{10}$, on a

$$n = n_p.10^p + n_{p-1}.10^{p-1} + \ldots + n_1.10 + n_0.$$

****

Exercice 5 Soient a et b deux entiers.

1. Montrer que si d est un entier qui divise a et b, alors d divise aussi tout entier de la forme $ak_1 + bk_2$ pour tous k_1 et k_2 dans $\mathbb{Z}$.

2. Montrer que $a|b$ si et seulement si $b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$. (Rappel : $a\mathbb{Z} = \{a.n,\ n \in \mathbb{Z}\}$).

****

Exercice 6 Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que l'ensemble $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$. (Rappel : un idéal de $\mathbb{Z}$ est un sous ensemble de $\mathbb{Z}$ non vide, stable par addition et par multiplication).
2. Montrer que si $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, alors d est le pgcd de a et b.
3. Montrer que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.
4. Montrer que si $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, alors $d = \text{ppcm}(a, b)$.