

TD n^o8. Arithmétique III.

Exercice 1 Décomposer les nombres suivants en facteurs premiers :

111, 137, 1025, 5678.

Exercice 2 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on a

$$x^3 - x \equiv 0 [3].$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $N = (3^{n+3} - 4^{n+2})$ est divisible par 11. (On pourra calculer N modulo 11.)

Exercice 3 1. (a) Déterminer $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^n \equiv 1 [7]$.

(b) En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}$ tel que $n|m$, on a $2^m \equiv 1 [7]$.

(c) Déterminer le reste de la division euclidienne de 247 par 7.

(d) Déterminer le reste de la division euclidienne de 247^{349} par 7.

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 1987^{1987} par 13.

Exercice 4 Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ et $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > 2$. Montrer les propriétés suivantes.

1. Si $a.c \equiv b.c [m.c]$, alors $a \equiv b [m]$. (On suppose ici que $c > 0$.)

2. Si $a.c \equiv b.c [m]$ et $\text{pgcd}(c, m) = 1$, alors $a \equiv b [m]$. Trouver a, b, c, m tels que $a.c \equiv b.c [m]$ et $a \not\equiv b [m]$.

3. Si $m|n$ et $a \equiv b [n]$, alors $a \equiv b [m]$.

4. Si $a \equiv b [m]$ et $a \equiv b [n]$ avec $\text{pgcd}(m, n) = 1$, alors $a \equiv b [mn]$. Trouver un contre exemple dans le cas où $\text{pgcd}(m, n) \neq 1$.

Exercice 5 1. (a) Montrer que 43 et 16 sont premiers entre eux.

(b) Déterminer $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $43.u + 16.v = 1$.

(c) En déduire $u \in \mathbb{Z}$ tel que $43.u \equiv 1 [16]$.

2. Mêmes questions avec 3450 et 331.

3. (a) Montrer que si p est un nombre premier, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $n' \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$n.n' \equiv 1 [p]$$

(b) Vérifier pour $p = 3, 5, 7$.

Exercice 6 Soit n un entier, et $n = (n_r n_{r-1} \dots n_1 n_0)_{10}$ son écriture en base 10.

1. (a) Écrire n comme une somme de puissances de 10.

(b) En déduire que $n \equiv n_0 [2]$.

(c) En déduire un test simple pour vérifier si un nombre écrit en base 10 est divisible par 2.

2. Retrouver les tests de divisibilité par 5, par 3, par 11.