

TD Maple n^o5. Arithmétique.

Exercice 1 *Décomposition en facteurs premiers*

1. Construire une procédure d'argument n donnant la 2-valuation de n . (Rappel : la 2-valuation d'un entier n donne la plus grande puissance de 2 qui divise n).
2. Construire une procédure d'arguments (n, p) qui donne la p -valuation de n .
3. À l'aide de la commande `ithprime`, construire une procédure d'argument n qui renvoie la liste des nombres premiers plus petits que n .
4. Construire une procédure d'argument n qui renvoie la décomposition en facteurs premiers de n . (On pourra renvoyer le résultat sous la forme d'une liste de listes. Par exemple,

$$6 = [[2, 1], [3, 1]], 8 = [[2, 3]], 60 = [[2, 2], [3, 1], [5, 1]], \dots$$

Exercice 2 *Nombres de Fermat*

On appelle nombre de Fermat tout nombre de la forme $F_n = 2^{2^n} + 1$. Fermat a longtemps cru que ses nombres étaient tous des nombres premiers.

Construire une procédure ne prenant aucun argument et qui renvoie

1. les nombres de Fermat tant qu'ils sont premiers,
2. le plus petit n_0 tel que F_{n_0} n'est pas premier,
3. la décomposition en facteurs premiers de F_{n_0} .

Attention : les nombres de Fermat augmentent très rapidement. Il est fortement conseillé d'utiliser les fonctions Maple pour les test et la décomposition.

Exercice 3 *Densités*

1. On a déjà vu qu'il existait une infinité de nombres premiers. Si l'on veut être plus précis, on peut se demander quelle est la proportion de nombres premier parmi l'ensemble des nombres entiers. Pour cela, on commence par calculer la densité de nombres premiers dans l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ (i.e. le nombre de nombres premiers présents dans $\{1, \dots, n\}$ divisé par le nombre d'entiers) puis faire tendre n vers l'infini.
 - (a) Construire une procédure d'argument n qui renvoie la densité de nombres premiers dans $\{1, \dots, n\}$. (Pour gagner un peu de temps, on pourra parcourir les nombres impairs entre 3 et n).
 - (b) Calculer cette densité pour $n = 10, 100, 1\,000, 10\,000, 1\,000\,000$.
2. On appelle nombres premiers jumeaux tous couples d'entiers $(p, p + 2)$ tels que p et $p + 2$ sont tous deux premiers.
 - (a) Écrire une procédure d'argument n qui renvoie la densité de nombres premiers jumeaux présents dans $\{1, \dots, n\}$.
 - (b) Étudier cette densité quand n grandit.
