TD n°7. Arithmétique II.

Exercice 1 Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que l'ensemble $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$. (Rappel : un idéal de $\mathbb{Z}$ est un sous ensemble de $\mathbb{Z}$ non vide, stable par addition et par multiplication).
2. Montrer que si $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, alors d est le pgcd de a et b.
3. Montrer que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$.
4. Montrer que si $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$, alors $d = \text{ppcm}(a, b)$.

****

Exercice 2

1. Donner les pgcd suivants.

$$\text{pgcd}(2,3), \quad \text{pgcd}(4,6), \quad \text{pgcd}(10,20), \quad \text{pgcd}(4,25).$$

2. À l'aide de l'algorithme d'Euclide, déterminer les pgcd suivants.

$$\text{pgcd}(294,105), \quad \text{pgcd}(1430,132), \quad \text{pgcd}(132,17).$$

****

Exercice 3 Démonstration du théorème de Gauss à l'aide du théorème de Bézout.

Rappel : si $a, b, c \in \mathbb{Z}$ vérifient $a|bc$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$, alors $a|c$.

1. Traduire les hypothèses en termes d'égalités liant a, b et c.
2. en déduire un entier c' tel que $c = ac'$.

****

Exercice 4 Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\text{ppcm}(na, nb) = n.\text{ppcm}(a, b).$$

2. Montrer que $\text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = |ab|$.

****

Exercice 5 Comme on a définit le pgcd de deux entier, on peut définir le pgcd de trois, ou plusieurs entiers : soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. le pgcd $\text{pgcd}(a, b, c)$ est le plus grand diviseur commun à a, b et c.

1. Donner les pgcd suivants

$$\text{pgcd}(4,6,10), \quad \text{pgcd}(18,27,81), \quad \text{pgcd}(2,3,6).$$

2. Montrer que pour tout $a, b, c \in \mathbb{Z}$, on a

$$\text{pgcd}(a, b, c) = \text{pgcd}(\text{pgcd}(a, b), c).$$

(Indication : on pourra noter $d = \text{pgcd}(a, b, c)$ et $d' = \text{pgcd}(\text{pgcd}(a, b), c)$ et montrer que $d|d'$, puis que $d'|d$.)

****