TD Maple n°7. Suites récurrentes.

Exercice 1 Une suite récurrente est une suite définie de la façon suivante :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad : \quad \begin{cases} u_0 \text{ donné,} \\ u_{n+1} = f(u_n), \end{cases}$$

où f est une fonction donnée.

1. *Un exemples*
   Soit $f \,:\, x \mapsto \sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$.
   (a) Pour définir une fonction à l'aide de Maple, on utilise la flèche ('$-$' + '>') :

   [> `f` := `x`$-$ > *expression*;

   Définir la fonction f ci-dessus.
   (b) Calculer les 4 premier termes de la suite associée à f, et de premier terme $u_0 = 0,5$. (Pour avoir les valeurs de $f(x)$ pour certaines valeurs de x, on peut utiliser les parenthèses).
   (c) À l'aide d'une boucle `for`, calculer le 50-ième terme de cette suite, le 100-ième.

2. *Cas général*
   Construire une procédure d'arguments a, f et n qui permet de renvoyer le n-ième terme de la suite définie par

$$(u_n) \;:\; \begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Exercice 2 Soit (u_n) la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\big(u_n + \frac{2}{u_n}\big) \end{cases}$$

On peut montrer que cette suite converge vers $\sqrt{2}$. De plus, il s'avère que cette suite converge vers $\sqrt{2}$ de façon quadratique. Cela signifie qu'à chaque fois que l'on calcule un terme supplémentaire (i.e . à chaque itération) le nombre de décimales exactes double.

1. *Premiers termes.*
   À l'aide de la procédure précédente, calculer les premiers termes de la suite (u_n).

2. *Convergence.*
   Vérifier que cette suite converge bien vers $\sqrt{2}$. (On pourra prendre une valeur approchée de la différence $|u_n - \sqrt{2}|$ pour quelques grandes valeurs de n).

3. *Calcul d'une valeur approchée.*
   À l'aide d'une boucle `while`, trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-20} près.

4. *Convergence quadratique.*
   On note $\varepsilon_n :=$ `evalf`$(|u_n - \sqrt{2}|)$. Construire la liste $[\varepsilon_0, ..., \varepsilon_n]$.
   Vérifier que la convergence est bien quadratique.
   (Travailler avec 50 décimales grace à la commande *Digits*).

5. *Cas général.*
   En remplaçant la fonction f par la fonction
   $$f_a \,:\, x \mapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$
   on peut utiliser la même méthode pour approcher la racine carrée de n'importe quel nombre $a > 0$.
   Construire une procédure `racine` d'arguments (a, ε) qui renvoie une valeur approchée de $\sqrt{a}$ à ε près.

⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆